$$\boxed{\textbf{10ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2}}$$

Eugenio Massa

Limites em várias variáveis

1. Calcule ou mostre que não existe (justificando):

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$, f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$, g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$, i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{-\frac{y}{x}}$, l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-\frac{y}{x}}$, m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{-\frac{y^2}{x^2}}$

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$, o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x+y^4}$, p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4}$, q) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{1}{x^2+y^4}$

r) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} x^2+3xy+2y^3$, s) $\displaystyle\lim_{\|(x,y,z)\|\to\infty} x^2+y^2$, t) $\displaystyle\lim_{\|(x,y,z)\|\to\infty} x^2+z^2+y^4-xz$

2. Determinar o valor dos seguintes limites (em todos os casos $P=(x,y)\to P_0=(0,0)$), caso existam.

(a) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ (f) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} x^2\sin\frac{y}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{(1+y^2)\sin x}{x}$ (h) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{1+x-y}{x^2+y^2}$ (i) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x\,y\,z}{x^2+y^2+z^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2\,y}{x^2+y^2}$ (l) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(m) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} (x^3+2x^2y-y^2+2)$ (n) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ (o) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$

3. **(*)** Sejam δ_1 e δ_2 curvas em $\mathbb{R}^2$, contínuas em t_0, com $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ e, para $t\neq t_0, \gamma(t_0)\neq(x_0,y_0)$, com $\gamma(t_0)\in D_f$. É verdadeira ou falsa a seguinte afirmação? (Justifique).

$$\lim_{t\to t_0} f(\delta_1(t)) = \lim_{t\to t_0} f(\delta_2(t)) = L \implies \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

4. Calcule $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-2xh-k}{\|(h,k)\|}$, onde $f(x,y)=x^2+y$.

5. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}$, onde f é dada por $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

6. **(!)** Suponha que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ e $\displaystyle\lim_{u\to a} g(u)=L$, com g não definida em a e $Imf\subset D_g$. Prove que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Prove, ainda, que o resultado acima continua válido se supusermos g definida em a, com g contínua em a.

7. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

8. **(!)** Seja $f(x,y)=\begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)}, & x^2+y^2<1 \\ f(x,y)=0, & x^2+y^2\geq 1 \end{cases}$. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2-1}$.

9. Achar o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual f seja contínua, sendo:

(a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$ (c) $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ (e) $f(x,y) = \frac{y}{x^2-y^2-4}$ (f) $f(x,y) = \frac{x\,y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

10. Determine a região de continuidade de f. Faça um desenho da mesma:

a) $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$ b) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) - \ln(9-x^2-y^2)$ d) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{xyz}}{x+y+z}$

e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

11. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6,$ b) $f(x,y) = \sqrt{6-2x^2-3y^2},$ c) $f(x,y) = \ln\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1-x^2-y^2},$ e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ e, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$

g) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)}, & r < 1 \\ f(x,y) = 1, & r \geq 1 \end{cases}$, onde $r = \|(x,y)\|$.

12. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

13. Prove que se f for contínua em (x_0,y_0) e se $f(x_0,y_0) > 0$, então existirá $r > 0$ tal que $f(x,y) > 0$ para $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$.

14. **(!)** Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam (x_0,y_0) e (x_1,y_1) em A, existe uma curva contínua $\gamma : [a,b] \to A$ tal que $\gamma(a) = (x_0,y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1,y_1)$. Prove que se f for contínua em A e se $f(x_0,y_0) < m < f(x_1,y_1)$, então existirá $(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in A$ tal que $f(\widetilde{x},\widetilde{y}) = m$.

Sugestão: aplique o Teorema do Valor Intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$.

15. **(!)** Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, uma função contínua e seja c um número real dado. Prove que o conjunto $\{(x,y) \in A : f(x,y) < c\}$ é aberto.

16. **(!)** Dizemos que a sequência de pontos $\{(x_n,y_n)\}_{n\geq 0}$ converge para $(\overline{x},\overline{y})$ se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que

$$n > n_0 \implies \|(x_n,y_n) - (\overline{x},\overline{y})\| < \epsilon.$$

Suponha que $f(x,y)$ seja contínua em $(\overline{x},\overline{y})$, que $((x_n,y_n))_{n\geq 0}$ convirja para $(\overline{x},\overline{y})$ e que $(x_n,y_n) \in D_f$ para todo $n \geq 0$. Prove que a sequência dada por $a_n = f(x_n,y_n)$ converge para $f(\overline{x},\overline{y})$.

Gabarito

Exercício 1 a,c,m,q) 0; b,d,e,f,o,i,l,n,r,s) $\nexists$; p,t) $+\infty$
Exercício 3 FALSO
Exercício 7 1.
Exercício 9 d) $\mathbb{R}^2$, outras contínuas no seu domínio.
Exercício 10 e) $\mathbb{R}^2$, outras contínuas no seu domínio.