

1ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Definição e propriedades da integral

Exercícios sobre a definição da integral

Exercício 1 Estime por cima e por baixo as seguintes integrais (sem calculá-las: use que se $m < f(x) < M$ para $x \in [a, b]$, então $m(b - 1) \leq \int_a^b f \leq M(b - 1)$):

(a) $\int_3^6 (4x - 1)dx$ (b) $\int_{-2}^3 x^2 dx$ (c) $\int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx$ (d) $\int_{-2}^2 \frac{4}{1 + u^2} du$.

Exercício 2 Encontre (se possível) exemplos para os casos abaixo:

- a) uma função f tal que $\int_0^1 f = 0$ mas $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0, 1]$;
- b) uma função f tal que $\int_0^1 f > 0$ mas $f(x) < 0$ para todo $x \in [0, 0.9]$;
- c) duas funções f, g tais que $\int_0^1 f = 1$, $\int_0^1 g = 1$ e $\int_0^1 fg = 0$;
- d) uma função f tal que $\int_0^1 f = 0$ mas $\int_0^1 |f| = 1$.

Exercício 3 Sabe dizer, sem fazer contas, quanto vale a integral a seguir?

$$\int_{-4}^3 \sin(x)e^{-x^2} dx - \int_{-4}^{-3} \sin(x)e^{-x^2} dx$$

Exercício 4 Use um argumento geométrico para calcular $\int_0^6 \sqrt{36 - x^2} dx$.

Exercícios sobre Teoremas da média e Teorema Fundamental do Cálculo.

Exercício 5 Nas integrais abaixo, verifique se pode ser aplicado o teorema da média integral (na sua versão para funções contínuas) e no caso encontre um ponto que satisfaça a tese do teorema ($[[u]]$ indica a parte inteira de u).

(a) $\int_3^6 (4x - 1)dx$, (b) $\int_{-2}^3 x^2 dx$, (c) $\int_0^2 \frac{2x^2}{1 - x^2} dx$, (d) $\int_{-2}^{2.5} [[u]] du$.

Exercício 6

- a) Encontre um exemplo de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, tal que existe $c \in (a, b)$ com a propriedade que $\int_0^1 f(x)dx = f(c)$.
- b) Encontre um exemplo de uma função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, tal que não existe $c \in (a, b)$ com a propriedade $\int_0^1 g(x)dx = g(c)$.
- c) Sejam agora $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e $G(x) = \int_0^x g(t)dt$: elas são contínuas? elas são deriváveis? Justifique a resposta.

Exercício 7 Esboce o gráfico da função $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ quando f é uma das funções a seguir ($[[x]]$ é parte inteira de x)

a) $f(x) = [[x]]$, b) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 5, \\ 0 & x \in (5, 6], \\ -3 & x > 6 \end{cases}$ c) $f(x) = x - [[x]]$.

Exercício 8 Calcule as derivadas das funções a seguir (esclareça antes o domínio natural da função):

(a) $\int_1^{\cos t} (t + \sin t) dt$ (b) $\int_{e^x}^0 \sin^3(t) dt$ (c) $\int_2^{1/x} \tan(s) ds$ (d) $\int_x^{(e^x-1)} \frac{1}{x} dx$

Exercício 9 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{\cos^2(t)} dt}{\sin(x)}$

Exercício 10 Calcule o polinômio de Taylor em 0, de ordem 3, das funções

$$f(x) = \int_0^x e^{x^2} dx \quad g(x) = \int_{x^2}^{\pi} \sin(x) dx$$

GABARITO

Exercício 1 b) entre 0 e 45

Exercício 3 vale 0

Exercício 4 9π

Exercício 5 a) $p = 4.5$, b) $p = \pm\sqrt{7/3}$, c,d) não aplica

Exercício 8 c) $D = (2/3\pi, 2/\pi)$, $f' = -\tan(1/x)/x^2$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f' = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$.

Exercício 9 $\lim = e$

Exercício 10 para f: $x + 2x^3/6$, para g: $2 - x^4/2$.