**Notas do Curso de SMA-333 Cálculo III**

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos 1.o semestre de 2007

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho poderá servir como notas de aula para o cursos cuja ementa trata de seqüências é séries numéricas, seqüências é séries de funções, em particular, série de potências e de Fourier.

Aplicaremos séries de Fourier para a resolução de alguns problemas relacionados com algumas Equações Diferenciais Parciais, a saber, as Equações do Calor, da Onda e de Laplace, no caso periódico.

Serão exibidos todos os conceitos relacionados com o conteúdo acima, bem como propriedades e aplicações dos mesmos.

As referências ao final das notas poderão servir como material importante para o conteúdo aqui desenvolvido.

# Capítulo 2

# Seqüências Numéricas

$\boxed{\textbf{26.02 - 1.a aula}}$
$\boxed{\textbf{1.03 - 2.a aula}}$
$\boxed{\textbf{5.03 - 3.a aula}}$

## 2.1 Definições

Começaremos tratando das:

**Definição 2.1.1** *Uma* ***seqüência*** *de números reais (ou complexos) (ou seqüência numérica) é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccl} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \quad (ou\ \mathbb{C}) \\ & n & \mapsto & a(n) \end{array}$$

*isto é, uma lei que associa a cada número natural n um, único, número real (ou complexo) $a(n)$ que indicaremos por $a_n$.*

*Os elementos $a_n$ serão ditos* ***termos*** *da seqüência.*

*O conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ será dito* ***conjunto dos valores*** *da seqüência.*

*Denotaremos uma seqüência por: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$.*

**Exemplo 2.1.1**

1. $(a_n)$ *onde* $a_n \doteq \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$.

   *Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$.

2. $(a_n)$ *onde* $a_n \doteq 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

   *Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{0\}$.

3. $(a_n)$ *onde* $a_n \doteq sen(\dfrac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0,\ n\ par \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}},\ n\ ímpar \end{cases}$, $n = 1, 2, \cdots$.

   *Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{1, 0, -1\}$.

*4. $(a_n)$ onde $a_n \doteq n$, $n = 1, 2, \cdots$.*

*Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

*5. $(a_n)$ onde $a_n \doteq (-1)^n$, $n = 1, 2, \cdots$.*

*Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{1, -1\}$.

*6. $(a_n)$ onde $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$.*

*Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\}$.

*7. $(a_n)$ onde $a_n \doteq \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$.*

*Conjuntos dos valores da seqüência* $= \{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots\}$.

## 2.2 Operações com Seqüências

Como seqüências são funções a valores reais (ou complexos) podemos somá-las, multiplicá-las por números reais (ou complexos) de maneira semelhante a quaisquer funções, isto é,

**Definição 2.2.1** *Dadas as seqüências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) definimos a seqüência **soma** da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com a seqüência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como sendo:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

*ou seja, a seqüência soma é obtida somando-se os correspondentes termos de cada seqüência.*

*Definimos a seqüência **produto** do número real (ou complexo) $\alpha$ pela seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indicada por $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como sendo:*

$$\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

*ou seja, a seqüência é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada seqüência pelo número real (ou complexo).*

*Definimos a seqüência **produto** da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pela seqüência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indicada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como sendo:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

*ou seja, a seqüência é obtida multiplicando-se os correspondentes termos de cada uma das seqüências.*

*Se $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, definimos a seqüência **quociente** da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pela seqüência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indicada por $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como sendo:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \doteq (a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

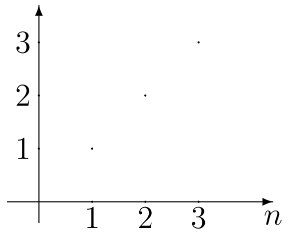
*ou seja, a seqüência é obtida dividindo-se os correspondentes termos de cada uma das seqüências (observe que $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).*

**Exemplo 2.2.1** *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são dadas por* $a_n \doteq \frac{1}{n}$, $b_n \doteq (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha = 2$ *então* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\dfrac{1+(-1)^n n)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$; $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\dfrac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}}$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\dfrac{(-1)^n)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}/(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\dfrac{1}{(-1)^n n})_{n\in\mathbb{N}}$.

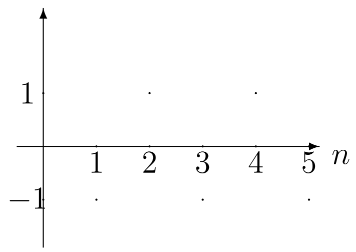
**Observação 2.2.1** *Como seqüências são funções a valores reais (ou complexos) podemos representar seus gráficos. Na verdade, isto não tem muito interesse no estudo das seqüências.*

**Exemplo 2.2.2**

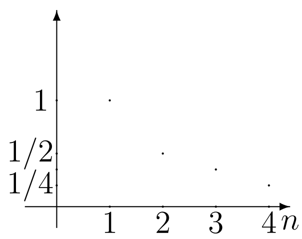
1. *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por* $a_n \doteq n$, $n \in \mathbb{N}$ *então seu gráfico será:*




2. *Se* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por* $b_n \doteq (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ *então seu gráfico será:*




3. *Se* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dada por* $a_n \doteq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então seu gráfico será:*




## 2.3 Convergência de Seqüências

**Observação 2.3.1** *Empiricamente, observando os exemplos acima temos:*

1. *No exemplo 1. os termos da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *crescem ilimitadamente quando* $n$ *cresce, ou ainda, os termos vão para "infinito" quando* $n$ *vai para "infinito".*

2. *No exemplo 2. os termos da seqüência* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oscilam entre* $-1$ *e* $1$, *quando* $n$ *cresce.*

3. *No exemplo 3. os termos da seqüência* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aproximam-se de zero quando* $n$ *cresce, isto é, os termos tendem a zero quando* $n$ *vai para infinito.*

*A seguir vamos formalizar esta última situação mais precisamente, ou seja, colocar de forma correta o conceito de "convergir" (ou "aproximar-se de", ou ainda "tender a").*

**Definição 2.3.1** *Diremos que uma seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* ***convergente*** *(ou converge, ou tende) para* $l \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) quando* $n$ *vai para infinito, escrevendo-se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ *(ou* $a_n \overset{n\to\infty}{\to} l$, *ou ainda simplesmente* $a_n \to l$*) se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$ *existir* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N_0$ *temos* $|a_n - l| < \varepsilon$.

**Observação 2.3.2**

1. *A definição acima nos diz, formalmente, que podemos ficar tão próximo de* $l$ *quanto se queira desde que o índice da seqüênica seja suficientemente grande.*

2. *Na linguagem dos intervalos a definição acima nos diz que dado o intervalo* $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *(ou seja* $\varepsilon > 0$*) , todos os termos da seqüênica caem dentro desse intervalo excetuando-se, eventualmente, os* $N_0$ *primeiros termos.*

3. *Em geral* $N_0$ *depende do* $\varepsilon > 0$ *dado inicialmente.*

$\boxed{\textbf{8.03 - 4.a}}$

**Proposição 2.3.1** *Se o limite existe ele deve ser único, isto é, se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_2$ *então* $l_1 = l_2$.

**Demonstração:**

Mostremos que para todo $\varepsilon > 0$ temos $|l_1 - l_2| < \varepsilon$, o que implica que $l_1 = l_2$.

Para isto temos que dado $\varepsilon > 0$ como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_1$ tem-se $|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

De modo análogo, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_2$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_2$ tem-se $|a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ temos

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \overset{(n\geq N_1 \text{ e } n\geq N_2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

completando a demosntração.

$\square$

**Exemplo 2.3.1**

1. *Mostremos que a seqüênica* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero, isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

   *Para isto observemos que dado* $\varepsilon>0$ *se tomarmos* $N_0\in\mathbb{N}$ *tal que* $N_0>\frac{1}{\varepsilon}$ *então, para* $n\geq N_0$ *teremos*

   $$|a_n-l|=|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}\overset{(n\geq N_0\geq 1)}{\leq}\frac{1}{N_0}<\varepsilon$$

   *mostrando a afirmação.*

2. *Mostremos que a seqüência* $(\frac{2n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para 2, isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$.

   *Para isto observemos que dado* $\varepsilon>0$ *se tomarmos* $N_0\in\mathbb{N}$ *tal que* $N_0>\frac{2}{\varepsilon}$ *então, para* $n\geq N_o$ *teremos*

   $$|a_n-l|=|\frac{2n}{n+1}-2|=|\frac{2n-2n-2}{n+1}|=|\frac{-2}{n+1}|=\frac{2}{n+1}\overset{(n+1\geq n\geq 1)}{\leq}\frac{2}{n}\overset{(n\geq N_0\geq 1)}{\leq}\frac{2}{N_0}<\varepsilon$$

   *mostrando a afirmação.*

3. *A seqüência* $(\cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente.*

   *De fato, observemos que* $\cos(n\pi)=(-1^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

   *Se a seqüênica fosse convergente para algum* $l\in\mathbb{R}$ *então dado* $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ *deveria existir um* $N_0\in\mathbb{N}$ *tal que para todo* $n\geq N_0$ *teríamos* $|(-1)^n-l|\frac{1}{2}$, *isto é,* $l-\frac{1}{2}<(-1)^n<l+\frac{1}{2}$ *o que úm absurdo pois isto implicaria que* $-1$ *e* $1$ *pertenceriam ao interavalo* $(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})$ *que tem comprimento* $1$ *(se* $-1$ *e* $1$ *estão no intervalo este deverá ter um comprimento maior ou igual a* $2$*) o que é um absurdo.*

   *Portanto a seqüênica não é convergente.*

4. *Seja* $(a_n)$ *tal que* $a_n=0,\underbrace{33\cdots 3}_{n-casas}$ *, isto é,* $a_1=0,3$, $a_2=0,33$, $a_3=0,333$, $\cdots$.

   *Então* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$.

   *De fato, dado* $\varepsilon>0$ *seja* $N_0\in\mathbb{N}$ *tal que* $N_0>\log\frac{1}{3\varepsilon}-1$, *ou seja,* $10^{N_0+1}>\frac{1}{3\varepsilon}$, *ou ainda* $\frac{1}{3\,10^{N_0+1}}<\varepsilon$ *temos:*

   *Com isso se* $n\geq N_0$ *temos que* $|a_n-\frac{1}{3}|=|0,\underbrace{3\cdots 3}_{n-casas}-\frac{1}{3}|=|\frac{0,\overbrace{9\cdots 9}^{n-casas}-1}{3}|$

   $=|-\frac{0,\overbrace{0\cdots 0}^{n-casas}1}{3}|=|\frac{\frac{-1}{10^{n+1}}}{3}|=\frac{1}{3\,10^{n+1}}\overset{(n\geq N_0\geq 1)}{<}\frac{1}{3\,10^{N_0+1}}<\varepsilon$ *como queríamos demonstrar.*

**Definição 2.3.2** *Diremos que uma seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* ***limitada*** *se existir* $M\in\mathbb{R}$ *tal que* $|a_n|\leq M$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

**Exemplo 2.3.2** *No exemplo (2.3.1) todas seqüências são limitadas.*
*Observemos que nem todas são convergentes (exemplo 3.).*

Como veremos a seguir existe uma relação entre seqüências convergentes e limitadas, a saber

**Proposição 2.3.2** *Toda seqüência convergente é limitada, isto é, se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente então ela será uma seqüência limitada.*

**Demonstração:**
Como a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente então existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|a_n - l| < \varepsilon$.

Em particular se $\varepsilon \doteq 1$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|a_n - l| < 1$ o que implica que, para $n \geq N_0$ temos que $-1 < a_n - l < 1$ ou, equivalentemente, $l - 1 < a_n < 1 + l$, ou seja, $-|l| - 1 < a_n < |l| + 1$, isto é, $|a_n| < |l| + 1$ para $n \geq N_0$.

Seja $M \doteq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0-1}|, |l| + 1\}$.

Como isto temos que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos mostrar.

□

**Observação 2.3.3** *A recíproca do resultado acima é falsa, isto é, nem toda seqüência limitada é convergente como mostra o item 3. do exemplo (2.3.1).*

A seguir temos algumas propriedades gerais para convergência de seqüênicas.

**Teorema 2.3.1** *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seqüências numéricas. Então:*

1. *Se as seqüências* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $a$ *e* $b$*, respectivamente, então a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $a + b$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.1}$$

*Vale os análogos para* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\dfrac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ *(neste último caso* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*), ou seja, são seqüências convergentes para* $a - b$, $a.b$ *e* $\dfrac{a}{b}$*, respectivamente, ou seja:*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.4}$$

2. *Se as seqüências* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $a$ *e* $b$*, respectivamente, e* $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$ *então* $a \leq b$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. *Se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero e a seqüência* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada então a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = 0.$$

4. *Suponhamos que as seqüências* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes para* $l$ *e a seqüência* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz:* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então a seqüência* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $l$.

**Demonstração:**

De **1.**:

Para (2.1):

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_1$ temos $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $n \geq N_2$ temos $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, tomando-se $N_0 \doteq \max\{N_1, N_2\}$ temos para $n \geq N_0$ que

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| \overset{(n\geq N_0\geq N_1 \text{ e } n\geq N_0\geq N_2)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ ou, equivalentemente, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

A demonstração de (2.2) é análoga e será deixada como exercício para para leitor.

Para (2.3):

Vamos supor que $a \neq 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, são convergentes elas são limitadas, em particular, $(b_n)$ é limtada logo existe $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se:
$n \geq N_1$ temos $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$;
$n \geq N_2$ temos $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$.

Seja $N_0 \doteq \max\{N_1, N_2\}$. Observemos que se $n \geq N_0$ então $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$ logo
$|(a_n.b_n)-(a.b)| = |(a_n-a)b_n+(b_n-b)a| \leq |a_n-a||b_n|+|b_n-b||a| < |a_n-a|M+|b_n-b||a| < \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2|a|}|a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
mostrando que $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = a.b$ ou, equivalentemente, $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$.

Se $b \neq 0$ podemos fazer uma demonstração semelhante.

Se $a = b = 0$ então temos que dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se:
$n \geq N_1$ temos $|a_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}$;
$n \geq N_2$ temos $|b_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}$.

Seja $N_0 \doteq \max\{N_1, N_2\}$. Observemos que se $n \geq N_0$ então $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$ logo

$$|(a_n.b_n) - a.b| = |a_n.b_n| = |a_n||b_n| < \sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = 0$ ou, equivalentemente, $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$.

A demonstração de (2.4) é semelhante e será deixada como exercício.

De **2.**:

Suponhamos, por absurdo, que $a > b$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Logo, dado $\varepsilon \doteq \dfrac{a-b}{2} > 0$, existem $N_1$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

Se $n \geq N_1$ então $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a-b}{2}$, ou seja $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ o que implica que $-\dfrac{a-b}{2} + a < a_n < \dfrac{a-b}{2} + a$, em particular $\dfrac{a+b}{2} < a_n$ se $n \geq N_1$.

Se $n \geq N_2$ então $|b_n - b| < \varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ , ou seja $-\varepsilon < b_n - b < \varepsilon$ o que implica que $-\dfrac{a-b}{2} + b < b_n < \dfrac{a-b}{2} + b$, em particular $b_n < \dfrac{a+b}{2}$ se $n \geq N_2$.

Logo, se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ temos que $b_n < \dfrac{a+b}{2} < a_n$, isto é, $b_n < a_n$ se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, o que é um absurdo pois, por hipótese, $a_n \leq b_n$ para todo $\in \mathbb{N}$.

De **3.**:

Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada , existe $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergete para zero, logo dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se: $n \geq N_0$ temos $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Logo, dado dado $\varepsilon > 0$ se $n \geq N_0$ temos

$$|a_n.b_n - 0| = |a_n||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}M < \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = 0$.

De **4.**:

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1$, $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que se:
$n \geq N_1$ temos $|a_n - l| < \varepsilon$, o que implica que $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$;
$n \geq N_2$ temos $|b_n - l| < \varepsilon$ o que implica que $-\varepsilon < b_n - l < \varepsilon$.

