$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Aplicações da integral

Lembrete

- Se uma partícula se desloca com aceleração $a(t)$ ao longo de uma reta,
  – a **variação da velocidade** entre t_1 e t_2 é $v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\, d\tau$
- Se uma partícula se desloca com velocidade $v(t)$ ao longo de uma reta,
  – o **deslocameto** (variação da posição) entre t_1 e t_2 é $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)\, d\tau$
  – o **espaço percorrido** entre t_1 e t_2 é $e(t_2) - e(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |v(\tau)|\, d\tau$

Exercício 1 Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = t^2 - 3t - 4$, $t \geq 0$.

(a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

(b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

Exercício 2 Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = \cos t$, $t \geq 0$.

(a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi/2$.

(b) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.

(c) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi/2$.

(d) Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.

Exercício 3

- Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é nula.
- Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)^2$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é $v_0 = -1$.
- Calcule o movimento de uma partícula de massa m que desloca-se sobre o eixo $0x$, sujeita a uma força $F(t) = 1/(t + 1)^3$, sabendo que no instante $t = 0$ ela está na origem e sua velocidade é $v_0 = -1/2$.

Exercício 4 Encontre a área da região limitada pelas curvas
(a) $y = \cos x$ e $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.
(b) $y = \mathrm{sen}^4 x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ e o eixo x.

Exercício 5 As curvas $y = \mathrm{sen} x$ e $y = \cos x$ se interceptam periodicamente. Encontre a área da região limitada por estas curvas entre pontos de intersecção consecutivos.

Exercício 6 Encontre a área da região limitada por $x = 4 - y^2$ e pelo eixo y.

Exercício 7 Encontre a área da região limitada por $y = x(x - 1)(x - 3)$ e pelo eixo x.

Exercício 8 Uma esfera de raio $r > 0$ pode ser vista como um sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região sob a curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \leq r$. Usando isso, calcule o volume da esfera.

Exercício 9 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \le y \le x\}$; (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$;

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\ \dfrac{1}{x} \le y \le 1\}$; (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 2,\ \sqrt{x} \le y \le 3\}$.

Exercício 10 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\}$; (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 8,\ \ 0 \le y \le \sqrt[3]{x}\}$;

Exercício 11 Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelas curvas dadas.

(a) $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$; (b) $x = 1+y^2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$; (c) $y = \ln x,\ y = 0, x = 2$.

Exercício 12 Considere o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Calcule: (a) o volume V do sólido; (b) a área lateral A do sólido.

Exercício 13 Encontre a área da superfície da esfera gerada pela rotação em torno do eixo x da curva $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ |x| \le a$.

Exercício 14 Calcule a área das seguintes superfícies geradas pela rotação das seguintes curvas em torno do eixo x, nos respectivos intervalos.

(a) $y = (1/3)x^3,\ \ 0 \le x \le 1$; (b) $y = x^{2/3},\ \ 0 \le x \le 8$; (c) $y = e^x,\ \ 0 \le x \le 1$ (d) $y = \operatorname{sen} x,\ \ 0 \le x \le \pi/2$

Exercício 15 Calcule o comprimento das seguintes curvas nos respectivos intervalos.

(a) $y = 2x^{3/2},\ \ 0 \le x \le 1$; (b) $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2},\ \ 0 \le x \le 1$; (c) $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x},\ \ 1 \le x \le 3$

Exercício 16 A Lei de Newton da Gravitação Universal afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força de

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde r é a distância entre os corpos e G é a constante gravitacional. Se um dos corpos é fixo, encontre o trabalho necessário para mover o outro corpo de $r = a$ para $r = b$.

Gabarito

Exercício 1: (a) $-\dfrac{56}{3}$ (b) $\dfrac{56}{3}$

Exercício 2: (a) 1; (b) 0; (c) 1; (d) 2

Exercício 4: (a) $2 - \sqrt{2}$; (b) $\dfrac{1}{5}$

Exercício 5: $2\sqrt{2}$

Exercício 6: $32/3$

Exercício 7: $37/12$

Exercício 8: $(4/3)\pi r^3$

Exercício 13: $4\pi a^2$

Exercício 14: $a)$ $(\pi/9)(2\sqrt{2} - 1)$ $b)$ $(128\pi/1215)(125\sqrt{10} + 1)$

Exercício 15: $a)$ $(2/27)(10\sqrt{10} - 1)$ $b)$ $4/3$ (c) $14/3$