$10^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem dois da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

   a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   c) $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2. Sejam $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0, 0)$.

   a) Escreva a formula do resto segundo Lagrange e mostre que para todo (x, y), com $x + 5y < 1$,

   $$|e^{x+5y} - P_1(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2$$

   b) Avalie o erro que se comete na aproximação

   $$e^{x+5y} \cong P_1(x, y)$$

   para $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

3. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$. Mostre que para todo (x, y), com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$,

   $$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 5(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2$$

4. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$.

   a) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,01$ e $y = 0,99$.

   b) Avalie o erro que se comete na aproximação do item a).

5. Seja (x_0, y_0) um ponto tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ e suponha que f seja de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0). Prove que para todo (x, y) em B, existe $(\overline{x}, \overline{y})$ interno ao segmento de extremidade (x_0, y_0) e (x, y) tal que

   $$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}, \overline{y})(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})(x - x_0)(y - y_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}, \overline{y})(y - y_0)^2\right].$$

6. Seja $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ (a, b, c, d, e, m, constantes) e seja (x_0, y_0) um ponto tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Prove que, para todo (h, k),

   $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$

7. Sejam $f(x, y)$ e (x_0, y_0) como no exercício anterior. Prove que se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

   $$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$

   para todo $(h, k) \neq (0, 0)$. Como é o gráfico de f?

8. Suponha $f(x, y)$ de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0) e que as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem sejam limitadas em B. Prove que existe $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in B$,

   $$|f(x, y) - P_1(x, y)| \leq M\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

   onde $P_1(x, y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0, y_0).

9. Considere o polinômio $P(x,y) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c$, com $a,\ b,\ c,\ x_0$ e y_0 constantes. Suponha que exista $M > 0$ tal que para todo (x,y),

$$|P(x,y)| \leq M\|(x,y) - (x_0,y_0)\|^2$$

Prove que $P(x,y) = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

10. Calcule o polinômio de Taylor de $e^x \sin(y)$ no ponto $(0,0)$ e avalie os seguintes limites em função do parâmetro $\alpha > 0$:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(y) - y}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \qquad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(y) - xy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \qquad c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(y) - y - xy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

11. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 de $\cos(x)\cos(y)$ e avalie os seguintes limites em função do parâmetro $\alpha > 0$:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x)\cos(y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \qquad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x)\cos(y) - 1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

12. Considere as formas quadráticas $q(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ geradas pelas seguintes matrizis, e diga se são indefinidas, definidas ou semidefinidas (positivas ou negativas):

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad c)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad d)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$e)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad g)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

13. Calcule os autovalores das matrizes do exercício anterior.

Gabarito

Exercício 1 b) $T(x,y) = 5 + (x-1) + 7(y-1) + 2(x-1)^2 + 3(y-1)^2$
Exercício 2 b) $0.0018 < err < 0.0018\,e^{0.06}$
Exercício 10
a) 0 se $\alpha < 2$, $\nexists$ se $\alpha \geq 2$,
b) 0 se $\alpha < 1$, $\nexists$ se $\alpha \geq 1$,
c) 0 se $\alpha < 3$, $\nexists$ se $\alpha \geq 3$.
Exercício 11
a) $+\infty$ por todo $\alpha > 0$,
b) 0 se $\alpha < 2$, $-1/2$ se $\alpha = 2$, $\nexists$ se $\alpha > 2$,
Exercício 12 a) def pos, b) indef, c) indef, d) semidef neg, e) def pos, f,g) indef, h) semidef neg
Exercício 13 b) $-1 \pm \sqrt{5}$, d) $-5,\ 0$, f) $1,\ 2 \pm \sqrt{6}$, h) $0,\ -2,\ -3$