Logo se tomarmos $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ temos, para $n \geq N_0$ que

$$-\varepsilon < a_n - l \leq c_n - l \leq b_n - l < \varepsilon, (\text{pois } a_n \leq c_n \leq b_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N})$$

ou seja $-\varepsilon < c_n - l < \varepsilon$ ou, equivalentemente, $|c_n - l| < \varepsilon$, mostrando que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

□

**Observação 2.3.4**

1. *O item 2. da proposição acima é conhecido como o* **teorema da comparação** *para seqüências.*

2. *Uma seqüência que tem limite zero é dita* **infinitésimo***. Com isto o item 3. da proposição acima pode ser resumido como: "o produto de uma seqüência que é um infinitésimo por uma seqüência limitada é um infinitésimo".*

3. *O item 4. da proposição acima é conhecido como o* **teorema do sanduiche** *para seqüências.*

**Exemplo 2.3.3** *Mostremos que* $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas})=0.$

*Para isto observemos que*

$$a_n \doteq 0 \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas} \overset{\begin{pmatrix} n+1\geq n \\ n+2\geq n \\ \cdots \\ 2n\geq n \end{pmatrix}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{(n+1)-parcelas}$$
$$= \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \doteq b_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

*Como* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *segue do teorema (4.5.2) item 4. (teorema do sanduiche) que* $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1)-parcelas})=0.$

**Observação 2.3.5** *Vale observar que no exemplo acima não podemos aplicar a propriedade de soma de limites, isto é, limite da soma é a soma dos limites pois o número de parcelas aumenta quando $n$ aumenta.*

*Observemos que para:*

$n=1$ *(duas parcelas)* $\Rightarrow a_1=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}$
$n=2$ *(três parcelas)* $\Rightarrow a_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$
$n=3$ *(quatro parcelas)* $\Rightarrow a_3=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}$
*e assim por diante .*

Um resultado bastante importante no estudo da convergência de seqüências é o que relaciona limites de seqüências com limites no infinito de funções reais de uma variável real, a saber:

**Teorema 2.3.2** *Seja que* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. *Suponhamos que* $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$. *Então a seqüência* $(a_n)_{n\in N}$, *onde* $a_n\doteq f(n)$, $n\in\mathbb{N}$ *é convergente para* $l$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

**Demonstração:** A demonstração é imediata.

□

**Observação 2.3.6** *Observemos que* **NÃO** *podemos aplicar as regras de L'Hôpital para seqüências.*

*Porém podemos utilizar o resultado acima para estudar o limite de funções de variável real no infinito (utilizando, se possível, a regra de L'Hôpital) e assim tirar conclusões para o limite de seqüências como veremos em alguns exemplos a seguir.*

**Exemplo 2.3.4**

1. *Calculemos* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

   *Para isto observemos que se* $f(x)\doteq\frac{1}{x^2}$, $x>0$ *então* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. *(visto no Cálculo I).*

   *Sendo* $a_n\doteq\dfrac{1}{n^2}=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, *segue, do teorema acima, que* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, *ou seja* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

2. *Estudemos a convergência da seqüência* $(\dfrac{n}{e^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

   *Se definirmos* $f(x)\doteq\dfrac{x}{e^x}$, $x>0$ *então temos que* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{(\frac{\infty}{\infty}:\ L'Hôpital)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ *(o último limite foi tratado em Cálculo I).*

   *Sendo* $a_n\doteq\dfrac{n}{e^n}=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, *segue, do teorema acima, que* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, *ou seja* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}=0$.

3. *A seqüência* $((1+\dfrac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para e (número de Euler).*

   *De fato, se considerarmos* $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$, $x>0$ *então segue, do 2.o limite fundamental, que* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e$.

   *Sendo* $a_n\doteq(1+\frac{1}{n})^n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, *segue, do teorema acima, que* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e$, *ou seja* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

4. *A seqüência* $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $0$ *se* $0\leq r<1$ *e divergente se* $r\geq 1$.

   *De fato, se* $r=0$ *nada temos a fazer.*

   *Se* $r>0$ *observamos que* $r^n=e^{n\ln r}$, $n\in\mathbb{N}$ *assim se* $0<r<1$ *temos que* $\ln r<0$, *logo a seqüência é convergente para zero (pois* $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln r}=0$*).*

   *Se* $r>1$ *então* $\ln r>0$ *logo a seqüência será divergente (pois neste caso* $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln r}=\infty$*).*

**Observação 2.3.7**

1. *O resultado acima* **NÃO** *garante que se* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ *não existe então* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ *não existe, onde* $a_n\doteq f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, *como mostra o exemplo:*

   *Se* $f(x)=sen(\pi x)$, $x\in\mathbb{R}$ *então* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ *não existe. porém se* $a_n=f(n)=sen(\pi n)=0$, $n\in\mathbb{N}$ *assim* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, *ou seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

2. *Todos os resultados anteriores permanecem verdadeiros se substituirmos a hipótese "$n \in \mathbb{N}$" por "$n \geq N_0$".*

   *Por exemplo, no teorema 4.5.2 item 2. se trocarmos a hipótese: "$a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$" por "$a_n \leq b_n$, $n \geq N_0$" o resultado continua válido, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

**12.03 - 5.a**

**Observação 2.3.8** *Como vimos anteriormente toda seqüência convergente é limitada, mas* **não** *vale a recíproca.*

*A questão que poderíamos colocar é: além de ser limitada, que propriedade(s) uma seqüência poderia ter para que fosse convergente?*

*A seguir introduziremos uma nova classe de seqüências que nos ajudarão a responder essa pergunta.*

## 2.3.1 Seqüências Monótonas

**Definição 2.3.3** *Diremos que uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é:*

1. ***Crescente*** *se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

2. ***Decrescente*** *se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

3. ***Estritamente crescente*** *se $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

4. ***Estritamente decrescente*** *se $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

*Se for de um dos tipos acima ela será dita* ***monótona****.*

**Exemplo 2.3.5**

1. *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ é estritamente crescente (portanto monótona) pois $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2. *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ é estritamente decrescente (portanto monótona) pois $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \overset{(n+1>n)}{<} \dfrac{1}{n} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

3. *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \cos(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$* **não** *é monótona ($a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$).*

4. *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ é estritamente decrescente (portanto monótona) pois $2^{n+1} > 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ logo $a_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2^n} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Observação 2.3.9**

1. *Podemos estudar a monotonicidade de seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *estudando-se o quociente* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *(se* $a_n \neq 0$*, para* $n \in \mathbb{N}$*) observando que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se, e somente se a seqüência é crescente (analogamente trocando-se "*$\geq$*" por "*$>$*" e "crescente" por " estritamente crescente"), se* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Ou ainda* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se, e somente se a seqüência é decrescente (analogamente trocando-se "*$\leq$*" por "*$<$*" e "decrescente" por " estritamente decrescente"), se* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *O caso em que* $a_n < 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é semelhante aos tratados acima.*

   *Conclusão: ela será monótona se, e somente se, ou* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *ou* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, supondo que* $a_n > 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *ou* $a_n < 0$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

2. *Podemos, quando possível, estudar a monotinicidade de uma seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *estudando-se a monotonicidade de uma função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *tal que* $a_n = f(n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Por exemplo se a função* $f$ *é crescente (isto é,* $f(x) \geq f(y)$ *para todo* $x \geq y \geq 0$*) então a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $a_n \doteq f(n), n \in \mathbb{N}$ *será crescente. De modo análogo para os outros casos.*

3. *Pode ocorrer de a função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ **não** *ser monótona mas a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = f(n)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *ser, como mostra o seguinte exemplo: se* $f(x) = sen(\pi x)$*,* $x \geq 0$ *então* $f$ *não é monótona mas a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = f(n) = sen(n\pi) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é monótona (pois* $a_{n+1} \geq a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

**Exemplo 2.3.6**

1. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = \frac{-n}{n+1}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *é estritamente decrescente.*

   *De fato, pois* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-(n+1)}{(n+1)+1}}{\frac{-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2} > 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Como* $a_n < 0, n \in \mathbb{N}$ *temos que* $a_{n+1} < a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Logo a seqüência é estritamente decrescente, logo monótona.*

2. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = \frac{2n}{3n+2}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *é estritamente crescente.*

   *De fato, pois* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{3(n+1)+2}}{\frac{2n}{3n+2}} = \frac{2n+2}{3n+5}\frac{3n+2}{2n} = \frac{6n^2+10n+4}{6n^2+10n} = 1+\frac{4}{6n^2+10n} > 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Como* $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$ *temos que* $a_{n+1} > a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Logo a seqüência é estritamente crescente, logo monótona.*

3. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ *é estritamente decrescente.*

   *De fato, se considerarmos* $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$, $x \geq 1$ *então temos que* $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+2}(x+2) - \ln(x+2).1}{(x+2)^2} = \dfrac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2} < 0$ *se* $x \geq 1$ *(observemos que se* $x \geq 1$ *então* $x+2 > e$ *e assim* $\ln(x+2) > 1$ *ou* $1 - ln(x+2) < 0$*).*

   *Logo, como* $f'(x) < 0$ *para* $x \geq 1$ *temos que* $f$ *é estritamente decrescente implicando que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente decrescente (pois* $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$*).*

A seguir vamos mostrar que se uma seqüência é monótona e limitada então ela será convergente. Para isto precisamos introduzir alguns conceitos importantes que são:

### 2.3.2 Supremo e Ínfimo de Seqüências

**Definição 2.3.4** *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio.*

1. *Diremos que* $A$ *é* ***limitado superiormente*** *se existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq c$ *para todo* $a \in A$.

   *O número* $c$ *acima será dito* ***limitante superior*** *do conjunto* $A$.

2. *Diremos que* $A$ *é* ***limitado inferiormente*** *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \geq d$ *para todo* $a \in A$.

   *O número* $d$ *acima será dito* ***limitante inferior*** *do conjunto* $A$.

Vejamos os exemplos a seguir:

**Exemplo 2.3.7**

1. *Se* $A = (0, \infty)$ *então* $A$ *é limitado inferiormente pois, por exemplo,* $-1$ *é um limitante inferior (*$-1 \leq a$ *, para todo* $a \in A$*).*

   *$A$ não é limitado superiormente.*

2. *Se* $A = (-1, \pi) \cup \{50\}$ *então* $A$ *é limitado inferiormente e superiormente pois, por exemplo,* $-3$ *é um limitante inferior (*$-3 \leq a$ *, para todo* $a \in A$*) e* $100$ *é um limitante superior (*$a \leq 100$ *, para todo* $a \in A$*).*

**Observação 2.3.10**

1. *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$*, não vazio.* $A$ *é limitado (isto é, existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a| \leq M$ *, para todo* $a \in A$*) se, e somente se,* $A$ *é limitado superiormente e inferiormente.*

   *De fato,* $A$ *é limitado então existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a| \leq M$ *, para todo* $a \in A$*, ou seja,* $-M \leq a \leq M$*, para todo* $a \in A$*, assim* $-M$ *é um limitante inferior e* $M$ *é um limitante superior, portanto* $A$ *é limitado superiormente e inferiormente.*

   *Reciprocamente, se* $A$ *é limitado superiormente e inferiormenteentão existe* $c \in \mathbb{R}$ *e* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $d \leq a \leq c$*, para todo* $a \in A$.

*Se tomarmos* $M = \max\{|c|, |d|\}$ *então, para todo* $a \in A$ *temos* $a \leq c \leq |c| \leq M$ *e* $a \geq d \leq -|d| \leq -M$, *assim* $-M \leq a \leq M$, *para todo* $a \in A$, *ou seja,* $|a| \leq M$, *para tod* $a \in A$ *implicando que* $A$ *é limitado.*

2. *No exemplo 1. acima temos que qualquer elemento do conjunto* $(-\infty, 0]$ *é um limitante inferior. Ou seja, existe um "maior limitante inferior", no caso* $0$.

   *No exemplo 2. acima temos que qualquer elemento do conjunto* $(-\infty, -1]$ *é um limitante inferior e qualquer elemento do conjunto* $[50, \infty)$ *é um limitante superior. Ou seja, existe um "menor limitante superior", no caso* $50$ *e existe um "maior limitante inferior", no caso* $-1$.

   *Tais valores, quando existirem, serão denominados* ***ínfimo*** e ***supremo*** *do conjunto. Mais claramente, temos a:*

**Definição 2.3.5** *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$, *não vazio, limitado inferiormente (superiormente). Diremos que* $l \in \mathbb{R}$ *é o* ***ínfimo*** *(**supremo**) do conjunto* $A$, *indicado por* $\inf(A)$ $(\sup(A))$, *se:*

*i)* $l$ *é um limitante inferior (superior) de* $A$;

*ii)* $l$ *é maior (menor) com essa propriedade, isto é, se* $m$ *é um limitante inferior (superior) de* $A$ *então* $m \leq l$ $(m \geq l)$.

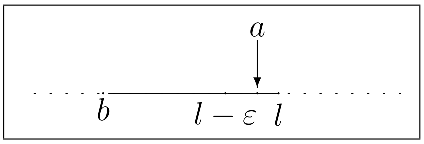
**Observação 2.3.11**

1. *Podemos ver a definição acima da seguinte maneira:* $l = \inf(A)$ *se, e somente se,* $l$ *é o maior limitante inferior de* $A$ *(analogamente,* $l = \sup(A)$ *se, e somente se,* $l$ *é o menor limitante superior de* $A$*).*

2. *Temos que* $\sup A = l$ $(\inf A = l)$*se, e somente se,*

   *i)* $l$ *é um limitante superior (inferior) de* $A$;

   *ii) Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $a \in A$ *tal que:* $l - \varepsilon < a$ $(a < l + \varepsilon)$.




3. *Para a existência do* inf *e do* sup *de um subconjunto da reta temos o* ***Axioma do completamento*** *que diz: Todo subconjunto dos números reais limitado inferiormente (superiomente) admite ínfimo (supremo)".*

**Exemplo 2.3.8**

1. *Se* $A = [a, b]$ *então* $\inf(A) = a$ *e* $\sup(A) = b$. *Observemos que neste caso* $\inf(A) \in A$ *e* $\sup(A) \in A$.

2. *Se* $A = [a, b)$ *então* $\inf(A) = a$ *e* $\sup(A) = b$. *Observemos que neste caso* $\inf(A) \in A$ *e* $\sup(A) \notin A$.

3. *Se* $A = (a, b)$ *então* $\inf(A) = a$ *e* $\sup(A) = b$. *Observemos que neste caso* $\inf(A) \notin A$ *e* $\sup(A) \notin A$.

4. *Se* $A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ *então* $\inf(A) = -\sqrt{2}$ *e* $\sup(A) = \sqrt{2}$. *Observemos que neste caso* $\inf(A) \notin A$ *e* $\sup(A) \notin A$ *(pois* $-\sqrt{2}$ *e*$\sqrt{2}$ *não são um números racionais).*

5. *Se* $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ *então* $\inf(A) = 0$ *e* $\sup(A) = 1$. *Observemos que neste caso* $\inf(A) \notin A$ *e* $\sup(A) \in A$.

   *Observemos, ainda neste exemplo, que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *é estritamente decrescente e* $\inf(A) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *e* $\sup(A) = 1 = a_1$. *Isto, como veremos, vale em situações mais gerais.*

Agora estamos em condições de apresentar o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.3** *Toda seqüência limitada e monótona é convergente. Além disso, se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente (ou estritamente crescente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$ *e se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente (ou estritamente decrescente) então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(A)$*, onde* $A$ *é o conjunto dos valores da seqüência.*

**Demonstração:**

Vamos considerar o caso em que a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Os outros casos serão deixados como exercício.

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada o conjunto, $A$, dos valores da seqüência será limitado, logo limitado superiomente, portanto admite supremo, isto é, existe $l = \sup(A)$.

Afirmamos que a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $l$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

De fato, como $l = \sup(A) = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l - \varepsilon < a_{N_0} \leq l$.

Mas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente, isto é, $a_{N_0} \leq a_n$ para todo $n \geq N_0$ logo $l - \varepsilon < a_{N_0} \leq a_n \leq l$ para todo $n \geq N_0$ (a última desigualdade segue do fato que $l$ é o supremo, portanto um limitante superior do conjunto $A$).

Logo, para $n \geq N_0$ temos $l - \varepsilon < a_n \leq l < l + \varepsilon$, ou seja, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ ou, equivalentemente, $|a_n - l| < \varepsilon$.

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = \sup(A)$ como queríamos demonstrar.

□

**Observação 2.3.12** *O resultado acima nos dá uma condição suficiente (mas não necessária) para que uma seqüência limitada seja convergente (ser monótona).*

**Exemplo 2.3.9**

1. *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ *é convergente para zero, isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

   *Para isto mostremos, primeiramente, que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona e limitada, portanto convergente, e depois mostraremos que ela converge para zero.*

**(i)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente.*

*Para isto observemos que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}==\frac{2^{n+1}.n!}{2^n(n+1)!}=\frac{2}{n+1}\overset{(n+1\geq 2)}{\leq}2\,\frac{1}{2}=1,\ \textit{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

*Como* $a_n>0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$ *segue que* $a_{n+1}\leq a_n$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$*, ou seja, a seqüência é decrescente.*

**(ii)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

*Como* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente e* $a_n>0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$ *seque que* $0<a_n\leq a_1=2$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*, ou seja* $|a_n|\leq 2$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*. Portanto limitada.*

*Logo, do teorema 4.5.1, segue que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e, como ela é decrescente, temos que* $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n:n\in\mathbb{N}\}=\inf\{\frac{2^n}{n!}:n\in\mathbb{N}\}=0.$

*Um outro modo de encotrarmos o limite da seqüência acima é o seguinte:*

*Seja* $l=\lim_{n\to\infty}a_n$.

