1 $\mathbb{R}^n$, propriedades, topologia

Lembrete:

- Dados dois conjuntos A, B é dito **produto cartesiano de A com B** o conjunto
$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A\,,\ b \in B\}\,.$$

Em particular,

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$: podemos representar no plano.
- $\mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}$ **para** $i = 1, ..n\}$: se $n = 3$ posso representar no espaço, se $n > 3$ não podemos desenhar.

Notação:

- $\widehat{\mathbf{i}}_1 = (1, 0, ...0)$, $\widehat{\mathbf{i}}_2 = (0, 1, 0, ...0)$, ..., $\widehat{\mathbf{i}}_n = (0...0, 1) \in \mathbb{R}^n$ (versores canônicos)
(no caso $n = 2, 3$ indicaremos também por $\widehat{i}$, $\widehat{j}, \widehat{k}$)

Se $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ não é corpo, mas posso ver como **espaço vetorial com produto escalar** (**Espaço Euclidiano de dimensão n**):

- se $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos
  - $\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_i = y_i$ para todo $i = 1, ..., n$,
  - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$, (soma vetorial)
  - $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, .., x_n - y_n) \in \mathbb{R}^n$,
  - $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, .., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$, (múltiplo do vetor)
  - $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \in \mathbb{R}$, (produto escalar)
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}>}$ (norma)
  - $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (distância)
  - $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = acos\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)$ (ângulo)
  - $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ (perpendicularismo)

OBS: reveja as definições e propriedades de espaço vetorial, produto escalar, norma, distância: Guidorizzi ou livro de GA.

No caso $n = 3$ (e $n = 2$) podemos definir o **produto vetorial:**

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propriedades (veja ex 11 p 107 Guidorizzi):

- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$
- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ (antisimetria)
  – logo também $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$
- $(\lambda \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0 = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$. i.é, $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}$

Definições

Sejam $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ (in $\mathbb{R}$):

- **Bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}$;
- **Bola fechada de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $\overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta\}$;
- **Esfera de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $S_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta\}$.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{p}$ é dito **ponto interior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \subseteq A\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto exterior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \cap A = \emptyset\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de fronteira de A** se
$$\forall\, \delta > 0 \qquad \exists\, \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p}) \setminus A \qquad e \qquad \exists\, \mathbf{r} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A\,;$$

- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de acumulação de A** se
$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A \setminus \{\mathbf{p}\}\ .$$

Definimos

- A é dito um **conjunto aberto** se todo seu ponto é ponto interior;
- A é dito um **conjunto fechado** se seu complementar é aberto;
- A é dito um **conjunto limitado** se existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq B_\delta(\mathbf{0})$.
- **Vizinhança de $\mathbf{x}_0$** : um qualquer aberto que contenha $\mathbf{x}_0$

Teorema. *A é fechado $\iff$ A contém todo seu ponto de acum. $\iff$ A contém todo seu ponto de fronteira.*

Algumas notações

- ∂A: **fronteira de A** (conj. dos pontos de fronteira)
- $int(A)$: **interior de A** (conj. dos pontos interiores)
- $\overline{A}$: **fecho de A** (i.é, $A \cup \partial A$)
- A^c: **complementar de A**

Teorema (Bolzano-Weiestrass)**.** *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado e possui infinitos elementos então ele possui pelo menos um ponto de acumulação.*

2 Funções a valores vetoriais - curvas

Consideremos $D \subseteq \mathbb{R}$ e

$$f : D \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$$

2.1 Limites e continuidade

Seja p um ponto de acumulação de D, e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$,

- $\lim\limits_{t \to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ significa

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } t \in D \text{ e } 0 < |t - p| < \delta \text{ implica } \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$ dizemos que $\lim\limits_{t \to p} \mathbf{f}(t)$ não existe

Teorema.
$\lim\limits_{t \to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} \iff \lim\limits_{t \to p} f_i(t) = L_i$ *para* $i = 1, .., n$

Também podemos definir $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ como em cálculo 1.

