6ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Calcule as derivadas parciais das funções dadas:
   (a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$ (b) $f(x,y) = \cos(xy)$ (c) $f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
   (d) $f(x,y) = xye^{xy}$ (e) $f(x,y,z) = x^2\ln(x^2+y^2+z^2)$ (f) $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$

2. Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem (inclusive as cruzadas) das funções abaixo:
   (a) $f(x,y) = 4y^3 + \sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ (c) $f(x,y) = 4xyz - \ln(2xyz)$
   (d) $f(r,\theta) = r\,\mathrm{tg}\,\theta - r^2\sin\theta$ (e) $f(x,y,z) = e^{xy^2} + \ln(y+z)$ (f) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \ln(\sin t)dt.$
   (g) $f(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$ (h) $f(x,y,z) = xyz$ (i) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

3. A função $p(V,T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$ onde n e R são constantes não nulas. Calcule $\frac{\partial p}{\partial T}$ e $\frac{\partial p}{\partial V}$.

4. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\left(\frac{x}{y}\right)$: Mostre que $xf_x + yf_y = 2f$

5. Encontre a reta tangente à curva de interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $(1,2,3)$.

6. Encontre a reta tangente à interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $(1,\sqrt{12},3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

7. Ache a reta tangente à curva interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto (2,1,5). Faça um esboço.

8. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é dada por $T(x,y) = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Ache a taxa de variação da temperatura, ao longo da placa, nas direções dos eixos positivos x e y, respectivamente, no ponto $(3,1)$.

9. Encontrar a derivada direcional de $\ln(x^2+y^2+z^2)$ no ponto $(1,2,-1)$:
   a) no sentido deste ponto para a origem;
   b) no sentido de um vetor $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}\cdot(1,2,-1) = 0$.

10. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção indicada:
    (a) $f(x,y) = x^2 - 5\,x\,y + 3\,y^2$, $P = (3,-1)$, $\theta = \pi/4$
    (b) $f(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x)$, $P = (4,-4)$, $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$
    (c) $f(x,y) = x^2 + 3\,y\,z + 4\,x\,y$, $P = (1,0,-5)$, $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Uma função $f(x,y)$ é dita *harmônica* se $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Mostre que as seguintes funções são harmônicas:
    (a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x)$
    (c) $f(x,y) = a\cos x\sinh y + b\sin x\cosh y$ (d) $f(x,y) = a\,e^{-x}\cos y + b\,e^{-y}\cos x$

12. Mostre que as funções $z(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-x^2/4kt}$ (em que k é uma constante) e $z(x,t) = e^{-k^2\,t}\sin(k\,x)$ satisfazem a chamada *equação de difusão* ou *equação do calor* $z_t = k\,z_{xx}$.

13. Suponha que as funções $f\,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenham derivadas de segunda ordem contínuas. Mostre que a função $u(x,t) = f(x-c\,t) + g(x+c\,t)$ (em que c é uma constante) satisfaz a chamada *equação de onda* $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$.

14. Mostre que a função $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

15. Calcule $\nabla f(x,y)$ sendo $f(x,y) =$

    a) $x^2 y$, b) $e^{x^2-y^2}$, c) $\dfrac{x}{y}$, d) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$

16. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) =$

    a) $(1,1)$, b) $(-1,1)$, c) $(-1,-1)$, d) $(1,-1)$, e) $(0,0)$, f) $(1,0)$, g) $(0,1)$,

17. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$, sendo: (a) $z = x^3 - y^3,\ x = 1/(1+t),\ y = t/(t+1)$,
    (b) $z = \ln(r+s),\ r = e^{-2t},\ s = t^3 - t^2$ (c) $z = u^2 - v \operatorname{tg} w,\ u = \sin^2 t,\ v = \cos t,\ w = 4t$.

18. Calcule w_r e w_s, sendo: (a) $w = x^2 \sin y^3,\ x = r^3 - 2s^3,\ y = r s^2$,
    (b) $w = \sqrt{u^2 + v^2},\ u = r e^{-s},\ v = s^2 e^{-r}$ (c) $w = e^{x/y},\ x = r^2 - s^2,\ y = r^3 + s^3$.

Gabarito

Exercício 1 f) $f_x = \frac{y}{z}$, $f_y = \frac{x}{z}$, $f_z = -\frac{yx}{z^2}$.
Exercício 2 d) $f_r = \operatorname{tg}(\theta) - 2r\sin(\theta)$, $f_\theta = \frac{r}{\cos^2(\theta)} - r^2\cos(\theta)$ ...; $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0$, $f_{xy} = f_{xy} = z$, ...
Exercício 5 reta $(1, 2+t, 3-3t/2)$
Exercício 7 reta $(2+t, 1, 5+4t)$
Exercício 9 a) $-\sqrt{6}/3$, b) 0
Exercício 15 b) $2e^{x^2-y^2}(x, -y)$