*Então* $l=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}=(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n})(\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!})=0.l=0.$

2. *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_1=\sqrt{2}$*,* $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}},\cdots,a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$*,* $n\in\mathbb{N}$ *é convergente para 2, isto é,* $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

   *Para isto mostremos, primeiramente, que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e monótona , portanto convergente, e depois mostraremos que ela converge para 2.*

   **(i)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada. Na verdade mostraremos que* $0<a_n\leq 2$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$ *(o que implicará que* $|a_n|\leq 2$ *, para todo* $n\in\mathbb{N}$*, logo é limitada).*

   *Para isso usaremos indução matemática, isto é, precisaremos mostrar que:*

   **(a)** *a propriedade é válida para* $n=1$*;*

   **(b)** *se a propriedade for válida para* $n=k-1$ *será válida para* $n=k$*.*

   *Mas*

   **(a)** *a propriedade é válida para* $n=1$*, pois* $0<a_1=\sqrt{2}\leq 2$*.*

   **(b)** *se a propriedade for válida para* $n=k-1$*, isto é, se* $0<a_{k-1}\leq 2$*, então será válida para* $n=k$*.*

   *De fato, pois* $0<a_k\overset{(def.\ a_k)}{=}\sqrt{2a_{k-1}}\overset{(a_{k-1}\leq 2)}{\leq}\sqrt{2.2}=2$*, mostrando que a propriedade é válida para* $n=k$*.*

   *Assim segue da indução matemática, que* $0<a_n\leq 2$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$*, ou seja, a seqüência é limitada.*

   **(ii)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente.*

*Para isto observemos que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_n})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} \overset{(0<\sqrt{a_n}\leq 2)}{\geq} 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Como* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *segue que* $a_{n+1} \geq a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, ou seja, a seqüência é crescente.*

*Logo, do teorema 4.5.1, segue que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

*Seja* $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$*. Então*

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_{n-1}} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2l},$$

*ou seja* $l^2 = 2l$ *o que implica que ou* $l = 0$ *(que é um absurdo pois a seqüência é crescente e* $a_1 = \sqrt{2} > 0$*) ou* $l = 2$*.*

*Logo* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$*.*

*Observemos que* $a_1 = 2^{\frac{1}{2}}$*,* $a_2 = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, \cdots, a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Como* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ *é uma P.G. (progressão geométrica) de razão* $r = \frac{1}{2}$ *cujo primeiro termo é* $a_1 = \frac{1}{2}$ *sabemos que a soma da mesma será* $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$*. Logo* $\lim_{n\to\infty} a_n = 2^1 = 2$*.*

3. *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_1 = \sqrt{2}$*,* $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *é convergente para 2, isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$*.*

   *Para isto mostremos, primeiramente, que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona e limitada , portanto convergente, e depois mostraremos que ela converge para 2.*

   **(i)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente, isto é,* $a_n \leq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

   *Para isso usaremos indução matemática.*

   **(a)** *a propriedade é válida para* $n = 1$*, pois* $a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$*, portanto* $a_1 \leq a_2$*.*

   **(b)** *se a propriedade for válida para* $n = k-1$*, isto é, se* $a_{k-1} \leq a_k$ *então será válida para* $n = k$*.*

   *De fato, pois* $a_k \overset{(def.\ a_k)}{=} \sqrt{2+a_{k-1}} \overset{(a_{k-1}\leq a_k)}{\leq} \sqrt{2+a_k} = a_{k+1}$*, mostrando que a propriedade é válida para* $n = k$*.*

   *Assim segue da indução matemática que a seqüência é crescente.*

   **(ii)** *Mostremos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz* $0 < a_n \leq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(implicando que ela é limitada).*

   *Para isso usaremos indução matemática novamente.*

   **(a)** *a propriedade é válida para* $n = 1$*, pois* $0 < a_1 = \sqrt{2} \leq 2$*.*

**(b)** *se a propriedade for válida para* $n = k-1$, *isto é, se* $0 < a_{k-1} \leq 2$ *então será válida para* $n = k$.

*De fato, pois* $a_k \overset{(def.\ a_k)}{=} \sqrt{2 + a_{k-1}} \overset{(a_{k-1} \leq 2)}{\leq} \sqrt{2+2} = 2$, *mostrando que a propriedade é válida para* $n = k$.

*Assim segue da indução matemática que a seqüência é limitada.*

*Logo, do teorema 4.5.1, segue que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

*Seja* $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Então*

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2 + l},$$

*ou seja* $l^2 = 2 + l$ *o que implica que ou* $l = -1$ *(que é um absurdo pois a seqüência é crescente e* $a_1 = \sqrt{2} > 0$*) ou* $l = 2$.

*Logo* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

**15.03 - 6.a**

Alguns tipos de seqüências que são divergentes podem ser importantes como veremos a seguir.

## 2.4 Seqüências Divergentes

**Definição 2.4.1** *Diremos que uma seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***diverge para*** $\infty$ *(*$-\infty$*) se dado* $K > 0$ *existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N_0$ *temos* $a_n \geq K$ *(*$a_n \leq -K$*).*

*Neste caso escreveremos* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\, (-\infty)$.

**Exemplo 2.4.1**

1. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ *é divergente para* $\infty$, *isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   *De fato, dado* $K > 0$ *seja* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $N_0 > K$. *Se* $n \geq N_0$ *temos que* $a_n = n \geq N_0 \geq K$, *mostrando que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $a_n = \dfrac{1-n^3}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *é divergente para* $-\infty$, *isto é,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

   *De fato, dado* $K > 0$ *seja* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $N_0 > K + 1$. *Se* $n \geq N_0$ *temos que*

$$a_n = \frac{1-n^3}{1+n^2} \overset{(1\leq n^2)}{\leq} \frac{n^2-n^3}{1+n^2} \overset{(n^2+1\geq n^2)}{\leq} \frac{n^2-n^3}{n^2} = 1 - n \overset{(n\geq N_0)}{<} 1 - N_0 < -K,$$

   *mostrando que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Semelhantemente com o caso de convergência, podemos estudar a divergência de uma seqüência para $\infty$ $(-\infty)$ olhando o comportamento de uma função real que a define, mas claramente temos ”:

**Proposição 2.4.1** *Suponhamos que $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\,(-\infty)$. Então a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n \doteq f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ é divergente para $\infty$ $(-\infty)$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(-\infty)$.*

**Demonstração:** Será deixada como exercício.

$\square$

**Exemplo 2.4.2**

1. *No exercício 2.4.1 item 2. se tomarmos $f(x) \doteq \dfrac{1-x^3}{1+x^2}$, $x \geq 0$ então temos que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^3}{1+x^2} \overset{(\frac{-\infty}{\infty}:\ L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}(1-x^3)}{\frac{d}{dx}(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2}{2} = -\infty$.

   *Como $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ temos, pela proposição acima, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.*

2. *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$ é divergente para $\infty$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

   *De fato, se tomarmos $f(x) \doteq \dfrac{3^x}{x^3}$, $x \geq 0$ então temos que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{x^3} \overset{(\frac{\infty}{\infty}:\ L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}3^x}{\frac{d}{dx}x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x\ln(3)}{3x^2} \overset{(\frac{\infty}{\infty}:\ L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}(3^x\ln(3))}{\frac{d}{dx}(3x^2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x(\ln 3)^2}{6x} \overset{(\frac{\infty}{\infty}:\ L'Hôpital)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}(3^x(\ln 3)^2)}{\frac{d}{dx}(6x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x(\ln 3)^3}{6} = \infty$.

   *Como $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ temos, pela proposição, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

**Observação 2.4.1**

1. *Se a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (decrescente) e não é limitada então ela diverge para $\infty$ $(-\infty)$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\,(-\infty)$.*

2. *Outra classe de seqüências divergentes são as **oscilatórias** que são aquelas que são divergentes mas não divergem nem para $\infty$ e nem para $-\infty$, como por exemplo, a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Temos um teorema da comparação para seqüência divergentes para $\infty$ $(-\infty)$, a saber,

**Teorema 2.4.1** *Suponhamos que as seqüências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem: $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Então:*

1. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.*

2. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

**Demonstração:**

De **1.**:

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ então dado $K > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos que $a_n \geq K$.

Assim, se $n \geq N_0$ temos $b_n \geq a_n > K$, mostrando que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

De modo análogo mostra-se 2 (exercício para o leitor).

□

**Exemplo 2.4.3** *Mostremos que a seqüência* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $b_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *é divergente para* $\infty$*, isto é,* $\lim_{n\to\infty} (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas}) = \infty$.

*Para isto, observemos que*

$$b_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas} \overset{\begin{pmatrix} n \leq 2n \\ n+1 \leq 2n \\ \vdots \\ 2n-1 \leq 2n \end{pmatrix}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{(n+1)-parcelas} = \frac{n+1}{\sqrt{2n}} =$$

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \doteq a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $a_n \leq b_n$*,* $n \in \mathbb{N}$.

*Mas* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, logo, pela proposição acima item 1., segue que* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

## 2.5 Subseqüências de uma Seqüência

**Definição 2.5.1** *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência e* $A \doteq \{n_1, n_2, \cdots\}$ *subconjunto infinito dos numeros naturais satisfazendo* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

*Como isto podemos construir a seqüência* $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *(isto é, consideramos a restrição* $a_{|_A} : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*). Tal seqüência será denominada* ***subseqüência*** *da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exemplo 2.5.1**

1. *Consideremos a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_n = sen(n\frac{\pi}{2})$*,* $n \in \mathbb{N}$.

   *Então se considerarmos só os índices ímpares* ($n_i \doteq 2i+1$, $i \in \mathbb{N}$) *obteremos a subseqüência* $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ *da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*:* $(sen(2i+1)\frac{\pi}{2}))_{i\in\mathbb{N}} = ((-1)^i)_{i\in\mathbb{N}} (= -1, 1, -1, \cdots)$.

   *Se considerarmos só os índices pares* ($n_i \doteq 2i$, $i \in \mathbb{N}$) *obteremos a subseqüência* $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ *da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*:* $(sen(2i\pi))_{i\in\mathbb{N}} = (0)_{i\in\mathbb{N}} (= 0, 0, 0, \cdots)$.

2. *Consideremos a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Então se considerarmos só os índices ímpares* ($n_i \doteq 2i+1$, $i \in \mathbb{N}$) *obteremos a subseqüência* $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ *da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}} = (2i+1)_{i\in\mathbb{N}}\,(= 1, 3, 5, 7, \cdots)$.

   *Se considerarmos só os índices pares* ($n_i \doteq 2i$, $i \in \mathbb{N}$) *obteremos a subseqüência* $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ *da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}} = (2i)_{i\in\mathbb{N}}\,(= 2, 4, 6, \cdots)$.

Um resultado importante no estudo da convergência de seqüências utilizandos-e subseqüências é dado pelo:

**Teorema 2.5.1**

1. *Se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$ *então toda subseqüência sua será convergente para* $\underline{a}$. *Em particular, se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$ *então para todo* $k_0 \in \mathbb{N}$, *a subseqüência* $(a_{n+k_0})_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para* $\underline{a}$.

2. *Toda seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subseqüência monótona.*

3. *Toda seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada possui uma subseqüência convergente.*

4. *Se toda subseqüência da seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para* $\underline{a}$ *então a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será convergente para* $\underline{a}$.

**Demonstração:**

De 1.:

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ então dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos que $|a_n - a| < \varepsilon$.

Logo se $n_i \geq N_0$ tenos que $|a_{n_i} - a| < \varepsilon$ mostrando que $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = a$.

Observemos que para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, $(a_{n+k_0})_{n\in\mathbb{N}}$ será subseqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logo convergente para $\underline{a}$.

De 2.:

Dada subseqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, daremos a seguir um processo para construção de uma subsubseqüência $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que seja monótona.

Consideremos os subconjuntos dos números naturais $\{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$ e $\{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots\}$ construídos da seguinte maneira:

$m_1 \doteq 1$;

$$m_2 \doteq \begin{cases} 2 & \text{se } a_2 \geq a_1 \\ 3 & \text{se } a_2 < a_1 \text{ e } a_3 \geq a_1 \\ 4 & \text{se } a_2 < a_1,\ a_3 < a_1 \text{ e } a_4 \geq a_1 \\ & \text{e assim por diante} \end{cases}$$

$$m_3 \doteq \begin{cases} m_2+1 & \text{se } a_{m_2+1} \geq a_{m_2} \\ m_2+2 & \text{se } a_{m_2+1} < a_{m_2} \text{ e } a_{m_2+2} \geq a_{m_2} \\ m_2+3 & \text{se } a_{m_2+1} < a_{m_2},\ a_{m_2+2} < a_{m_2} \text{ e } a_{m_2+3} \geq a_{m_2} \\ & \text{e assim por diante} \end{cases}$$

De modo semelhante construímos $m_4$, $m_5$,...

e

$k_1 \doteq 1$;

$$k_2 \doteq \begin{cases} 2 & \text{se } a_2 \leq a_1 \\ 3 & \text{se } a_2 > a_1 \text{ e } a_3 \leq a_1 \\ 4 & \text{se } a_2 > a_1,\ a_3 > a_1 \text{ e } a_4 \leq a_1 \\ & \text{e assim por diante} \end{cases}$$

$$k_3 \doteq \begin{cases} k_2+1 & \text{se } a_{k_2+1} \leq a_{k_2} \\ k_2+2 & \text{se } a_{k_2+1} > a_{k_2} \text{ e } a_{k_2+2} \leq a_{k_2} \\ k_2+3 & \text{se } a_{k_2+1} > a_{k_2},\ a_{k_2+2} > a_{k_2} \text{ e } a_{k_2+3} \leq a_{k_2} \\ & \text{e assim por diante} \end{cases}$$

De modo semelhante construímos $k_4$, $k_5$,...

Afirmamos que um dos dois subconjuntos acima é infinito.

De fato, se $\{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$ é finito, isto é, $\{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_M\}$, $M \in N$ isto implicará que $a_{m_M+n+1} < a_{m_M+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja $a_{m_M+n} \in \{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando que este será infinito.

Tendo os índices podemos construir a subseqüência que será crescente se $\{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$ for infinito ou será decrescente se $\{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots\}$ for inifinito. De qualquer modo conseguimos construir uma subseqüência monótona.

<u>De 3.:</u>

Como toda subseqüência de uma seqüência limitada é limitada e toda seqüência possui uma subseqüência monótona esta subseqüência será monótona e limitada portanto convergente.

<u>De 4.:</u>

Observemos que para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, $(a_{n+k_0})_{n\in\mathbb{N}}$ será subseqüência da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logo, por hipótese, convergente para $\underline{a}$, ou seja dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ talque se $n \geq N_1$ temos que $|a_{n+k_0} - a| < \varepsilon$ que é equivalente a escrever $|a_n - a| < \varepsilon$ para $n \geq N_0 \doteq N_1 + k_0$, mostrando que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $\underline{a}$.

□

## 2.6 Seqüências de Cauchy

A seguir introduziremos uma nova classe de seqüências, a saber:

**Definição 2.6.1** *Diremos que uma seqüência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma* ***seqüência de Cauchy*** *se dado $\varepsilon > 0$ existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n$, $m \geq N_0$ temos $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

**Observação 2.6.1** *Uma seqüência numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy se a diferença, em módulo, entre dois termos da mesma é arbitrariamente pequena para índices suficientemente grandes.*

**Exemplo 2.6.1** *A seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ é uma seqüência de Cauchy pois dado $\varepsilon > 0$ se tomarmos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ temos, para $n$, $m \geq N_0$ temos $|a_n - a_m| = |\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}| < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{N_0} + \dfrac{1}{N_0} = \dfrac{2}{n} < \varepsilon$.*

Observemos que a seqüência acima é convergente. Isto é, no caso acima, a seqüência é convergente e é de Cauchy. Isto ocorre em geral, como mostra o:

**Proposição 2.6.1** *Toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.*

**Demonstração:**

Se a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $a$ então dado $\varepsilon > 0$ existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, \geq N_0$ temos $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo se $n$, $m \geq N_0$ temos que $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, mostrando que ela é uma seqüência de Cauchy.

$\square$

**Observação 2.6.2** *Com isto surge a pergunta: "vale a recíproca do resultado acima? ".*

*A resposta será positiva se considerarmos a seqüência tomando valores sobre os números reais.*

*Para mostrar isso precisaremos de alguns resultados que serão exibidos a seguir.*

**Proposição 2.6.2** *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

**Demonstração:**

Se a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é seqüência de Cauchy então dado $\varepsilon = 1$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ temos que $|a_n - a_m| < 1$.

Em particular, $|a_n - a_{N_0}| < 1$. Mas $|a_n| - |a_{N_0}| \leq |a_n - a_{N_0}| < 1$, ou seja $|a_n| \leq |a_{N_0}| + 1$ para todo $n \geq N_0$.

Seja $M \doteq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0-1}|, |a_{N_0}| + 1\}$.

Então temos que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando que a seqüência é limitada.

$\square$

**Observação 2.6.3** *A recíproca do resultado acima* **não** *é verdadeira, isto é, nem toda seqüência limitada é uma seqüência de Cauchy, como mostra o seguinte exemplo: seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

*Então a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada mas não é uma seqüência de Cauchy, pois se $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ temos que $|a_n - a_{n+1}| = 2 > \dfrac{1}{2} = \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Proposição 2.6.3** *Se uma seqüência de Cauchy possui uma subseqüência convergente para $\underline{a}$ então a seqüência será convergente para $\underline{a}$.*

**Demonstração:** Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy tal que $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ seja convergente para $a$.

Como $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ seja convergente para $a$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_i \geq N_1$ temos $|a_{n_i} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $n, m \geq N_2$.

Seja $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Se $n \geq N_0$ temos que

$$|a_n - a| \overset{\begin{pmatrix} N_0 \geq N_2 \\ N_0 \geq N_1 \end{pmatrix}}{\leq} |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que a seqüência é convergente para $a$.

