16ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Máximos e Mínimos

1. Selecione os candidatos extremantes locais, sendo $f(x, y) =$
a) $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$, b) $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$, c) $x^3 - y^2 + xy + 5$,
d) $x^3 + y^3 - xy$, e) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$, f) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$

2. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela, a função $f(x, y) =$
a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$, b) $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$, c) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$,
d) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$, e) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy :\ x > 0$ e $y > 0$

3. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + k$, onde a, b, c, d, e, e k são constantes. Prove que se (x_o, y_o) for extremante local de f, então será extremante global.

4. Estude com relação a extremantes globais e locais a função $f(x, y) =$
a) $x^2+2xy+2y^2-x+2y$, b) $x^2-y^2-3xy+x+4y$, c) $x+2y-2xy-x^2-3y^2$, d) $x^2+y^2-2x-4y$
e) $xy^3 + x^3y - xy$, f) $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + 2y^2}$, g) $x^2 + y^2 + \sin(x + 2y)$, h) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

5. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

6. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

7. Para produzir determinado produto cujo quantidade é representada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

8. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

9. De todos os paralelepípedos retângulos de volume dado, qual o de área total mínima?

10. Estude com relação a máximos e mínimos locais e a pontos de sela a função $f(x, y, z) =$
a) $x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$, b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$,
c) $x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$, d) $x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$

11. Seja $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$, com $(x, y) \in [0, \pi/2]^2$. Determine o(s) ponto(s) de máximo e mínimo locais e globais.

12. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 1)$ e que determina, com os planos coordenados, o tetraedro de volume mínimo. Determine este volume.

13. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos no conjunto dado.

a) $f(x, y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x, y) tais que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x \leq 3$, $x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

b) $f(x,y) = 3x - y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.

d) $f(x,y) = xy$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$.

e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

14. Determine (x,y), com $x^2 + 4y^2 \leq 1$, que maximiza a soma $2x + y$.

15. Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } 2y + x \leq 4\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura.

16. Determine a curva de nível de $f(x,y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1,\ x > 0$ e $y > 0$. Qual é o ponto de tangencia?

17. Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máxima.

18. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$

19. Determine a superfície de nível da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ que seja tangente ao plano $x + 2y + 3z = 4$. Qual é o ponto de tangencia?

20. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

21. Pede-se para determinar três números positivos cuja soma seja 36 e cujo produto seja máximo.

22. Estude $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$.

23. Representar um número positivo A em forma de produto de quatro fatores positivos, cuja soma seja a menor possível.

24. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determinar os extremos condicionados das funções:

   a) $z = xy$ quando $x + y = 1$

   b) $u = x^2 + y^2 + z^2$ quando $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$

   c) $z = x^2 + y^2$ quando $3x + 2y = 6$

   d) $u = xyz$ quando $x + y + z = 5$ e $xy + yz + zx = 8$

25. Qual o volume do maior paralelepípedo retangular inscritível no elipsóide.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

26. Mostre que se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(p)$ é nulo ou tem direção radial (isto é, o vetor p e o vetor $\nabla f(p)$ tem mesma direção)

Gabarito

Exercício 1 a) $\left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$

Exercício 4 h) $(0,0)$ máx loc, $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$ mín glob

Exercício 5 $\frac{2}{3}(1, 2, -1)$

Exercício 6 $x = 10,\ y = 30$.

Exercício 10 c) $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ mínimo, $(-1, 1, 2)$ sela.

Exercício 11 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ máx glob (interior); $(0,0)$ e todos $(x, \pi/2)$ e $(\pi/2, y)$ mínimo globais (na fronteira); $(0, \pi/4)$ e $(\pi/4, 0)$ seriam máximos mas apenas ao longo da fronteira.

Exercício 26 sugestão: aplique os multiplicadores de Lagrange para achar extremos da f sobre um circulo.....