Seja $p \in D$ e de acumulação para D

- dizemos que **f é contínua em** p, se

$$\lim_{t \to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(p)$$

- caso contrário, dizemos que f **é descontínua em** p,

(lembre que se $p \notin D$, *não se fala em continuidade ou descontinuidade*)

- se **f** é contínua em p para todo $p \in A$ dizemos **f é contínua em** A
- se **f** é contínua em p para todo $p \in D$ dizemos **f é contínua**

2.2 Definição de derivada

Seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D.

- **Se existir**
$$\lim_{t \to p} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(p)}{t - p} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R}^n \,,$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p ,**
  - **L é a derivada de f em p ;** notação: $\mathbf{f}'(p) := \mathbf{L}$.
- caso contrário, dizemos que
f não é derivável em p.

- se **f** é derivável em p para todo $p \in A$ dizemos **f é derivável em A**,
- se **f** é derivável em p para todo $p \in D$ dizemos **f é derivável**.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada de f** :

$$\mathbf{f}' : D_{\mathbf{f}'} \to \mathbb{R}^n : p \mapsto \mathbf{f}'(p)$$

onde $D_{\mathbf{f}'} = \{p \in D : \ p \text{ é de acumul. de } D \text{ e } \mathbf{f} \text{ é derivável em } p\}$

Vale:

- $\mathbf{f}$ é derivável em $p \iff f_i$ é derivável em p para todos $i = 1, .., n$
- se **f** é derivável em p então **o gráfico da reta**
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(p) + \mathbf{f}'(p)(t - p)$
é a reta tangente em $(p, \mathbf{f}(p))$ ao gráfico de f.
i.é, a única reta tal que $\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{r}(t)}{t - p} \to 0$ quando $t \to p$

Propriedades (regras de cálculo de derivadas):

Sejam, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : D \to \mathbb{R}$ deriváveis (com $D \subseteq \mathbb{R}$)
- $(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$
- $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}'$
- $(\lambda \mathbf{f})' = \lambda' \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}'$

Sejam, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : C \to D$ deriváveis (com $C, D \subseteq \mathbb{R}$)
- $[\mathbf{f} \circ \lambda)]'(t) = \mathbf{f}'(\lambda(t))\lambda'(t)$

2.3 Curvas

Definição

Chamamos **Curva em $\mathbb{R}^n$**: uma função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ onde I é intervalo.
Definimos:

- **Traço da curva**: a imagem
- **equação paramêtrica/vetorial da curva**: a lei

- Dizemos que a curva é **simples** se γ é injetora.
- Dizemos que a curva é **fechada** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Dizemos que a curva é **fechada simples** se fechada e $\gamma|_{[a,b)}$ injetora.

- Dizemos que a curva é *derivável* se γ é derivável

Seja $p \in I$: se γ é derivável em p e $\gamma'(p) \neq 0$ então

- $\gamma'(p)$ é um **vetor tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$
- $\widehat{\mathbf{t}}(p) = \gamma'(p)/\left\|\gamma'(p)\right\|$ é um **vetor unitário tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$.
- assim, o traço da curva(reta) $\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + \widehat{\mathbf{t}}(p)t$ é uma **reta tangente ao traço de γ** no ponto $\gamma(p)$.
- Dizemos que a curva é **regular** se γ é derivável e $\gamma' \neq 0$ em todo I: logo o traço possui reta tangente em todo ponto.

- *Interpretação cinemática*: $\gamma(t)$ pode representar o movimento de um corpo em $\mathbb{R}^n$: t representa o tempo e γ a posição. neste caso γ' é a velocidade vetorial, γ'' é a aceleração vetorial.
- Dizemos que a curva é **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $\|\gamma'\| = 1$ em todo ponto (traço percorrido com velocide 1).

2.4 Coordenadas polares no plano

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta)\,. \end{cases}$$

Cálculo de ρ e θ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Podemos usar para descrever curvas em $\mathbb{R}^2$:
a curva dada (em coordenadas polares) por $\rho(\theta) = f(\theta) \geq 0$, $\theta \in [a, b]$ é a curva de eq. paramétrica

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta)\,, \end{cases} \qquad \theta \in [a, b]\,.$$