$\square$

Com isto podemos enunciar e provar o:

**Teorema 2.6.1** *(Critério de Cauchy para Convergência de Seqüências)*
*Um seqüência é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

**Demonstração:** A proposição (2.6.1) afirma que toda seqüência é convergente é uma seqüência de Cauchy.

Por outro lado, se ela é uma seqüência de Cauchy então ela é limitada. Mas toda seqüência possui uma subseqüência monótona, portanto convergente (já que deverá ser limitada).

Logo a seqüência possui uma subseqüência convergente assim, do resultado acima, segue que a seqüência será convergente.

$\square$

**Observação 2.6.4** *O resultado acima não diz para que valor a seqüência de Cauchy converge na reta.*

**Exemplo 2.6.2**

1. *A seqüência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, em geral $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, é divergente (para $\infty$, como veremos).*

   *Para isto mostraremos que ela não é uma seqüência de Cauchy.*

   *De fato, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos que*
   $|s_{2k} - s_k| = |(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k})|$
   $$= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-parcelas} \underset{\geq}{\begin{pmatrix} k+1 \leq 2k \\ k+2 \leq 2k \\ \vdots \\ 2k-1 \leq 2k \end{pmatrix}} \underbrace{\frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k}}_{k-parcelas} = k\frac{1}{2k} = \frac{1}{2},$$
   *ou seja, $|s_{2k} - s_k| \geq \frac{1}{2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

   *Logo dado, $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$ (por exemplo) segue que não existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \in \mathbb{N}$ temos $|s_n - s_m| < \varepsilon = \frac{1}{3}$.*

   *De fato pois para todo $N_0 \in \mathbb{N}$ se tomarmos $m \geq N_0$ então para $n \doteq 2m \geq N_0$ (ou seja, $n, m \geq N_0$) e neste caso*
   $$|s_n - s_m| = |s_{2m} - s_m| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

*Mas se* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é uma seqüência de Cauchy ela não poderá ser convergente na reta.*

*Observemos que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é (estritamente) crescente. Como não é convergente deveremos ter* $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ *(pois ela não pode ser limitada, pois se fosse, como ela monótona deveria ser convergente, o que seria um absurdo!).*

$\boxed{\textbf{19.03 - 7.a}}$

2. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

*Afirmamos que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

*De fato, se considerarmos* $n, m \in \mathbb{N}$ *com* $n \leq m$ *(ou seja,* $m = n + k$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$*) temos que*
$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n+k}| = |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots - a_{n+k}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k-1}} = \frac{1}{2^n}(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}}_{k-parcelas}) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ *(pois* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

*Portanto* $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ *se* $m \geq n$.

*Logo, dado* $\varepsilon > 0$ *considerando-se* $N_0 > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ *temos, para* $m \geq n \geq N_0$ *que*

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{N_0 - 1}} < \varepsilon$$

*mostrando que a seqüência é uma seqüência de Cauchy, logo convergente na reta.*

3. *Uma generalização do exemplo acima é:*

*Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência que tem a seguinte propriedade:*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r^n,\ n \in \mathbb{N},$$

*onde* $0 \leq r < 1$ *é dado.*

*Afirmamos que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

*De modo análogo ao exemplo 2. mostra-se que a seqüência acima é uma seqüência de Cauchy, logo convergente na reta (obtemos uma desigualdade do seguinte tipo:* $|a_n - a_m| \leq \frac{r^n}{1-r}$ *se* $m \geq n$*).*

*Deixaremos os detalhes a cargo do leitor.*

4. *Mostre que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde* $a_1 = 1$*,* $a_2 = \dfrac{1}{3}, \cdots, a_n = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}, \cdots$ *é convergente.*

   *De fato, pois* $|a_{n+1}-a_n| = |(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{3^n})-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})| = \dfrac{1}{3^{n-1}} = r^n$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*, onde* $r = \dfrac{1}{3}$*.*

   *Logo do exemplo acima segue que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

**Observação 2.6.5** *O exemplo 1. acima será muito importante ao longo do próximo capítulo (séries numéricas).*

# Capítulo 3

# Séries Numéricas

## 3.1 Definições

A seguir trataremos de uma classe especial de seqüência numéricas denominadas séries numéricas, a saber,

**Definição 3.1.1** *Dada a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos considerar uma outra seqüência, que indicaremos por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos são definidos da seguinte forma:*
$S_1 \doteq a_1$;
$S_2 \doteq a_1 + a_2$;
$S_3 \doteq a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$;
$\vdots$
*que será denominada de* ***série numérica*** *definida pela seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou simplesmente série dos $a_n$).*

*Os $a_n$ serão ditos* ***termos da série*** *$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Os termos $S_n$ da série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serão denominados $n$-**ésima soma parcial** (ou soma parcial de ordem $n$, ou reduzida de ordem $n$).*

*Denotaremos a série numérica acima por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$ ou ainda $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n$ .*

*A seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é chamada de* ***seqüência das somas parciais****.*

**Exemplo 3.1.1**

1. *Consideremos a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

   *A série associada a esta seqüência, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, terá como termos:*
   $S_1 \doteq a_1 = -1$;
   $S_2 \doteq a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$;
   $S_3 \doteq a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 1 - 1 = -1$
   $\vdots$

$$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{-1 + (-1)^n}{2};$$

$\vdots$

*Observe que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente (pois a subseqüência com índices pares converge para* $0$ *e a subseqüência de índices ímpares converge para* $-1$*).*

2. *Consideremos a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{3}$, $a_6 = -\frac{1}{3}, \cdots$.

   *A série associada a esta seqüência,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá como termos:*
   $S_1 \doteq a_1 = 1;$
   $S_2 \doteq a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0;$
   $S_3 \doteq a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   $S_4 \doteq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -1 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
   $\vdots$
   $$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ \frac{2}{n+1} & n \text{ é ímpar} \end{cases};$$
   $\vdots$

   *Observe que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero, isto é* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

3. *Consideremos a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $a_n = c$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(seqüência constante) onde* $c \in \mathbb{R}$ *é fixado.*

   *A série associada a esta seqüência,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, terá como termos:*
   $S_1 \doteq a_1 = c;$
   $S_2 \doteq a_1 + a_2 = c + c = 2c;$
   $S_3 \doteq a_1 + a_2 + a_3 = c + c + c = 3c$
   $\vdots$
   $$S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n-parcelas} = nc;$$
   $\vdots$

   *Observe que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente (para zero) se, e somente se,* $c = 0$.

   *Na verdade* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é:* $\begin{cases} \text{divergente para } \infty \text{ se } c > 0; \\ \text{divergente para } -\infty \text{ se } c < 0; \\ \text{convergente para } 0 \text{ se } c = 0. \end{cases}$

*que será deixado como exercício para o leitor.*

## 3.2 Operações com Séries Numéricas

Podemos operar com séries numéricas usando as operações de seqüências ou ainda:

**Definição 3.2.1** *Dadas as séries numéricas* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *podemos definir:*

*i. A* ***soma das séries****, indicada por* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, como sendo a série numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n);$$

*ii. A* ***multiplicação da série por um número real****, indicada por* $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, como sendo a série numérica:*

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n).$$

**Observação 3.2.1** *O produto de séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *e o quociente das séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n / \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *podem também serem definidos porém isto é um pouco mais delicado e será deixado para outra ocasião.*

*Os interessados em ver como são definidas as operações acima ver o Livro* **[R]** *página 73.*

**Exemplo 3.2.1** *Considerando as seguintes séries numéricas:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}); \quad 10 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2});$$

## 3.3 Convergência de Séries Numéricas

Como vimos no exemplo 3.1.1 acima, algumas das seqüência das somas parciais são convergentes, outras não.

Baseado nisto temos a:

**Definição 3.3.1** *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***convergente*** *se a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *(que é a própria série numérica) for convergente.*

*Se a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para* $S \in \mathbb{R}$ *(isto é,* $\lim_{n \to \infty} S_n = S$*) diremos que* $S$ *é a* ***soma da série*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

*Neste caso escreveremos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$*.*

*Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *não for convergente diremos que ela é* ***divergente****.*

**Observação 3.3.1**

1. *Observemos que se série numérica é convergente então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, *ou seja,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. *Vale observar que símbolo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *denota duas coisas diferentes, a saber: a série numérica (a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*) e sua soma* $S$ *(que é o limite da seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, se existir).*

**Exemplo 3.3.1**

1. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *é divergente pois a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente. Ver Exemplo 3.1.1 item 1..*

2. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, onde* $a_{2n+1} = -\frac{1}{n}$ *e* $a_{2n} = \frac{1}{n}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *é convergente para zero, pois a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para zero . Ver Exemplo 3.1.1 item 2. .*

3. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, Onde* $a_n = c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é divergente para* $c \neq 0$ *é convergente para zero, se* $c = 0$*, pois a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente se* $c \neq 0$ *e convergente para zero se* $c = 0$*. Ver 3. do Exemplo 3.1.1.*

4. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente, pois a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é divergente.*

   *exibiremos a seguir um outro modo de mostrar que essa seqüência é divergente.*

   *Mostraremos que ela não é limitada, logo não poderá ser convergente.*

   *Observemos que*
   $S_1 \doteq a_1 = 1 = (2+0)\frac{1}{2}$*, isto é,* $S_{2^0} \geq (2+0)\frac{1}{2}$ *;*
   $S_2 \doteq a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = (2+1)\frac{1}{2}$*, isto é,* $S_{2^1} \geq (2+1)\frac{1}{2}$
   $S_4 \doteq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{13}{12} > (2+2)\frac{1}{2}$*, isto é,* $S_{2^2} \geq (2+2)\frac{1}{2}$
   *Pode-se mostrar que (exercício: por indução):*

   $S_{2^n} \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \geq (2+n)\frac{1}{2}$.

   *Logo a subseqüência* $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *não será limitada (pois* $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$ *pelo teorema (2.4.1) item 1.) portanto a seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não poderá ser limitada.*

5. *Mostre a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente com soma* $1$.

   *De fato, observemos que* $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = (1 - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + (\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}) + \cdots + (\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n}) + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   *Logo,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$*, ou seja, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente com soma* $1$*, isto é,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

6. *A série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *é convergente (com soma* $\dfrac{c}{1-c}$*) se* $0 \le c < 1$ *e divergente (para* $\infty$*) se* $c \ge 1$.

   *Além disso, no caso convergente* ($0 \le c < 1$) *ela terá soma* $\dfrac{c}{1-c}$*, isto é,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n = \frac{c}{1-c}$.

   *De fato, observemos primeiramente que para todo* $r \ge 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *temos*
   $$1 + r + r^2 \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}.$$
   *Para mostrar isto basta ver que* $(1 - r)(1 + r + r^2 \cdots + r^k) = 1 - r^{k+1}$ *(exercício).*
   *Assim, temos que*
   $S_1 \doteq a_1 = c$;
   $S_2 \doteq a_1 + a_2 = c + c^2$;
   $S_3 \doteq a_1 + a_2 + a_3 = c + c^3 + c^3$
   $\vdots$
   $S_n \doteq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = c + c^2 + \cdots + c^n = c(1 + c + \cdots + c^{n-1}) = c\dfrac{1 - c^n}{1 - c}$.
   *Se* $0 \le c < 1$ *temos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ *(lembremos que* $c^n = e^{n\ln c}$*).*

   *Logo* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c\frac{1 - c^n}{1 - c} = \frac{c}{1-c}$*, mostrando que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *é convergente se* $0 \le c < 1$ *e sua soma é* $\dfrac{c}{1-c}$.
   *Por outro lado se* $c = 1$ *ela será divergente (ver o Exemplo 3.3.1 item 3.).*
   *Se* $c > 1$ *então* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$ *(exercício) assim* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c\frac{1 - c^n}{1 - c} = \infty$*, portanto a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *será divergente (para* $\infty$*).*

**23.03 - 8.a**

7. *Expressar o número real* $0,333\cdots$ *na forma de um número racional, isto é,* $\dfrac{p}{q}$*, onde* $p,q \in \mathbb{Z}$*,* $q \neq 0$.

   *Para isto observemos que tomando-se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*
   $a_1 = 0,3 = 3.10^{-1}$;
   $a_2 = 0,03 = 3.10^{-2}$;
   $a_3 = 0,003 = 3.10^{-3}$;
   $\vdots$
   $a_n = 0,\underbrace{00\cdots 3}_{n-posições} = 3.10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$*, temos que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ *associada a essa seqüência terá como termos:*
   $S_1 = 0,3 = 3.10^{-1}$;
   $S_2 = a_1 + a_2 = 0,33 = 3.10^{-1} + 3.10^{-2}$;
   $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0,333 = 3.10^{-1} + 3.10^{-2} + 3.10^{-3}$;
   $\vdots$
   $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0,\underbrace{33\cdots 3}_{n-posições} = 3.10^{-1} + 3.10^{-2} + 3.10^{-3} + \cdots + 3.10^{-n}$
   $\displaystyle = 3\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{10})^i$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Logo a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente para* $0,333\cdots$.

   *Mas* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3.10^{n} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} \overset{(Exemplo\ 5.:0<c=\frac{1}{10}<1)}{=} 3\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$*, que mostra como surge a fórmula aprendida no colégio que diz que para transformar um número que é uma dízima periódica para forma de fração basta colocar no numerador o período e no denominador tantos* 9 *quantos formem os dígitos do período (no caso o período é* 3*, logo um dígito, assim na forma de fração teremos* $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$*).*

8. *Expressar o número real* $0,272727\cdots$ *na forma de um número racional, isto é* $\dfrac{p}{q}$*, onde* $p,q \in \mathbb{Z}$*,* $q \neq 0$.

   *Para isto observemos que tomando-se a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, onde*
   $a_1 = 0,27 = 27.10^{-2}$;
   $a_2 = 0,0027 = 27.10^{-4}$;
   $a_3 = 0,000027 = 27.10^{-6}$;
   $\vdots$
   $a_n = 0,\underbrace{00\cdots 27}_{(2n-2)-posições} = 27.10^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$*, temos que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ *associada a essa seqüência terá como termos*
   $S_1 = 0,27 = 27.10^{-2}$;
   $S_2 = a_1 + a_2 = 0,2727 = 27.10^{-2} + 273.10^{-4}$;
   $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0,272727 = 27.10^{-2} + 27.10^{-4} + 27.10^{-6}$;

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0,\underbrace{27\cdots 27}_{(2n-2)-posições} = 27.10^{-2} + 27.10^{-4} + 27.10^{-6} + \cdots + 27.10^{-2n}$$

$$= 27\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{10})^{2i},\ n \in \mathbb{N}.$$

*Logo a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente para* $0,272727\cdots$.

*Mas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 27.10^{2n} = 27\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{2n}} \overset{(Exemplo\ 5.:\ c=\frac{1}{10^2})}{=} 27\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$, *que também pode ser obtida pelo processo aprendido do colégio.*

**Observação 3.3.2**

1. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *será denominada* ***série harmônica****.*

   *Segue do Exemplo 3.3.1 item 4. que a série harmônica é divergente.*

2. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *será denominada* ***série geométrica*** *de razão* $c \in \mathbb{R}$.

   *Do Exemplo 3.3.1 item 5. acima sabemos que a série geométrica de razão* $c$ *é convergente se* $0 \leq c < 1$ *(com soma* $\frac{c}{1-c}$*) e divergente (para* $\infty$*) se* $c \geq 1$.

Valem as propriedades básicas de convergência para a convergência de séries numéricas, a saber:

**Proposição 3.3.1** *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries numéricas convergentes, com soma* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, respectivamente e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Então as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *e* $\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *são convergentes com somas* $\underline{a \pm b}$ *e* $\underline{\alpha a}$*, respectivamente, isto é,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Demonstração:**

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries numéricas convergentes, com soma $a$ e $b$, respectivamente, então, considerando-se $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $R_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, $n \in \mathbb{N}$ temos que $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} R_n = b$.

Definindo-se $T_n \doteq (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$, segue que $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = a + b$, mostrando que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente com soma $a + b$.

De modo análogo, como $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ então tomando-se $U_n = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i)$, $n \in \mathbb{N}$ temos que $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha a = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mostrando que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n)$ é convergente para $\alpha a$.

□

A seguir exibiremos dois exemplos importantes de séries numéricas convergentes.

**Exemplo 3.3.2**

1. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

   *De fato, a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada pois, como* $S_n \geq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que:* $|S_n| = S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \cdots + \frac{1}{n.n} \overset{\begin{pmatrix} 2 \geq 1 \\ 3 \geq 2 \\ \vdots \\ n \geq n-1 \end{pmatrix}}{\leq} 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 + (1 - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$, *ou seja* $|S_n| \leq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

   *Como* $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *logo a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente crescente (logo monótona).*

   *Mas ela também é limitada, portanto convergente, ou seja a série numérica é convergente.*

   *Pode-se mostrar que ela tem soma* $\frac{\pi^2}{6}$ *como veremos mais adiante.*

2. *A série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente.*

   *De fato, a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada pois, como* $S_n \geq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que:* $|S_n| = S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} +$

$$\cdots + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2.3\cdots n}}_{(n-1)-fatores} \overset{\begin{pmatrix} 3 \geq 2 \\ 4 \geq 2 \\ \vdots \\ n \geq 2 \end{pmatrix}}{\leq} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2.2\cdots 2}}_{(n-1)-fatores} \leq$$

$$1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{(soma dos n primeiros termos de uma PG de razão } \frac{1}{2})} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} \leq 3,$$ *ou seja* $|S_n| \leq 3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Como* $a_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *logo a seqüência das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente crescente (logo monótona).*

*Mas ela também é limitada, portanto convergente, ou seja a série numérica é convergente.*

*Pode-se mostrar que ela tem soma* $\underline{e}$ *como veremos mais adiante.*

A seguir daremos alguns resultados de convergência para séries numéricas.

