1 Funções de várias variáveis - 3

1.1 Classes de derivabilidade e derivadas mistas

Definição. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$:

- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^k$ em A** ($f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas parciais até a ordem k existem e são contínuas em todo A.
- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em A** ($f \in \mathcal{C}^\infty(A)$) se f e todas suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas em todo A.

Já vimos que se A é aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A)$ então f é diferenciável em A.

Teorema (Teorema de Schwarz).
Seja A aberto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, **então** $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ **em** A.

Corolário.
Seja A aberto e $f \in \mathcal{C}^k(A)$, **então, em A, a ordem de derivação não importa para as derivadas até a ordem k.**

1.2 Teorema do valor médio e Polinômio de Taylor

Lembrete Cálculo 1: Teorema do valor médio.
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):
então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema (**Teorema do valor médio para funções de várias variáveis).**
Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.
Então existe $t \in (0, 1)$ tal que $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$.

Analogamente: $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ para algum $\mathbf{q}$ no segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$.

Algumas consequências:

- Seja $f \in \mathcal{C}^1(A)$ com $\nabla f \equiv 0$ em A, onde A é aberto e conexo por caminhos: **então f é constante em A.**
- Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$. Então $|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})| \leq C\|\mathbf{h}\|$, onde $C = max\{\|\nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})\|, \quad t \in [0, 1]\}$

Lembrete: Polinômio de Taylor em uma variável

- Se $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ é k vezes derivável em t_0,

$$T^k_{f,t_0}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!}(t - t_0)^j$$

é chamado **Polinômio de Taylor de ordem k, da função f, no ponto** t_0.

Teorema (P.d.T. com resto de Peano).
Se $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ é k vezes derivável em t_0, **então**

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - T^k_{f,t_0}(t)}{(t - t_0)^k} = 0\,.$$

Teorema (P.d.T. com resto de Lagrange).
Se $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ é $k+1$ vezes derivável em $V_\delta(t_0)$, para algum $\delta > 0$ então dado $t \in V_\delta(t_0) \setminus \{t_0\}$ existe $c_t \in (t_0, t)$ se $t > t_0$ (resp. $c_t \in (t, t_0)$ se $t < t_0$) tal que

$$f(t) - T^k_{f,t_0}(t) = \frac{f^{(k+1)}(c_t)}{(k+1)!}(t - t_0)^{k+1}\,.$$

Polinômio de Taylor para funções de várias variáveis:
Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

Defina $g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})$: (OBS: é $k+1$ vezes derivável em $[0,1]$).

Então

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= g(1) = T^k_{g,0}(1) + \frac{g^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}1^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \\ &= \text{“}T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) + E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})\text{”}\,, \end{aligned}$$

sendo $c \in (0,1)$.

Calculemos as derivadas:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \\ g'(t) &= \nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_i \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h})h_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_j h_i \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} f_{x_{i_1}x_{i_2}..x_{i_k}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_k} \end{aligned}$$

Para escrever de forma mais fácil o termo de ordem 2, defino a
Matriz Hessiana de f em $\mathbf{p}$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ \dots & f_{x_ix_j}(\mathbf{p}) & \dots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$). Assim

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\star)h_j h_i = H_f(\star)\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$$

Podemos então escrever os Polinônios de Taylor assim:

- $T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
- $T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{p})\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$
  $$T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$$
- ...
- $T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ =polin de grau até k, nas variáveis $h_1, .., h_n$, com coeficientes que dependem das derivadas de f de ordem até k, em $\mathbf{p}$.

Podemos escrever o Erro assim:

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \frac{g^{(k+1)}(c_{\mathbf{h}})}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_{k+1}} \ :$$

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} .. x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}-\mathbf{p}))(x-p)_{i_1} \dots (x-p)_{i_{k+1}} \ :$$

Esta expressão é o **resto na forma de Lagrange**: é calculado usando as derivadas (k+1)ésimas de f, em um ponto (incógnito) ao longo do segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}+\mathbf{h}$

Como $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que todas as derivadas (k+1)ésimas são limitadas em $\overline{B_\delta(\mathbf{p})}$, logo se $\|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})| \le C \, \|\mathbf{h}\|^{k+1}$$

concluímos

$$\frac{|E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^k} \to 0 \quad para \quad \|\mathbf{h}\| \to 0$$

$$\frac{|E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^k} \to 0 \quad para \quad \mathbf{x} \to \mathbf{p}$$

Esta expressão é o análogo do teorema do **resto na forma de Peano**.

