1 Funções de várias variáveis - 2

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D.

1.1 Objetivo: plano tangente

Definição:
(Hiper)plano tangente em p ao gráfico de f
é a única (se existir) função afim $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que passa por $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ com a propriedade que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0.$$

É a **função afim que (neste sentido) melhor aproxima a função, quando x está perto de p**.

1.2 Derivabilidade

Seja $\widehat{\mathbf{v}}$ um versor (vetor unitário)

- **Se existir**
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\widehat{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{p})}{t} = L \ \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p na direção $\widehat{\mathbf{v}}$,**
  - **L é a derivada direcional de f em p, na direção $\widehat{\mathbf{v}}$;**
  notação: $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) := L$.

- Se o limite não fizer sentido, ou não existir (ou for infinito), dizemos que **f não é derivável em p na direção $\widehat{\mathbf{v}}$**.

- Nos casos particulares em que $\widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{i}}_j$ a derivada $D_{\widehat{\mathbf{i}}_j} f(\mathbf{p})$ é dita **derivada parcial com respeito a x_j**,
notação: $D_{\widehat{\mathbf{i}}_j} f(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = f_{x_j}(\mathbf{p})$.

- Chamamos **gradiente de f no ponto p** o vetor (se existir) que contem todas as derivadas parciais:
$\nabla f(\mathbf{p}) = (f_{x_1}(\mathbf{p}),\ f_{x_2}(\mathbf{p}),\ \dots f_{x_n}(\mathbf{p}))$
(se $n = 1$ isso é $f'(p)$)

- Dizemos que **f é derivável em p** se existe $\nabla f(\mathbf{p})$ (i.é, existem todas as derivadas parciais)
- Dizemos que **f é derivável em A** se for derivável em todo $p \in A$
- Dizemos que **f é derivável** se for derivável em todo seu domínio.

Se f é derivável em um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ então podemos definir as **n funções derivada parcial**:

$$f_{x_j} : A \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f_{x_j}(\mathbf{x}); \qquad j = 1, .., n$$

Também podemos definir a **função (vetorial) gradiente**:

$$\nabla f : A \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto \nabla f(\mathbf{x}).$$

Cálculo das derivadas parciais: basta usar as regras de derivação, supondo que a função dependa só daquela variável, enquanto as outras são constantes.

Derivadas de ordem superior: podemos derivar as funções derivada parcial mais vezes:

derivadas segundas:

- $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} f = f_{x_k, x_j}$: derivada segunda com respeito a x_k (primeiro) e a x_j (depois)
- $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f_{x_j, x_j}$: derivada segunda com respeito a x_j duas vezes.

derivadas terceiras:

- $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k^2} f = f_{x_k, x_k, x_j}$,
- $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} = f_{x_j, x_j, x_j}$,

...

1.3 Diferenciabilidade

Observação:

- Em cálculo 1 uma função derivável era sempre contínua, e sempre possuía um reta tangente.
- Funções de várias variáveis podem ser deriváveis (em qualquer direção) mas não possuir (hiper)plano tangente, ou até não ser contínuas.
- Por isso precisamos de um conceito mais forte que derivabilidade.

- **Se existir um (hiper)plano π tangente ao gráfico de f em $\mathbf{p}$**, então dizemos que
  - **f é diferenciável em p ,**
  - a função linear $df_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$ tal que $\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$, é dita a **diferencial de f em $\mathbf{p}$**
- Se não existir um (hiper)plano tangente ao gráfico de f em $\mathbf{p}$ dizemos que **f não é diferenciável em p** .