## 3.4 Resultados Gerais de Convergência de Séries Numéricas

Começaremos com dois resultados simples que podem ser úteis no estudo de convergência de séries numéricas, a saber:

**Proposição 3.4.1** *Suponhamos que as séries numéricas* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são tais que* $b_{2n} = a_n$ *e* $b_{2n-1} = 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

*Neste caso a soma das séries numéricas coincidem, isto é,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>**Demonstração:**</u> Observemos que se $S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $T_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $n \in \mathbb{N}$ então $T_n = \begin{cases} S_{\frac{n}{2}}, & \text{se } n \text{ é par} \\ S_{\frac{n+1}{2}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$ logo uma será convergente se, e somente se, a outra for e neste caso com mesma soma.

$\square$

**Observação 3.4.1** *Podemos generalizar este resultado considerando a seqüência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituída dos termos da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduzindo-se zeros à mesma em posições aleatórias (no caso acima a seqüência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é obtida da a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intercalando-se temos da última com zeros, a saber: $a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \cdots$).*

**Proposição 3.4.2** *Consideremos a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $p \in \mathbb{N}$ fixado.*

*Então, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (com soma $a$) se, e somente se, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge (com soma $b = a - a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1}$).*

**Demonstração:**

Observemos que a seqüência das somas parciais da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e somente se, a seqüência das somas parciais da série numérica $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ é $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $T_n = S_{n+p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Logo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = a$ se, e somente se, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = a - a_1 + a_2 - \cdots - a_p$.

□

**Observação 3.4.2** *A proposição acima nos diz que podemos desprezar um número finito de termos de uma série numérica que isso não alterará o estudo da sua convergência da mesma (alterará sua soma).*

**Exemplo 3.4.1** *A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$ é convergente. Encontre sua soma.*

De fato, sabemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}$ é convergente com soma $a = 1$.

Logo, pela proposição acima, a série numérica $\displaystyle\sum_{m=6}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}$ é convergente com soma igual a:

$$a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 1 - (\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6}) = \frac{1}{6}.$$

Mas: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)} \overset{m=n+5}{=} \sum_{m=6}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}$, logo é convergente com soma igual a: $\frac{1}{6}$.

O primeiro resultado geral importante para convergência de séries numéricas é o:

**Teorema 3.4.1** *(Critério de Cauchy para convergência de séries numéricas).*

*A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N_0$ *e qualquer* $p \in \mathbb{N}$ *temos* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

**Demonstração:**

Lembremos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a seqüência das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente em $\mathbb{R}$ e que uma seqüência é convergente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela for uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ temos $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Observemos que se $m > n$ então $m = n + p$, para $p \in \mathbb{N}$, assim

$$S_m - S_n = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}.$$

Logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, ela for uma seqüência de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ e qualquer $p \in \mathbb{N}$ temos $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$, como queríamos mostrar.

□

**Observação 3.4.3** *Nos exemplos da secção anterior mostramos que as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *eram convergentes.*

*Observemos que em todos estes casos as seqüências que as definem convergem para zero (isto é,* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$*).*

*Isto é um fato geral como afirma o:*

**Proposição 3.4.3** *Suponhamos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*Então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Demonstração:**

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente com soma $S$ então $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in N$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo se $n > N_0$ (ou seja $n-1 \geq N_0$) temos: $|a_n - 0| = |S_n - S_{n-1}| = |S_n - S + S - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, mostrando que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

**Observação 3.4.4**

1. ***Não*** *vale a recíproca do resultado acima, isto é, existe uma (na verdade existem várias) seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que é convergente para zero e cuja série numérica associada a ela,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, não é convergente.*

   *Por exemplo, a série harmônica,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente e* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*.*

2. *Na verdade o resultado acima nos dá uma condição* ***necessária*** *(mas não sufuciente) para que uma série numérica seja convergente (a saber que os termos da série numérica sejam convergentes para zero).*

   *Podemos usá-lo como um Critério de Divergência, isto é, se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é tal que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *então ela será divergente (pois se fosse convergente deveríamos ter* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*).*

**Exemplo 3.4.2** *A série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$ *é divergente.*

*De fato, como* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1 \neq 0$*, do critério da divergência, segue que ela é divergente.*

## 3.5 Critérios de Convergência para Séries Numéricas com Termos Não-negativos

**Observação 3.5.1** *Nos exemplos 3.3.2 itens 1. e 2. mostramos que as séries numéricas* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *(de termos não-negativos, isto é,* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*) são convergentes utilizando-se do fato que as seqüências das somas parciais eram limitadas.*

*Isto ocorre em geral para séries numéricas cujos termos são não-negativos, a saber:*

**Teorema 3.5.1** *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seqüência cujos termos são não-negativos, isto é* $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

*Então, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, a seqüência das somas parciais é limitada (isto é,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada).*

<u>**Demonstração:**</u>

$(\Rightarrow)$ Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, como $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (pois $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Assim $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, portanto convergente, logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

$\square$

**26.03 - 9.a**

**Exemplo 3.5.1** *Verifique se as séries numéricas abaixo são convergentes ou divergentes.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

   *Observemos que* $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *logo a seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona (estritamente crescente).*

   *Vimos no exemplo 4.3.1 item 6. que* $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, *logo a seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

   *Logo do teorema acima segue que série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente.*

2. *As séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *foram tratadas anteriormente usando o teorema (3.5.1) (vejam os Exemplo (3.3.2) item 1. e 2.).*

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   *Observemos que* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *logo a seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona (estritamente crescente).*

   *Mas,*

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\begin{pmatrix} 1 \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{n} \\ \vdots \\ \sqrt{n-1} \leq \sqrt{n} \end{pmatrix}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-parcelas}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

   *ou seja,* $S_n \geq \sqrt{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Portanto a a seqüência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada (*$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ *e* $S_n \geq \sqrt{n}$*,* $n\in\mathbb{N}$*), logo a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ *é divergente.*

Outro critério importante para o estudo da convergência de séries numéricas com termos não-negativos é o:

**Teorema 3.5.2** *(Critério da Comparação) Sejam* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas de tal modo que seus termos satisfazem a seguinte condição:* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$*.*

*i. Se a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente. Além disso,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

*ii. Se a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

Para cada $n\in\mathbb{N}$ considere $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ as somas parciais de ordem $n$ das séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Por hipótese $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, logo $0 \leq S_n \leq T_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

De i.:

Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então a seqüência numérica $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente, logo será limitada, ou seja existe $M \geq 0$ tal que $|T_n| \leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Assim $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada (pois $0 \leq S_n \leq T_n \leq M$, para todo $n\in\mathbb{N}$).

Mas $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona (crescente) portanto convergente, logo a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Além disso, seque da teoria dos limites, que $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, isto é, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

De ii.:

Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então a seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não será limitada (ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$). Portanto $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também não será limitada (pois $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$), portanto não será convergente, logo a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

□

**Exemplo 3.5.2** *Estudar a convergência de cada uma das séries numéricas a seguir:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$.

   *Observemos que* $a_n = \dfrac{1}{3^n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ *e definindo-se* $b_n = \dfrac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então* $0 \leq a_n = \dfrac{1}{3^n+1} \leq \dfrac{1}{3^n} = b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Mas a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *é convergente (série geométrica de razão* $\frac{1}{3} < 1$*).*

   *Então do critério da comparação (item i.) segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ *será convergente.*

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

   *Antes de mais nada vale salientar que* $0 \leq \ln n \leq n$, *para* $n \geq 3$ *(*).*

   *De fato, se considerarmos a função* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \geq e$ *e temos que* $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ *se* $x \geq e$, *portanto é decrescente.*

   *Mas* $f(e) = \dfrac{1}{e} < 1$ *então* $f(x) < 1$, $x \geq e$, *ou seja,* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} < 1$, $x \geq e$. *Portanto* $\ln x \leq x$ *se* $x \geq e$.

   *Em particular vale a afirmação (*) acima.*

   *Logo se* $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \geq 3$ *e definindo-se* $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então* $0 \leq a_n = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\ln n} = b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Mas a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (série harmônica).*

   *Então do critério da comparação (item ii.)segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ *será divergente.*

Antes de exibirmos outro exemplo vale fazer a seguinte observação:

**Observação 3.5.2** *O teorema acima permanece válido se trocarmos a hipótese "*$0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$*"por "*$0 \leq a_n \leq b_n$, $n \geq N_0$*", ou seja:*

**Corolário 3.5.1** *(Critério da Comparação (Estendido))*

*Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas de tal modo que seus termos satisfazerm a seguinte condição:* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para* $n \geq N_0$.

*i. Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii. Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

A demonstração é semelhante a do critério da comparação.

□

Podemos aplicar esse resultado a seguinte série numérica:

**Exemplo 3.5.3** *Estudar a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^n}$.

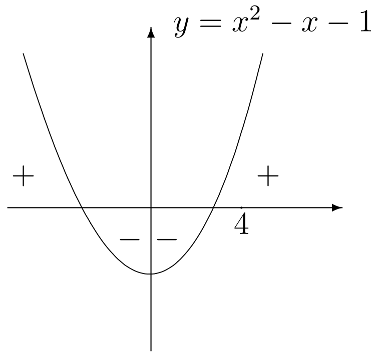
*Observemos que se* $a_n = \frac{n+1}{n^n}$ *e* $b_n = \frac{1}{n^2}$ $n \in \mathbb{N}$ *então* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para* $n \geq 4$.

*Observemos que mostrar a desigualdade acima é equivalente a mostrar que* $n^2(n+1) \leq n^n$ *para* $n \geq 4$

*Na verdade mostraremos que* $n^2(n+1) \leq n^4$ *para* $n \geq 4$ *(e como* $n^4 \leq n^n$ *se* $n \geq 4$ *teremos a afirmação) ou, equivalentemente,* $n^2 - n - 1 \geq 0$ *se* $n \geq 4$.

*Observemos que* $x^2 - x - 1 = 0$ *se, e somente se,* $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} < 4$.

*Logo* $x^2 - x - 1 \geq 0$ *se* $x \geq 4$ *implicando que* $n^2(n+1) \leq n^4$ *para* $n \geq 4$.




*Como a série numérica* $\sum_{n=4}^{\infty} b_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente (pois* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente) segue, do critério da comparação (estendido) segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^n}$ *é convergente.*

Outro critério é dado pelo:

**Teorema 3.5.3** *(Critério da Comparação por Limites)*

*Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries numéricas cujos termos satisfazem:* $0 \leq a_n, b_n$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

*Consideremos* $c \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *(estamos supondo que* $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$*).*

*i. Se* $0 < c < \infty$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente.*

*ii. Se* $c = 0$ *e a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

*iii. Se* $c = \infty$ *e a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será divergente.*

**Demonstração:**

De i.:

Se $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ então dado $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon = \frac{c}{2}$, ou seja, $-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2}$, ou ainda, $\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$.

Como $b_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$0 \leq \frac{c}{2}\, b_n \overset{(I)}{<} a_n \overset{(II)}{<} \frac{3c}{2}\, b_n, \quad n \geq N_0.$$

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Então de (I) e do critério da comparação (estendido) segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2}\, b_n$ será convergente, ou seja, $(c \neq 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

Por outro lado, se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3c}{2}\, b_n$ será convergente. Logo de (II), e do critério da comparação (estendido,) segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

De ii.:

Se $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ então dado $\varepsilon = 1$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon = 1$, ou seja, $-1 < \frac{a_n}{b_n} < 1$, ou ainda, $0 \leq a_n < b_n$, $n \geq N_0$.

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então do critério da comparação (estendido) segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

De iii.:

Se $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ então dado $K = 1$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $\frac{a_n}{b_n} > K = 1$, ou seja, $a_n > b_n \geq 0$, $n \geq N_0$.

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente então do critério da comparação (estendido) segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.

□

**Exemplo 3.5.4** *Estudar a convergência das séries numéricas abaixo:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$.

   *Observemos que se* $a_n = \frac{3n+5}{n2^n}$ *(que são não-negativos) e* $b_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então temos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+5}{n2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n} = 3 > 0$.

   *Mas a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *é convergente (pois é uma série geométrica de razão* $r = \frac{1}{2} < 1$*).*

   *Logo do critério da comparação por limites (item i.) segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$ *será convergente.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{1}{n})$.

   *Sejam* $a_n = \frac{1}{n}$ *e* $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *que são não-negativos.*

   *Observemos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{(1^0.\ limite\ fundamental)}{=} 1 > 0$.

*Como a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (pois é a série harmônica) segue, do critério da comparação por limites (item i.), que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{1}{n})$ *é divergente.*

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

*Se tentarmos aplicar o critério da comparação por limites diretamente pode não dar certo. Se considerarmos* $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$ *e, por exemplo* $b_n = \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ *(que são não-negativos) então* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

*Logo não podemos aplicar nenhum dos itens do critério da comparação por limites nesta situação.*

*Para resolver esse problema trataremos da seguinte série numérica:*

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3}{n!} \overset{(m=n-3)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+3)^3}{(m+3)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)!}.$$

*Se considerarmos* $a_n = \dfrac{(n+3)^3}{(n+3)!}$ *e* $b_n = \frac{1}{n!}$, $m \in \mathbb{N}$ *(que são não-negativos).*

*Mas* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)(n+2)(n+1)} = 1 > 0.$

*Como a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente segue, do critério da comparação por limites (item i.), que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{(n+3)!}$ *é convergente, portanto a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ *também será convergente.*

Outro critério muito útil é o:

**Teorema 3.5.4** *(Critério da Razão)*

*Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $0 < a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*i. Se existir* $0 < r < 1$ *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii. Se existir* $r \geq 1$ *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

De i.:

Se existir $0 < r < 1$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então $a_{n+1} \leq r a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $a_{n+1} \leq r^n a_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos por indução temos:

1) Vale para $n = 1$, pois $a_2 \leq r a_1$.

2) Se valer para $n = k \geq 2$, isto é, se $a_{k+1} \leq r^k a_1$ valerá para $n = k+1$.

De fato, $a_{k+2} \leq r a_{k+1} \overset{\text{(hipótese de indução)}}{\leq} r(r^k a_1) = r^{k+1} a_1$, ou seja, vale para $n = k+1$.

Considerando $b_n = r^n a_1$, $n \in \mathbb{N}$ temos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente (pois é um múltiplo da série geométrica de razão $0 < r < 1$, logo convergente).

Mas $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo do critério da comparação (item i.) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

De ii.:

Se existir $r \geq 1$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então $a_{n+1} \geq r a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De modo semelhante ao caso acima, pode-se mostrar que $a_{n+1} \geq r^n a_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (exercíçio).

Considerando $b_n = r^n a_1$, $n \in \mathbb{N}$ temos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é divergente (pois é um múltiplo, não nulo, da série geométrica de razão $r \geq 1$, logo divergente).

Mas $0 \leq b_n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo do critério da comparação (item ii.) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.

$\square$

**29.03 - 10.a**

**Observação 3.5.3** *O teorema acima permanece válido se trocarmos a hipótese* "$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, $n \in \mathbb{N}$" *por* "$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, $n \geq N_0$" *no item i. (ou a hipótese* "$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$, $n \in \mathbb{N}$" *por* "$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$, $n \geq N_0$" *no item ii., ou seja:*

**Corolário 3.5.2** *(Critério da Razão (Estendido))*

*Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $0 < a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*i. Se existir* $0 < r < 1$ *tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, *para todo* $n \geq N_0$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii. Se existir* $r \geq 1$ *tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$, *para todo* $n \geq N_0$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

A demonstração é semelhante a do critério da razão.

□

Como conseqüência do critério da razão temos o:

**Teorema 3.5.5** *(Critério da Razão por Limites)*

*Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $0 < a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $l \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

*i. Se* $0 \leq l < 1$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii. Se* $l > 1$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

*iii. Se* $l = 1$ *nada podemos afirmar.*

**Demonstração:**

De i.:

Como $l \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dado $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l| < \varepsilon = \frac{1-l}{2}$ ou, equivalentemente, $-\frac{1-l}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < \frac{1-l}{2}$ implicando que $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1}{2} + \frac{l}{2} \doteq r \overset{(l<1)}{<} 1$, $n \geq N_0$.

Logo do critério da razão (estendido) item i., segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

De ii.:

Como $l \doteq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, dado $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l| < \varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$ ou, equivalentemente, $-\dfrac{l-1}{2} < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l < \dfrac{l-1}{2}$ implicando que $1 \overset{(l>1)}{<} r \doteq \dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2} = l + \dfrac{1-l}{2} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \geq N_0$.

Logo do critério da razão (estendido) item ii., segue que a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

De iii.:

Exibiremos dois exemplos onde $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e no primeiro a série numérica converge e no segundo a série numérica diverge.