Caso $n=2$: ponha $\mathbf{p}=(x,y)$, $\mathbf{h}=(r,s)$, $\mathbf{q}_t=\mathbf{p}+t\mathbf{h}=(x+tr,y+ts)$

$$\begin{array}{rcl} g(t) &=& f(\mathbf{q}_t) \\ g'(t) &=& \nabla f(\mathbf{q}_t)\cdot\mathbf{h} = f_x(\mathbf{q}_t)r + f_y(\mathbf{q}_t)s \\ g''(t) &=& H_f(\mathbf{q}_t)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = f_{xx}(\mathbf{q}_t)r^2 + 2f_{xy}(\mathbf{q}_t)rs + f_{yy}(\mathbf{q}_t)s^2 \\ g'''(t) &=& f_{xxx}(\mathbf{q}_t)r^3 + 3f_{xxy}(\mathbf{q}_t)r^2s + 3f_{xyy}(\mathbf{q}_t)rs^2 + f_{yyy}(\mathbf{q}_t)s^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g^{(k)}(t) &=& \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(\mathbf{q}_t)r^i s^{k-i} \end{array}$$

Alguns casos particulares uteis:

Teorema (**Caso** $k=1$)**.**
Seja A aberto, $f\in\mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{h}\in A$ para todo $t\in[0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &=& f(\mathbf{p})+\nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})h_jh_i \\ &=& f(\mathbf{p})+\nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}+\dfrac{1}{2}H_f(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}\,, \end{array}$$

sendo $c_{\mathbf{h}}\in(0,1)$.

Teorema (**Caso** $n=2$)**.**
Seja A aberto, $f\in\mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{h}\in A$ para todo $t\in[0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} f(x+r,y+s) &=& \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}\frac{\partial^j f}{\partial x^i\partial y^{j-i}}(x,y)r^is^{j-i}+ \\ && +\dfrac{1}{(k+1)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}\begin{pmatrix} k+1 \\ i \end{pmatrix}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i\partial y^{k+1-i}}(x+cr,y+cs)r^is^{k+1-i}\,, \end{array}$$

sendo $c\in(0,1)$ (depende de r,s).

Teorema (**Caso** $n=2,k=1$)**.**
Seja A aberto, $f\in\mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{h}\in A$ para todo $t\in[0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} f(x+r,y+s) &=& f(x,y)+f_x(x,y)r+f_y(x,y)s+ \\ && +\dfrac{1}{2}f_{xx}(x+cr,y+cs)r^2+f_{xy}(x+cr,y+cs)rs+\dfrac{1}{2}f_{yy}(x+cr,y+cs)s^2 \end{array}$$

sendo $c\in(0,1)$ (depende de r,s).

1.3 Formas quadráticas

Chamamos **Forma quadrática em n variáveis** uma função na forma

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}\,,$$

onde A é uma matriz simétrica $(n \times n)$ fixada.

Dizemos

- **a forma Q (a matriz A) é definida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a forma Q (a matriz A) é definida negativa**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a forma Q (a matriz A) é semidefinida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$
- **a forma Q (a matriz A) é semidefinida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$
- **a forma Q (a matriz A) é indefinida**
  se existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ e $Q(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} < 0$

Condição para $n = 2$: se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

- $det(A) = ac - b^2 > 0$ implica matriz definida: positiva se $a, c > 0$, negativa se $a, c < 0$
- $det(A) = ac - b^2 = 0$ implica matriz semidefinida: positiva se a *ou* $c > 0$, negativa se a *ou* $c < 0$ (ambas se $a = b = c = 0$)
- $det(A) = ac - b^2 < 0$ implica matriz indefinida

Se $n > 2$ difícil. Condição necessária e suficiente para ser definida:

- $det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff$ matriz definida positiva.
- $(-1)^k det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff$ matriz definida negativa.

onde A_k é a matriz $k \times k$ com as primeiras k linhas e k colunas de A.