OBS: formulação alternativa:
f é diferenciável em p, se existe uma função linear $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

A **diferencial de f em $\mathbf{p}$** é então $df_{\mathbf{p}} = \mathcal{L}$

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D.
Se f é diferenciável em $\mathbf{p}$ **então**

- **f é contínua em $\mathbf{p}$,**
- **f é derivável em $\mathbf{p}$ em qualquer direção,**
- **vale** $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
- **vale** $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \widehat{\mathbf{v}}$
- **vale** $\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$

Consequência:

Para verificar diferenciabilidade precisa primeiro calcular $\nabla f(\mathbf{p})$ e depois verificar se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0.$$

Algumas propriedades geométricas do gradiente:

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D, e seja f diferenciável em $\mathbf{p}$.

- a **direção** de $\nabla f(\mathbf{p})$ é a de máximo crescimento para f perto de $\mathbf{p}$
- o **módulo** de $\nabla f(\mathbf{p})$ é o valor de $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p})$ onde $\widehat{\mathbf{v}} = \nabla f(\mathbf{p}) / \|\nabla f(\mathbf{p})\|$
- se $\widehat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f(\mathbf{p}) = 0$ então $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) = 0$.
- o vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $v = (\nabla f(\mathbf{p}), -1)$ é perpendicular ao gráfico de f no ponto $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ (isto é, é perpendicular ao gráfico do (hiper)plano tangente π.)

1.4 Condição suficiente para diferenciabilidade

Teorema (Condição para diferenciabilidade).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D.

Se f é derivável em uma toda uma vizinhança de $\mathbf{p}$ (isto é, existe $\delta > 0$: ∇f existe em $B_\delta(\mathbf{p})$) e ∇f é contínua em $\mathbf{p}$

então f é diferenciável em p.

Corolário.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua com gradiente contínuo em D', sendo D' aberto; **então f é diferenciável em D'.**

OBS: f poderia ser differenciável mas não ter derivadas contínuas!

1.5 Regras e teoremas de derivação / diferenciação

Sejam

$$f, g : D \to \mathbb{R}\,, \quad \text{deriváveis em } p \ ^{(p \in D \text{ um ponto de acumulação de } D)}$$

e $k \in \mathbb{R}$
então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são deriváveis em** p**,**
- f/g **é derivável em** p**, desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$**,**
- **vale**

$$\begin{cases} \nabla(kf)(\mathbf{p}) = k\,\nabla f(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(f \pm g)(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \pm \nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(fg)(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(f/g)(\mathbf{p}) = \frac{g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\textbf{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

Sejam

$$f, g : D \to \mathbb{R}\,, \quad \text{diferenciáveis em } p \ ^{(p \in D \text{ um ponto de acumulação de } D)}$$

e $k \in \mathbb{R}$
então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são diferenciáveis em** p**,**
- f/g **é diferenciável em** p**, desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$**,**
- **vale**

$$\begin{cases} d(kf)_{\mathbf{p}} = k\,df_{\mathbf{p}}\,, \\ d(f \pm g)_{\mathbf{p}} = df_{\mathbf{p}} \pm dg_{\mathbf{p}}\,, \\ d(fg)_{\mathbf{p}} = g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} + f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}\,, \\ d(f/g)_{\mathbf{p}} = \frac{g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} - f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\textbf{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

Regra da cadeia: curva composta com função de várias variáveis:

Sejam

- $\gamma : D_\gamma \to \mathbb{R}^n$, com $D_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ uma curva
- $f : D_f \to \mathbb{R}$ com $Im(\gamma) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ uma função de várias variáveis.

Se γ é diferenciável em t_0 e f é diferenciável em $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$, onde t_0 é ponto interior de D_γ e $\mathbf{p}$ é ponto interior de D_f,
então $f \circ \gamma : D_\gamma \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t_0 e vale

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

- Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ é curva de nível, regular, que passa por $\mathbf{p}$ (i.e $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$), então $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \gamma'(t_0) = 0$: $\nabla f(\mathbf{p})$ é perpendicular à curva.
- Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ é curva regular, contida num conjunto de nível de f, ainda $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \gamma'(t_0) = 0$: $\nabla f(\mathbf{p})$ é perpendicular a (qualquer curva no) conjunto de nível.