Sabemos que a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente e $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n+1}{n})^2 = 1$.

Por outro lado, a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ é divergente e $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Esses dois exemplos mostram que se $l = 1$ nada podemos afirmar (ou seja, a série numérica poderá ser convergente ou divergente).

$\square$

**Exemplo 3.5.5** *Analise a convergência das séries numéricas abaixo:*

1. *Seja $x \geq 0$ fixado. Com isto podemos considerar a série numérica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

   *Neste caso* $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Logo* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n+1} = 0 \doteq l < 1$.

   *Então, do critério da razão por limites, segue que a série numérica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ *é convergente para cada $x \geq 0$ fixado.*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

   *Neste caso* $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Logo* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2} \doteq l < 1$.

*Então, do critério da razão por limites, segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ *é convergente.*

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

*Neste caso* $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

*Logo* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \doteq l > 1.$

*Então, do critério da razão por limites, segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ *é divergente.*

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

*Neste caso* $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

*Logo* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = 1$, *não podemos aplicar o critério da razão por limites.*

*Mas, se considerarmos* $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > 0.$

*Como a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (série harmônica) segue, do teste da comparação por limites, que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ *é divergente.*

Um outro critério importante é o:

**Teorema 3.5.6** *(Critério da Raiz)*

*Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $0 \le a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*i. Se existir* $0 < r < 1$ *tal que* $(a_n)^{1/n} \le r$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii.* *Se existir* $r \geq 1$ *tal que* $(a_n)^{1/n} \geq r$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

De i.:

Como $(a_n)^{1/n} \leq r$, para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $0 \leq r < 1$ então $0 \leq a_n \leq r^n$ , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente (série geomérica de razão $0 \leq r < 1$).

Logo, do critério da comparação item i., segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

De ii.:

Como $(a_n)^{1/n} \geq r$, para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $r \geq 1$ então $a_n \geq r^n$ , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é divergente (série geomérica de razão $r \geq 1$).

Logo, do critério da comparação (item ii.), segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

$\square$

**Observação 3.5.4** *O teorema acima permanece válido se trocarmos a hipótese "*$(a_n)^{1/n} \leq r$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $0 \leq r < 1$*"por "*$(a_n)^{1/n} \leq r$*,* $n \geq N_0$*,* $0 \leq r < 1$*"no item i. (ou a hipótese "*$(a_n)^{1/n} \geq r$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $r \geq 1$*" por "*$(a_n)^{1/n} \geq r$*,* $n \geq N_0$*,* $r \geq 1$*"no item ii., ou seja:*

**Corolário 3.5.3** *(Critério da Raiz (Estendido))*

*Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $0 \leq a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

*i.* *Se existir* $0 < r < 1$ *tal que* $(a_n)^{1/n} \leq r$*, para todo* $n \geq N_0$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii.* *Se existir* $r \geq 1$ *tal que* $(a_n)^{1/n} \geq r$*, para todo* $n \geq N_0$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

**Demonstração:**

A demonstração é semelhante a do critério da raiz.

$\square$

Como conseqüência temos o:

**Teorema 3.5.7** *(Critério da Raiz por Limites)*

*Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $0 \leq a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$*.*

*i. Se* $0 \leq l < 1$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

*ii. Se* $l > 1$ *então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

*iii. Se* $l = 1$ *nada podemos afirmar.*

**Demonstração:**

De i.:

Como $l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} < 1$, dado $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|(a_n)^{1/n} - l| < \varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, isto é, $-\dfrac{1-l}{2} < (a_n)^{1/n} - l < \dfrac{1-l}{2}$, se $n \geq N_0$ ou, equivalentemente, $l - \dfrac{1-l}{2} < (a_n)^{1/n} < l + \dfrac{1-l}{2}$, se $n \geq N_0$.

Em particular, $0 \leq (a_n)^{1/n} < l + \dfrac{1-l}{2} = \dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2} \doteq r \overset{(l<1)}{<} 1$, $n \geq N_0$.

Logo, do critério da raiz (estendido) item i., segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

De ii.:

Como $l \doteq \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} > 1$, dado $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|(a_n)^{1/n} - l| < \varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$, isto é, $-\dfrac{l-1}{2} < (a_n)^{1/n} - l < \dfrac{l-1}{2}$, se $n \geq N_0$ ou, equivalentemente, $l - \dfrac{l-1}{2} < (a_n)^{1/n} < l + \dfrac{l-1}{2}$, se $n \geq N_0$.

Em particular, $(a_n)^{1/n} > l - \dfrac{l-1}{2} = \dfrac{l}{2} + \dfrac{1}{2} \doteq r \overset{(l>1)}{>} 1$.

Logo, do critério da raiz (estendido) item ii., segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

De iii.:

Se $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 1$ nada podemos afirmar como veremos nos dois exemplos a seguir:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ é divergente e $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n^{1/n}}) \overset{\text{(ver * abaixo)}}{=} 1$.

(*) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n}$.

Mas $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{(L'Hospital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, implicando que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$.

Por outro lado, sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^{1/n}})^2 \overset{\text{(ver * acima)}}{=} 1$.

□

**Exemplo 3.5.6** *Analizar a convergência das séries numéricas abaixo:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

   *Tomando-se* $a_n = \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então temos que* $a_n \geq 0$ *e* $l = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.

   *Logo, do critério da raiz no limite, segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ *é convergente.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

   *Tomando-se* $a_n = \frac{1}{n2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ *então temos que* $a_n \geq 0$ *e* $l = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n2^n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^{1/n}} \overset{\text{(ver * acima)}}{=} \frac{1}{2} < 1$.

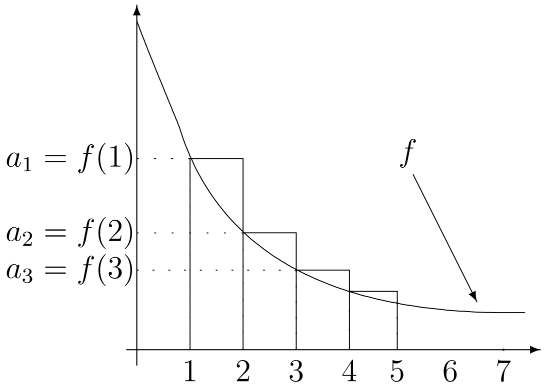
   *Logo, do critério da raiz no limite, segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ *é convergente.*

O último critério para convergência de séries numérica cujos os termos são não-negativos que exibiremos é o:

**Teorema 3.5.8** *(Critério da Integral ou de Cauchy)*
*Suponhamos que* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *é não negativa (isto é* $f(x) \geq 0, x \geq 1$*), decrescente e contínua em* $[0, \infty)$ *e que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja dada por* $a_n \doteq f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

*Então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se,* $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ *converge.*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$):
Observemos que, como mostra a figura abaixo




$a_k =$ a área do retângulo de base $[k, k+1]$ e altura $f(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $f$ é decrescente temos que $0 \leq f(x) \leq f(k) = a_k$ se $k \leq x \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Logo $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)[(k+1)-k] = f(k) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Portanto $0 \leq \displaystyle\int_1^k f(x)\,dx \leq \int_1^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{k-1}^k f(x)\,dx + \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k$, ou seja,

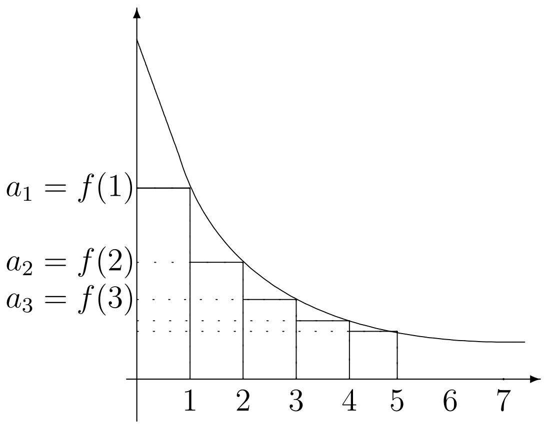
$$0 \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^k a_j = S_k (= \text{ soma parcial de ordem } k \text{ da série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n).$$

Portanto, se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, segue que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

Logo a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ também será (pois $f$ é contínua em $[0,1]$).

$(\Leftarrow)$:

Observemos que, da figura abaixo,




$a_k =$ área do retângulo de base $[k-1, k]$ e altura $f(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Como $f$ é decrescente temos que $f(x) \geq f(k) = a_k$ se $k-1 \leq x \leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

Logo $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geq f(k)[(k-(k-1)] = a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Portanto

$$\int_1^k f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx + \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

ou ainda

$$a_1 + \int_1^k f(x)\,dx \geq \sum_{j=1}^{k} a_j = S_k, \text{ para todo } k = 1, 2, \cdots.$$

Logo se a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente segue que a seqüência numérica das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Mas como $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que a seqüência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será monótona (crescente).

Portanto a seqüência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente, isto é, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

□

**Observação 3.5.5** *O resultado acima continua válido se trocarmos o intervalo* $[0, \infty]$ *pelo intervalo* $[a, \infty]$, $a \geq 1$, *ou seja vale o:*

**Corolário 3.5.4** *(Critério da Integral ou de Cauchy (Estendido))*

*Sejam* $a \geq 1$ *e* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $N_0 \geq a$.

*Suponhamos que* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *é não negativa (isto é* $f(x) \geq 0, x \geq a$*) decrescente e contínua em* $[a, \infty)$ *e que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja dada por* $a_n \doteq f(n)$, $n \geq N_0$.

*Então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, somente se,* $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ *converge.*

**Demonstração:**

A demonstração é semelhante a do resultado acima e será deixada como exercício para o leitor.

□

**Exemplo 3.5.7** *Analizar a convergência das séries numéricas abaixo:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

   *Consideremos* $f(x) \doteq \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$.

   *Então* $f$ *é não-negativa* ($f(x) > 0$, $x \geq 1$), *decrescente e* $f(n) = \dfrac{1}{n} \doteq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

*Observemos que a integral imprópria* $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$*, isto é, divergente.*

*Assim segue, do critério da integral, que a série* $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ *é divergente (caso contrário a integral imprópria deveria ser convergente, o que é um absurdo).*

*2.* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

*Se* $p = 0$ *temos que a série numérica será* $\sum_{n=1}^\infty 1$ *que é divergente (pois* $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ *e assim do critério da divergência segue a afirmação).*

*Se* $p < 0$ *a série numérica* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ *será divergente (pois* $-p > 0$*, logo* $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty \neq 0$ *e assim do critério da divergência segue a afirmação).*

*Se* $p = 1$ *ela também será divergente (série harmônica).*

*Consideremos o caso em que* $p \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

*Seja* $f(x) \doteq \frac{1}{x^p}$, $x \geq 1$.

*Então* $f$ *é não-negativa (*$f(x) > 0$, $x \geq 1$*), decrescente e* $f(n) = \frac{1}{n^p} \doteq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

*Observemos que a integral imprópria* $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} [\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}]|_{x=1}^{x=b} = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} [b^{1-p} - 1] = \begin{cases} \text{converge (para } \frac{1}{p-1}\text{)}, & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge (para } \infty\text{)}, & \text{se } 0 < p < 1 \end{cases}.$

*Logo, do critério da integral, segue que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \quad \text{será} \quad \begin{cases} \text{convergente}, & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge (para } \infty\text{)}, & \text{se } p \leq 1 \end{cases}.$$

**9.04 - 11.a**

*3.* $\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \ln^p n}$, $p \geq 0$.

*Se* $p = 0$ *nada temos a fazer (é a série harmônica, portanto divergente).*

*Se* $p = 1$ *consideremos* $f(x) \doteq \frac{1}{x \ln x}$, $x \geq e$.

*Então* $f$ *é não-negativa (*$f(x) > 0$, $x \geq e$*), decrescente e* $f(n) = \frac{1}{n \ln n} \doteq a_n$, $n \geq 3$.

*Observemos que a integral imprópria* $\displaystyle\int_e^\infty f(x)\,dx = \int_e^\infty \frac{1}{xlnx}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx$,

*mas* $\displaystyle\int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = b \Rightarrow u = lnb \end{array}\right\} \int_1^{\ln b} \frac{1}{u}\,du = \ln u|_{u=1}^{u=\ln b} = \ln(\ln b)$.

*Logo* $\displaystyle\int_e^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln b) = \infty$, *portanto a integral imprópria* $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *é divergente logo, pelo critério da integral, segue que a série* $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln n}$ *é divergente.*

*Consideremos o caso em que* $p \in (0,\infty)\setminus\{1\}$.

*Seja* $f(x) \doteq \dfrac{1}{x\ln^p x}$, $x \geq e$.

*Então* $f$ *é não-negativa* ($f(x) > 0$, $x \geq e$)*, decrescente e* $f(n) = \dfrac{1}{n\ln^p n} \doteq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

*Observemos que a integral imprópria* $\displaystyle\int_e^\infty f(x)\,dx = \int_e^\infty \frac{1}{x\ln^p x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln^p x}\,dx$, *observemos que*

$$\int_1^b \frac{1}{x\ln^p x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = b \Rightarrow u = \ln b \end{array}\right\} = \int_1^{\ln b} \frac{1}{u^p}\,du = \frac{1}{(1-p)u^{p-1}}|_{u=1}^{u=\ln b} = \frac{1}{(1-p)}[(\ln b)^{1-p} - 1] = \left\{\begin{array}{ll} \text{converge (para } \frac{1}{p-1}\text{)}, & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge (para } \infty\text{)}, & \text{se } 0 < p < 1 \end{array}\right. .$$

*Logo, do critério da integral segue que, a série numérica*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\ln^p n} \quad \text{será} \quad \begin{cases} \text{convergente}, & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge (para } \infty\text{)}, & \text{se } p \leq 1 \end{cases}.$$

## 3.6 Convergência de Séries Alternadas

**Observação 3.6.1** *Observemos que os critérios estabelecidos na seção anterior só podem ser aplicados para séries numéricas que tenham somente um* **número finito** *de termos negativos.*

*Se a série numérica possui somente um* **número finito** *de termos não-negativos podemos aplicar os critérios acima trocando-se o sinal dos termos da série numérica (deste modo ela ficará com somente um número finito de termos negativos).*

*Baseado nessas observações, falta um resultado que trate de séries numéricas que tem infinitos termos positivos e negativos, ou seja o que chamaremos de:*

**Definição 3.6.1** *Diremos que uma série numérica é um* ***série alternada*** *se ela puder ser colocada na seguinte forma:* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}a_n$ *onde* $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 3.6.1**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *é uma série alternada. Neste caso,* $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é uma série alternada. Neste caso,* $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ *é uma série alternada. Neste caso,* $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Com isto temos o seguinte critério para convergência de séries alternadas,

**Teorema 3.6.1** *(Critério da Série Alternada ou de Leibniz)*
*Suponhamos que* $(a_n)_{n\in}\mathbb{N}$ *é uma seqüência numérica que satisfaz:*

*i.* $a_n \geq 0$ $n \in \mathbb{N}$;

*ii.* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma seqüência decrescente;*

*iii.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *será convergente.*
*Além disso se sua soma é* $S$ *então* $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Demonstração:**

Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência das somas parciais da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Observemos que:

**1.** $S_{2n} \leq S_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.
De fato,

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \overset{(a_{2n+1}\geq a_{2n+2})}{\geq} S_{2n},\ n \in \mathbb{N}.$$

**2.** $S_{2n-1} \leq S_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
De fato,

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \overset{(a_{2n+1}\leq a_{2n})}{\leq} S_{2n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

**3.** $0 \leq S_{2n} \leq a_1$, $n \in \mathbb{N}$.
De fato,

$$0 \leq S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$$
$$= a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_{2n})}_{\leq 0} \overset{(a_{i+1}\leq a_i)}{\leq} a_1,\ n \in \mathbb{N}.$$

De 1. e 3. temos que a seqüência numérica $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, logo será convergente.

Seja $S \doteq \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

Observemos que $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ segue que $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$.

Ou seja, a seqüência numérica $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também será convergente para $S$.

Com isto temos que a seqüência numérica $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para $S$, portanto a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é convergente (com soma $S$).

Como a seqüência numérica $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente segue que $S_{2n} \leq S$, $n \in \mathbb{N}$.