1.4 Máximos e Mínimos

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in D$:

- p é **ponto de máximo global (absoluto) de f** se

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  – $f(p)$ é **máximo global (absoluto) de f**.

- p é **ponto de máximo local de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  – $f(p)$ é **máximo local de f**.

- p é **ponto de mínimo global (absoluto) de f** se

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  – $f(p)$ é **mínimo global (absoluto) de f**.

- p é **ponto de mínimo local de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  – $f(p)$ é **mínimo local de f**.

- p é **ponto extremal (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.

- p é **ponto crítico de f** se vale $\nabla f(p) = 0$.

- p é **ponto de sela de f** se for um ponto crítico mas nem máximo nem mínimo:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = 0 \text{ e } \forall\, \delta > 0 : \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ tais que } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p}) > f(\mathbf{y})$$

1.5 Máximos e Mínimos interiores (livres)

Teorema (**Análogo do T. de Fermat**).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p}$ ponto interior de D e ponto extremal
Se f é derivável em $\mathbf{p}$ na direção $\widehat{\mathbf{v}}$ **então** $D_{\widehat{\mathbf{v}}} f(p) = 0$.
Se f é derivável em $\mathbf{p}$ **então** $\nabla f(p) = 0$.

Consequências:

- *todo ponto extremal que seja ponto interior do domínio do gradiente é ponto crítico;*
- *se p é ponto interior do domínio do gradiente e $\nabla f(p) \neq 0$ então p não é ponto extremal.*

RESUMO: **Possíveis pontos extremais**:

- pontos *interiores do domínio do gradiente* que sejam *críticos*,
- pontos *onde f não é derivável*,
- ponto *na borda do domínio do gradiente*,
- pontos *onde f não é contínua*.

Teorema.
Se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$ e $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$ vale:
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é indefinida então $\mathbf{p}$ é ponto de sela
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida positiva então $\mathbf{p}$ é ponto de mínimo local
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida negativa então $\mathbf{p}$ é ponto de máximo local
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é semidefinida então nada podemos dizer

Mais em geral, de $H_f(\mathbf{p})$ podemos saber se, perto de $\mathbf{p}$, f está para cima do seu plano tangente em $\mathbf{p}$, para baixo dele, ou o cruza.

1.6 Máximos e Mínimos na fronteira (vinculados-condicionados)

Queremos procurar os **pontos extremais de uma função regular f em um conjunto C com fronteira regular:**

- **Extremais que sejam interiores a C**: devem ser criticos; discussão usando Hessiana.
- **Extremais que sejam na fronteira de C**: devem ser extremais para f restrita à fronteira de C; discussão usando a direção do gradiente:
  - mínimo para a restrição à fronteira e gradiente entrando em C: é mínimo
  - mínimo para a restrição à fronteira e gradiente saindo de C: não é nada
  - máximo para a restrição à fronteira e gradiente entrando em C: não é nada
  - máximo para a restrição à fronteira e gradiente saindo de C: é máximo

Método dos multiplicadores de Lagrange:

Procuro pontos extremais de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g(\mathbf{x}) = 0\}$, onde $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

Teorema.
Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g(\mathbf{x}) = 0\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e $\nabla g(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$,
então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$.

Multiplicadores de Lagrange com mais vínculos:

Procuro pontos extremais de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g_i(\mathbf{x}) = 0 : \; i = 1, .., k\}$, onde $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A) : \; i = 1, .., k$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

Teorema.
Sejam $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \; g_i(\mathbf{x}) = 0 : \; i = 1, .., k\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e os vetores $\nabla g_i(\mathbf{p}) : \; i = 1, .., k$ são linearmente independentes,
então existem $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{p})$.