11^{a} Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Derivadas parciais

1. Calcule as derivadas parciais das funções dadas:
   $(a)\ f(x,y)=5x^4y^2+xy^3+4$ $\quad(b)\ f(x,y)=\cos(xy)$ $\quad(c)\ f(x,y)=\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
   $(d)\ f(x,y)=xye^{xy}$ $\quad(e)\ f(x,y,z)=x^2\ln(x^2+y^2+z^2)$ $\quad(f)\ f(x,y,z)=\frac{xy}{z}$

2. Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem (inclusive as cruzadas) das funções abaixo:
   $(a)\ f(x,y)=4y^3+\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad(b)\ f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ $\quad(c)\ f(x,y)=4xyz-\ln(2xyz)$
   $(d)\ f(r,\theta)=r\operatorname{tg}\theta-r^2\sin\theta$ $\quad(e)\ f(x,y,z)=e^{xy^2}+\ln(y+z)$ $\quad(f)\ f(x,y)=\displaystyle\int_x^y \ln(\sin t)dt.$
   $(g)\ f(x,y)=4x^3y^4+y^3$ $\quad(h)\ f(x,y,z)=xyz$ $\quad(i)\ f(x,y)=e^{x^2-y^2}$

3. A função $p(V,T)$ é dada implicitamente pela equação $pV=nRT$ onde n e R são constantes não nulas. Calcule $\frac{\partial p}{\partial T}$ e $\frac{\partial p}{\partial V}$.

4. Seja $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável, e seja $f(x,y)=(x^2+y^2)\phi\left(\frac{x}{y}\right)$: Mostre que $xf_x+yf_y=2f$

5. Encontre a reta tangente à interseção da superfície $36x^2-9y^2+4z^2+36=0$ com o plano $x=1$ no ponto $(1,\sqrt{12},3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

6. Ache a reta tangente à curva interseção da superfície $z=x^2+y^2$ com o plano $y=1$, no ponto (2,1,5). Faça um esboço.

7. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é dada por $T(x,y)=54-\frac{2}{3}x^2-4y^2$. Ache a taxa de variação da temperatura, ao longo da placa, nas direções dos eixos positivos x e y, respectivamente, no ponto $(3,1)$.

8. Encontrar a derivada direcional de $\ln(x^2+y^2+z^2)$ no ponto $(1,2,-1)$:
   a) no sentido deste ponto para a origem;
   b) no sentido de um vetor $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}\cdot(1,2,-1)=0$.

9. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção indicada:
   $(a)\ f(x,y)=x^2-5\,x\,y+3\,y^2,\quad P=(3,-1),\quad \theta=\pi/4$
   $(b)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}(y/x),\quad P=(4,-4),\quad \mathbf{u}=2\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}$
   $(c)\ f(x,y)=x^2+3\,y\,z+4\,x\,y,\quad P=(1,0,-5),\quad \mathbf{u}=2\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$

10. Uma função $f(x,y)$ é dita *harmônica* se $f_{xx}+f_{yy}=0$. Mostre que as seguintes funções são harmônicas:
    $(a)\ f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad(b)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}(y/x)$
    $(c)\ f(x,y)=a\cos x\sinh y+b\sin x\cosh y$ $\quad(d)\ f(x,y)=a\,e^{-x}\cos y+b\,e^{-y}\cos x$

11. Mostre que as funções $z(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-x^2/4kt}$ (em que k é uma constante) e $z(x,t)=e^{-k^2\,t}\sin(\,k\,x)$ satisfazem a chamada *equação de difusão* ou *equação do calor* $z_t=k\,z_{xx}$.

12. Suponha que as funções $f\,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tenham derivadas de segunda ordem contínuas. Mostre que a função $u(x,t)=f(x-c\,t)+g(x+c\,t)$ (em que c é uma constante) satisfaz a chamada *equação de onda* $u_{tt}=c^2\,u_{xx}$.

13. Mostre que a função $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisfaz a equação de Laplace $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$.

14. Calcule $\nabla f(x,y)$ sendo $f(x,y)=$
    a) x^2y, $\quad$ b) $e^{x^2-y^2}$, $\quad$ c) $\dfrac{x}{y}$, $\quad$ d) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

15. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) =$

    a) $(1, 1)$, b) $(-1, 1)$, c) $(-1, -1)$, d) $(1, -1)$, e) $(0, 0)$, f) $(1, 0)$, g) $(0, 1)$,

16. Calcule $\dfrac{d}{d\,t}[z(r(t), s(t))]$, sendo: (a) $z = r^3 - s^3,\ r = 1/(1 + t),\ s = t/(t + 1)$,
    (b) $z = \ln(r + s),\ r = e^{-2\,t},\ s = t^3 - t^2$ (c) $z = r^2 - s\,\mathrm{tg}\,r,\ r = \sin^2 t,\ s = \cos t$.

17. Calcule $\dfrac{\partial}{\partial\,r}[w(x(r, s), y(r, s))]$ e $\dfrac{\partial}{\partial\,r}[w(x(r, s), y(r, s))]$, sendo: (a) $w = x^2 \sin\, y^3,\ x = r^3 - 2\,s^3,\ y = r\,s^2$,
    (b) $w = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = r\,e^{-s},\ y = s^2\,e^{-r}$ (c) $w = e^{x/y},\ x = r^2 - s^2,\ y = r^3 + s^3$.

Gabarito

Exercício 1 f) $f_x = \frac{y}{z}$, $f_y = \frac{x}{z}$, $f_z = -\frac{yx}{z^2}$.
Exercício 2 d) $f_r = \mathrm{tg}(\theta) - 2r\sin(\theta)$, $f_\theta = \frac{r}{\cos^2(\theta)} - r^2\cos(\theta)$ ...; $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0$, $f_{xy} = f_{xy} = z$, ...
Exercício 6 reta $(2 + t, 1, 5 + 4t)$
Exercício 8 a) $-\sqrt{6}/3$, b) 0
Exercício 14 b) $2e^{x^2-y^2}(x, -y)$