Como a seqüência numérica $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente segue que $S_{2n+1} \geq S$, $n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, $|S - S_{2n}| = S - S_{2n} \leq a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado,

$0 \leq S_{2n+1} - S \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, $|S - S_{2n+1}| = S_{2n+1} - S \leq a_{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

**Exemplo 3.6.2** *Verifique se as séries numéricas abaixo convegem ou divergem.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

   *Esta é uma série alternada onde* $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Observemos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não negativa, decrescente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   *Logo pelo critério da série alternada segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é convergente.*

   *A série numérica acima será denominada* ***série harmônica alternada****.*

   *Veremos, mais adiante, que ela tem soma* $\ln 2$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

   *Esta é uma série alternada onde* $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Observemos que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não negativa, decrescente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   *Logo pelo critério da série alternada segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ *é convergente.*

   *Pode-se mostrar que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ *(veremos mais adiante).*

**Observação 3.6.2**

1. *O teorema pode ser aplicado a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, *isto é, se a seqüência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não negativa, decrescente e tem limite zero então a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *será convergente.*

   *Para ver isto basta observar que série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = (-1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

2. *A condição "*$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *decrescente" necessária, como mostra o seguinte exemplo:*

   *Considere a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} + \cdots$

   *Observemos que ela é divergente pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ *é divergente, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *é convergente.*

   *Mas* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$, *logo divergente.*

   *Observemos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *mas* ***não*** *é decrescente.*

**Exemplo 3.6.3**

1. *Mostremos que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ *é convergente.*

   *De fato, definindo* $a_n \doteq \dfrac{\ln n}{n}$, $n \geq 3$ *temos que:*

   i. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não negativa (isto é,* $a_n \geq 0$, $n \geq 3$*);*

   ii. *A seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente, pois considerando-se* $f(x) \doteq \dfrac{\ln x}{x}$, $x \geq e$ *temos que* $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ *se* $x \geq e$.
   *Logo* $f$ *é decrescente em* $[e,\infty)$ *implicando que a seqüência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *também será.*

   iii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{(L'Hospital)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, *ou seja* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   *Logo, segue do critério da série alternada que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ *é convergente.*

2. *Dada a série numérica* $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ *(que pelo critério da série alternada é convergente) determinemos sua soma com erro menor ou igual* $0,02$ *em valor absoluto.*

   *Sejam* $a_n \doteq \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $S$ *a soma da série* $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ *e* $S_n$ *soma parcial de ordem* $n$ *da série.*

   *Do critério da série alternada segue que* $|S_n - S| \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Escolhamos* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_{n+1} = \frac{1}{n^2} \leq 0,02 = 2\frac{1}{100}$.

   *Por exemplo, se* $n = 9$ *temos que* $a_{10} = \frac{1}{10^2} < 2\frac{1}{100}$.

   *Portanto* $|S_9 - S| \leq a_{10} < 0,02$, *assim* $S_9 = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots - a_9 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{81}$ *aproxima* $S$ *com erro menor que* $0,02$.

## 3.7 Reagrupamento de Séries Numéricas

**Definição 3.7.1** *Dada uma série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é um **reagrupamento** da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se os termos da 2.a forem os termos da 1.a tomados em outra ordem, isto é, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{i_n}$ *para algum* $i_n \in \mathbb{N}$ *e para todo* $m \in \mathbb{N}$, $a_m = b_{j_m}$ *par algum* $j_m \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 3.7.1** *A série numérica* $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots$ *é um reagrupamento da série harmônica alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

*Neste caso:* $b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_5, \cdots$.

Para reagrupamento de séries numéricas com termos não negaticos temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.7.1** *Suponhamos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja convergente e* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Então qualquer reagrupamento,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será convergente.*

*Além disso, se a soma da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* $S$ *então a soma de qualquer reagrupamento seu será* $S$ *(isto é, a soma da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é* $S$*).*

**Demonstração:**

Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as seqüências das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente segue que seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo limitada, isto é, existe $M \geq$ tal que $0 \leq S_n = |S_n| \leq M$ para to $n \in \mathbb{N}$.

Mas $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que a seqüência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

Como $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} \overset{(i \doteq \max\{i_1, i_2, \cdots, i_n\})}{\leq} a_1 + a_2 + \cdots + a_i = S_i \leq M$ segue que a seqüência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Ela é crescente pois $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo será convergente, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

Seja $T$ a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Observemos que $0 \leq T_n \leq S_i$ $(i \doteq \max\{i_1, i_2, \cdots, i_n\})$ logo $0 \leq T \leq S$.

De modo análogo, considerando-se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como um reagrupamento da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ segue que $0 \leq S \leq T$, logo $T = S$, ou seja, a soma das séries são iguais.

□

**Observação 3.7.1** *A condição $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é necessária para a validade do resultado acima como mostra o exemplo a seguir:*

*Considere a série harmônica alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots .$$

*Mostraremos, mais adiante, que sua soma é* $\ln 2$*, isto é,*

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots .$$

*Logo*

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - 0 + \frac{1}{8} + \cdots .$$

*Somando-se com a 1.a temos:*

$$\frac{3}{2}\ln 2 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdots ,$$

*que é um reagrupamento da série harmônica alternada e converge para um valor diferente de* $\ln 2$*, ou seja, um reagrupamento de uma série que converge com para outra soma.*

*Ao final desta secção veremos uma observação que mostrará que em séries do "tipo acima"podemos ter reagrupamentos convergindo para qualquer número real (ou até mesmo divergindo para* $\infty$ *ou* $-\infty$*).*

**12.04 - 12.a**

## 3.8 Séries Absolutamente Convergentes

Temos a

**Definição 3.8.1** *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***absolutamente convergente*** *se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

**Exemplo 3.8.1**

1. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *é absolutamente convergente se* $-1 < c < 1$ *pois neste caso a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |c^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c|^n$ *é convergente (série geométrica de razão* $0 \leq |c| < 1$*).*

2. *A série harmônica alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é* ***não*** *é absolutamente convergente pois a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (série harmônica).*

Para séries numéricas absolutamente convergentes temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.8.1** *Se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, isto é, se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente então a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

**Demonstração:**

Observemos que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ é convergente logo, do critério da comparação, segue que série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ é convergente.

Mas $a_n = (a_n + |a_n) - |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ são convergentes.

Portanto a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será (pois é diferença de duas convergentes).

$\square$

**Observação 3.8.1** *A recíproca do resultado acima é falsa, isto é, existem séries numéricas que são convergentes mas* ***não*** *são absolutamente convergentes, como mostra o seguinte exemplo:* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é convergente (série harmônica alternada) mas não é absolutamente convergente (pois* $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *que é a série harmônica que sabemos ser divergente).*

**Exemplo 3.8.2** *Estudar a convergência das seguintes séries numéricas:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

   *Como a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente (p-série com* $p > 1$*) então a série numérica é absolutamente convergente.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n!}$.

   *Seja* $a_n \doteq \frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n!}$ $n \in \mathbb{N}$.

   *Então* $0 \leq |a_n| = |\frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n!}| \leq \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Mas as série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente, logo do critério da comparação segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n!}|$ *é convergente, ou seja, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n!}$ *é absolutamente convergente.*

## 3.9 Séries Condicionalmente Convergentes

**Definição 3.9.1** *Diremos que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***condicionalmente convergente*** *se a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente mas não converge absolutamente.*

**Exemplo 3.9.1**

1. *A série harmônica alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *é uma série numérica condicionalmente convergente pois ela converge mas não converge absolutamente (isto é, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *converge, mas a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge).*

2. *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ ***não*** *é uma série numérica condicionalmente convergente pois ela converge absolutamente.*

Para finalizar exibiremos um resultado sobre reagrupamento de séries numéricas condicionalmente convergentes, a saber:

**Teorema 3.9.1** *Suponhamos que série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é condicionalmente convergente. Então dado* $-\infty < L < \infty$ *existe um reagrupamento da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *que converge para* $L$ *.*

*Além disso, se* $L = \infty$ *(ou* $L = -\infty$*) então existe um reagurpamento da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *que diverge para* $\infty$ *(ou* $-\infty$*).*

**Demonstração:**

Daremos a seguir uma idéia da demonstração para o caso em que $0 < L < \infty$. Os outros casos são semelhantes.

Como ela é condicionalmente convergente temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Considere $A \doteq \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\} = \{n_1 < n_2 < n_3 \cdots\}$ e $B \doteq \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\} = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$. Afirmamos que $A$ e $B$ são infinitos.

De fato, se um dos dois fosse finito, por exemplo $B$, teríamos somente um número finito de termos negativos (positivos se $A$ fosse finito) e como a série é convergente ela também seria absolutamente convergente o que é um absurdo.

Logo podemos produzir um reagrupamento, $\sum_{n=1}^{\infty} b_m$, da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ da seguinte forma:

$b_1 \doteq a_{n_1}$.

$b_2 = \begin{cases} a_{n_2}, \text{ se } b_1 < L \\ a_{m_1}, \text{ se } b_1 \geq L \end{cases}$

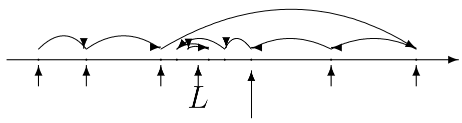
$b_3 = \begin{cases} a_{n_3}, \text{ se } b_1 + b_2 < L \\ a_{m_2}, \text{ se } b_1 + b_2 \geq L \end{cases}$

$b_4 = \begin{cases} a_{n_4}, \text{ se } b_1 + b_2 + b_3 < L \\ a_{m_3}, \text{ se } b_1 + b_2 + b_3 \geq L \end{cases}$

e assim por diante.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (pois a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente) temos que a seqüência das somas parciais da série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_m$ será convergente para $L$.

Veja figura abaixo:




$\square$

# Capítulo 4

# Seqüências de Funções

O objetivo desta secção é introduzir os diversos conceitos de convergência de seqüências, suas propriedades e aplicações.

## 4.1 Seqüências de Funções

Iniciaremos com seqüências de funções e posteriormente trataremos das séries de funções.

**Definição 4.1.1** *Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

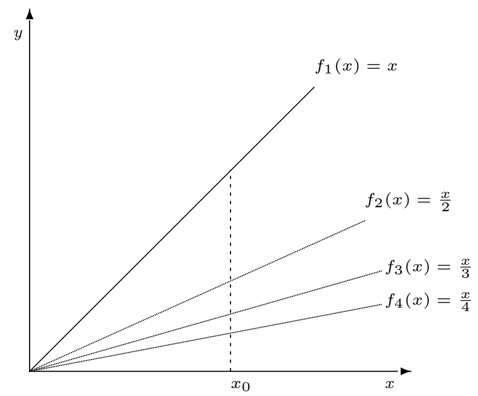
*A aplicação que cada natural $n$ fizermos corresponder uma função $f_n : A \to \mathbb{R}$ será dita* ***seqüência de funções****.*

*As funções $f_n : A \to \mathbb{R}$ serão ditas* ***termos da seqüência*** *(no caso, $n$-ésimo termos da seqüência).*

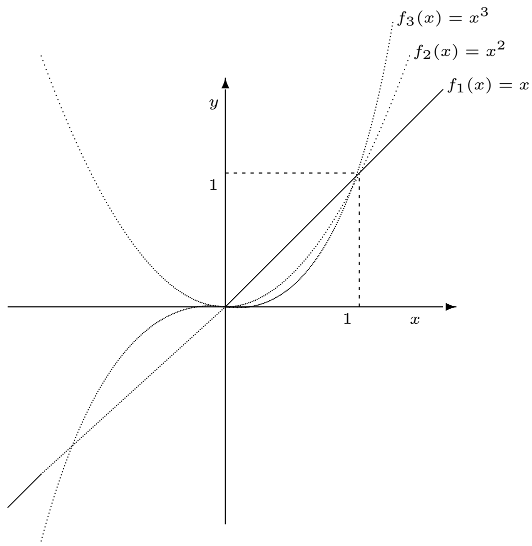
**Notação 4.1.1** *A seqüência de funções acima será indicada por: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $(f_n)$ ou $\{f_n\}$.*

**Exemplo 4.1.1** *Consideremos os seguintes exemplos:*

1. *Consideremos a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $A \doteq [0, \infty)$, $f_n : A \to R$ é dada por $f_n(x) \doteq \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}$, cujos gráficos dos quatro primeiros termos estão na figura abaixo.*



2. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq \mathbb{R}$ *e* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq x^n$, $x \in \mathbb{R}$, *cujos gráficos de* $f_1$, $f_2$ *e* $f_3$ *encontram-se na figura abaixo.*




## 4.2 Convergência Pontual de Seqüências de Funções

**Observação 4.2.1** *Dada uma seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A \to R$, *fixando-se* $x_0 \in A$ *obtemos uma seqüência numérica* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *que pode ou não ser uma seqüência numérica convergente.*

*Baseado nisto temos a seguinte definição:*

**Definição 4.2.1** *Dada a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas em* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$.

*Diremos que a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge em*** $x_0$ *se a seqüência numérica* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente (isto é, existe* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$*).*

*Se para cada* $x \in A$, *a seqüência numérica* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $f(x)$ $(f : A \to \mathbb{R})$ *então diremos que a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge pontualmente (ou ponto a ponto)*** *para a função* $f$ *em* $A$ *(isto é,* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *para cada* $x \in A$*).*

*Neste caso escreveremos* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *pontualmente em* $A$.

**Observação 4.2.2**

1. *Observemos que* $f$ *está univocamente determinada, isto é, é de fato uma função.*

2. *Da definição de convergência de seqüências numérica temos:* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$, *para cada* $x \in A$, *existe* $N_0 \in N$, $N_0 = N_0(\varepsilon, x)$, *tal que para* $n \geq N_0$ *temos* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

3. *Este tipo de convergência de seqüência de funções é chamada de* ***convergência pontual*** *ou* ***convergência ponto a ponto***.

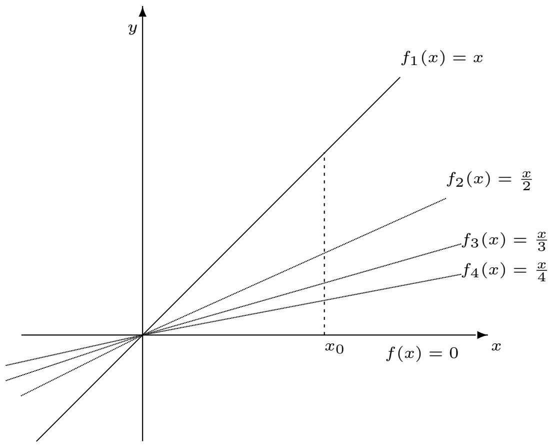
**Exemplo 4.2.1**

1. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq \mathbb{R}$ *e* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq \frac{x}{n}$.

   *Fixado* $x_0 \in \mathbb{R}$ *temos que* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_0}{n} = 0$.

   *Logo, tomando-se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) \doteq 0$, *temos que* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A = \mathbb{R}$ *(isto é, converge pontualmente para* $f$ *e* $A$*).*

   *Veja figura abaixo:*




2. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq [0,1]$ *e* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq x^n$.

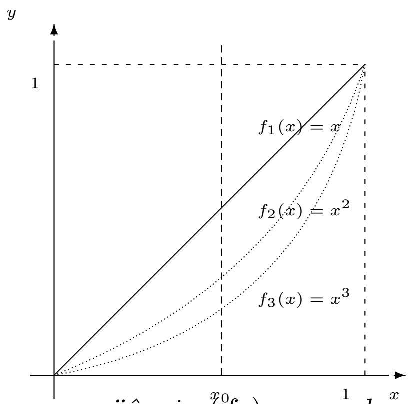
   *Fixado* $x_0 \in A$ *temos que:*

   i. *Se* $x_0 = 1$ *então* $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

   ii. *Se* $0 \le x_0 < 1$ *então*
   $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} x_0^n = 0$.
   *Logo, tomando-se* $f : A \to \mathbb{R}$ *dada por*
   $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$,

   *temos que* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A = [0,1]$ *(isto é, converge pontualmente para a função* $f$ *em* $A$*).*

   *Veja figura abaixo.*

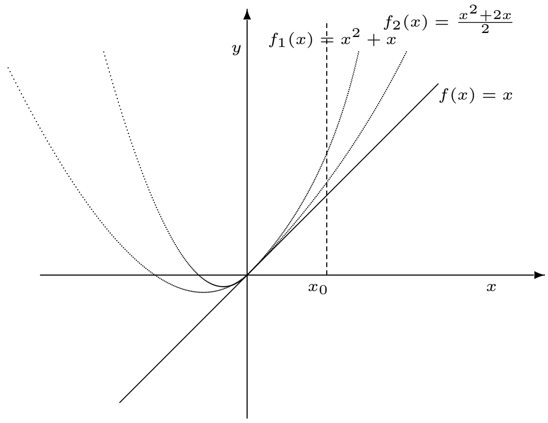



3. *Consideremos a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $A \doteq \mathbb{R}$ e $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) \doteq \dfrac{x^2 + nx}{n}$.*

   *Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_0^2}{n} + x_0 = x_0$.*

   *Logo, tomando-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, temos que $f_n \xrightarrow{p} f$ em $A = \mathbb{R}$ (isto é, converge pontualmente para $f$ em $A$).*

   *Veja figura abaixo.*

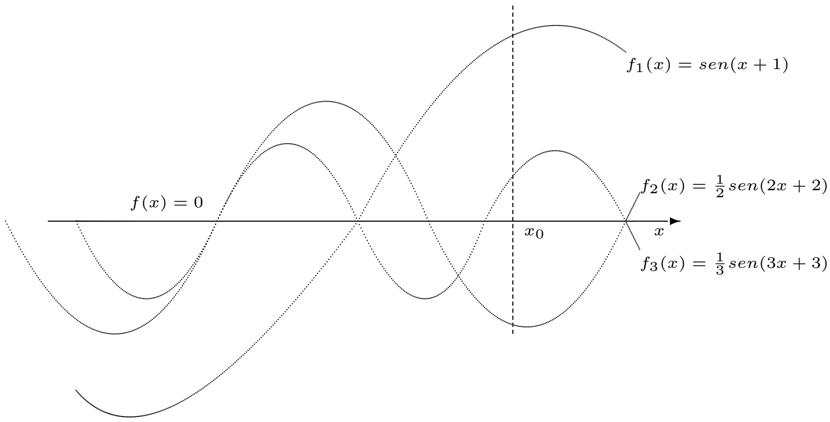



4. *Consideremos a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $A \doteq \mathbb{R}$ e $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) \doteq \dfrac{1}{n} sen(nx + n)$.*

   *Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} sen(nx_0 + n) = 0$.*

   *Logo, tomando-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, temos que $f_n \xrightarrow{p} f$ em $A = \mathbb{R}$ (isto é, converge pontualmente para $f$ em $\mathbb{R}$).*

   *Veja figura abaixo.*




**Observação 4.2.3** *Na definição da convergência pontual podemos observar que o* $N_0 \in \mathbb{N}$ *obtido depende, em geral, do* $\varepsilon > 0$ *e do* $x_0$ *fixado.*

*Será que não podemos eliminar a dependência do* $N_0$ *em relação a* $x_0$ *?*

*A resposta em geral é* ***não*** *como mostra o exemplo 4.3.1 item 1. logo abaixo.*

## 4.3 Convergência Uniforme de Seqüências de Funções

*Quando pudermos tomar* $N_0$ *independente de* $x_0$ *temos a:*

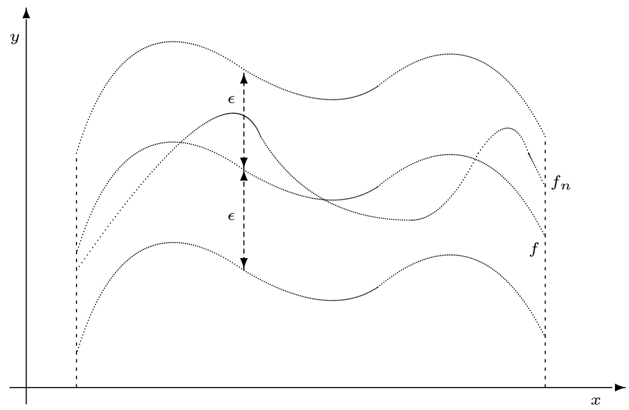
**Definição 4.3.1** *Diremos que uma seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas em* $A \subseteq \mathbb{R}$ *(isto é,* $f_n : A \to \mathbb{R}$*)* ***converge uniformente*** *em* $A$ *para uma função* $f : A \to \mathbb{R}$ *se dado* $\varepsilon > 0$ *existir* $N_0 = N_0(\epsilon) \in N$ *tal que se* $n \geq N_0$ *temos* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$*, para todo* $x \in A$*.*

*Neste caso escreveremos* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* $A$*.*

**Observação 4.3.1**

1. *Notemos que escrever* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *é equivalente a escrever* $-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$ *ou ainda,* $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$*.*

   *Assim, a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz a condição acima se, e somente se, seu gráfico está contido no " tubinho " de raio* $\varepsilon$ *em torno do gráfico da função* $f$ *(vide figura abaixo).*




*Logo, do ponto de vista acima, $f_n \to f$ uniformemente em $A$ se dado $\varepsilon > 0$ existir um $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ o gréfico das funções $f_n$ estão dentro do "tubinho"de raio $\varepsilon$ em torno do gráfico da função $f$.*

**16.04 - 13.a**

2. *Segue imediatamente das definições que convergência uniforme implica em convergência pontual, isto é, se uma seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $A$ para uma função $f$ então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $f$ em $A$.*

   *A recíproca é falsa, isto é, existem seqüências de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente para $f$ em $A$ mas a convergência* ***não*** *é uniforme, como mostram os exemplos 4.3.1 item 1., 3. e 4. a seguir.*

### Exemplo 4.3.1

1. *Consideremos a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $A \doteq \mathbb{R}$ e $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) \doteq \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.*

   *Observe que $f_n \xrightarrow{p} f$ quando $n \to \infty$, onde $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, isto é, a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $f(x) = 0$ em $\mathbb{R}$.*

   *A convergência não é uniforme em $\mathbb{R}$.*

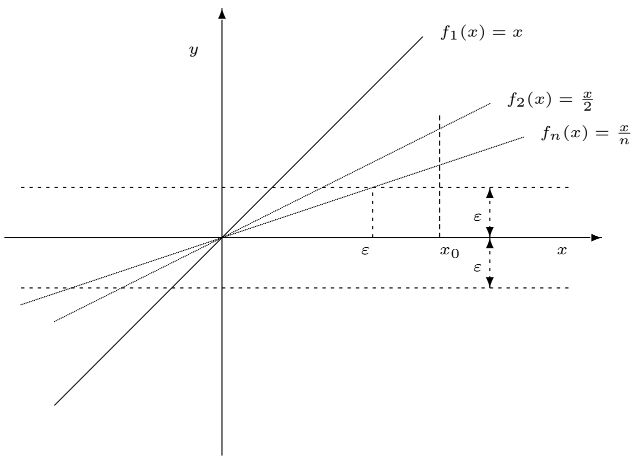
   *De fato, suponhamos, por absurdo, que a $f_n \xrightarrow{u} f$ (isto é, uniformemente em $\mathbb{R}$).*

   *Então, dado $\varepsilon = 1$, deve existir um $N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ teremos $|\frac{x}{n} - 0| < 1$, para todo $x \in R$.*

   *Em particular $|\frac{x}{N_0}| < 1$, para todo $x \in R$ ou, equivalentemente $|x| < N_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é um absurdo (basta escolher $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq N_0$).*

   *Portanto não existe um $N_0 \in N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

   *Logo a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $f$ em $\mathbb{R}$, mas* ***não*** *converge uniforme para $f$ em $\mathbb{R}$ (veja figura abaixo).*




*Observe que se no exemplo acima considerarmos* $A \doteq [a,b]$ *então a convergência será uniforme, como mostra o exemplo a seguir.*

2. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq [0,10]$ *e* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq \frac{x}{n}$, $x \in [0,10]$.

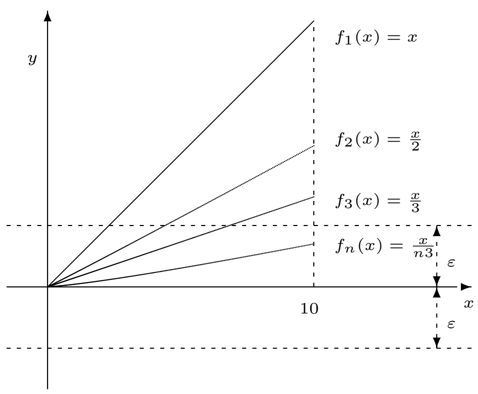
   *Observe que como no caso acima* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A = [0,10]$ *(isto é, pontualmente), onde* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [0,10]$.

   *Analisemos se a convergência é uniforme.*

   *De fato, dado* $\varepsilon > 0$ *tomemos* $N_0 > \frac{10}{\varepsilon}$.

   *Então, se* $n \geq N_0$ *temos* $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x}{n}| \leq \frac{10}{n} \leq \frac{10}{N_0} < \varepsilon$ *para todo* $x \in A$, *mostrando que* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* $A = [0,10]$ *(isto é, a convergência é uniformemente em A).*

   *Veja figura abaixo.*



*Poderíamos desenvolver o mesmo raciocínio considerando um intervalo* $A = [a, b]$ *qualquer.*

3. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq [0,1]$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ *,dada por* $f_n(x) \doteq x^n$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 1 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$

   *Observe que* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A = [0,1]$ *(isto é, pontualemnte), mas a convergência* ***não*** *é uniforme em* $A$.

   *De fato, suponhamos, por absurdo, que a convergência seja uniforme em* $A$, *isto é,* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* $A = [0,1]$.

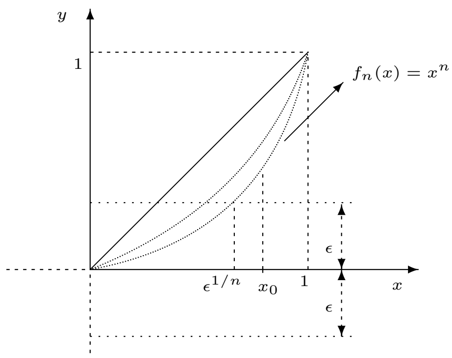
   *Escolhamos* $\varepsilon$ *tal que* $0 < \varepsilon < 1$, *por exemplo* $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

   *Então, deve existir um* $N_0 \in \mathbb{N}$, *tal que se* $n \geq N_0$ *temos* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{3}$ *, para todo* $x \in A = [0,1]$.

   *Observemos que para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $x_0 \in [0,1)$ *tal que* $\varepsilon^{1/n} = \frac{1}{3^n} < x_0 < 1$, *pois* $\frac{1}{3^n} < 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

   *Assim, para* $\frac{1}{3^n} < x_0 < 1$, *temos* $|f_n(x_0) - f(x_0)| = |x_0^n - 0| = x_0^n > (\frac{1}{3^n})^n = \frac{1}{3} = \varepsilon$.

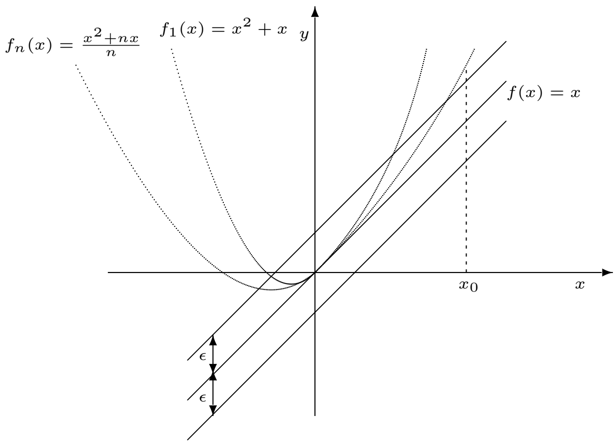
   *Portanto, a convergência não poderá ser uniforme em* $A$.




   *Mais adiante veremos novamente, usando outro procedimento, que esta convergência não poderá ser uniforme.*

4. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq \frac{x^2+nx}{n}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) \doteq x$.

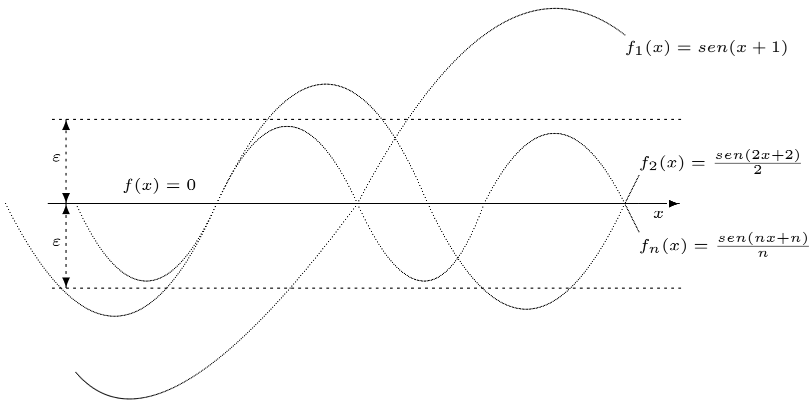
   *Observe que* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $\mathbb{R}$ *(isto é, converge pontualmente para a função* $f$ *em* $\mathbb{R}$ *) mas não converge uniformemente em* $\mathbb{R}$ *(exercício).*




5. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(x) \doteq \dfrac{1}{n} sen(nx+n)$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) \doteq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   *Então* $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* $A = \mathbb{R}$ *(isto é, converge uniformemente para* $f$ *em* $\mathbb{R}$*) (exercício).*

   *Sugestão:* $|\dfrac{1}{n} sen(nx+n)| \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

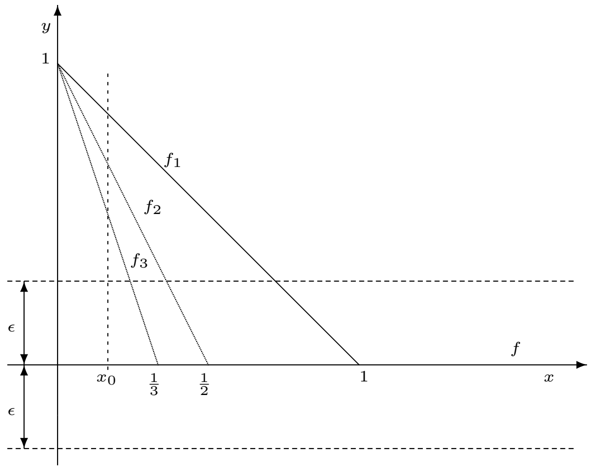



6. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq [0,\infty)$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ *são dadas pelos gráficos abaixo e* $f : A \to \mathbb{R}$ *definida por*

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ se\ x \neq 0 \\ 1 & , \ se\ x = 0 \end{cases}$$

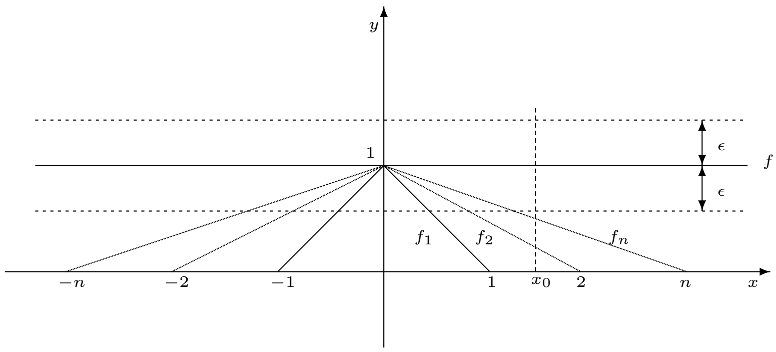
   *Neste caso,* $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $A$ *(isto é, pontualmente) mas a convergência não é uniforme em* $A$.

   *Isto será provado mais adiante.*



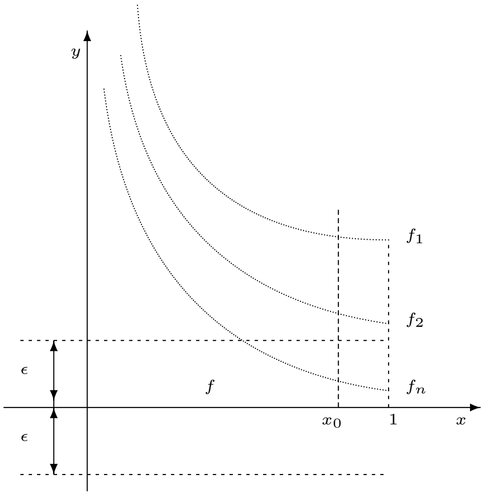

7. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A \doteq \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ *são definidas por:* $f_n(x) \doteq \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & , \text{ se } |x| < n \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq n \end{cases}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 1$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

   *Então* $f_n \to f$ *pontualmente em* $\mathbb{R}$*, mas a convergência não é uniformemente em* $\mathbb{R}$.
   *Isto será mostrado mais adiante.*




8. *Consideremos a seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $A = (0, 1]$, $f_n : A \to \mathbb{R}$*, dada por* $f_n(x) \doteq \frac{1}{nx}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) \doteq 0$*, para todo* $x \in A$.

   *Então* $f_n \to f$ *pontualmente em* $A$*, mas não converge uniformemente em* $A$.
   *De fato, suponhamos, por absurdo, que a convergência fosse uniforme.*
   *Logo, dado* $\epsilon = \frac{1}{2}$*, existiria um* $N_0 \in N$ *tal que para todo* $n \geq N_0$ *teríamos* $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ *para todo* $x \in A = (0, 1]$*, isto é,* $|\frac{1}{nx}| < \frac{1}{2}$*, para todo* $x \in A = (0, 1]$.
   *Em particular,* $|\frac{1}{N_0 x}| < \frac{1}{2}$*, para todo* $x \in A = (0, 1]$ .
   *Assim,* $0 < 1/x < N_0/2$*, para todo* $x \in (0, 1]$*, o que é um absurdo.*
   *Logo não existe tal* $N_0$*, isto é, a convergência não é uniforme em* $A$.




## 4.4 Seqüências de Funções de Cauchy

Em analogia com seqüências numéricas temos a noção de seqüências de Cauchy para seqüências de funções, a saber:

**Definição 4.4.1** *Diremos que uma seqüências de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma* ***seqüência de Cauhy*** *em $A \subseteq \mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$ existir $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A$.*

**Exemplo 4.4.1** *A seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $f_n(x) = \dfrac{sen(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ é uma seqüência de funções de Cauchy em $\mathbb{R}$ pois dado $\varepsilon > 0$ se tomarmos $N_0 > \dfrac{\varepsilon}{2}$ temos que para $n, m \geq N_0$ teremos $|f_n(x) - f_m(x)| = |\dfrac{sen(nx)}{n} - \dfrac{sen(mx)}{m}| \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \overset{(n,m\geq N_0)}{\leq} \dfrac{1}{N_0} + \dfrac{1}{N_0} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.*

Um resultado importante que relaciona convergência uniforme de uma seqüência de funções com a seqüência de funções ser de Caunhy é dado pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.4.1** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções onde $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*A seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (em $A$) se, e somente se, a seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma seqüência de Cauchy.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $A$.

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in A$.

Logo se $n, m \geq N_0$ temos que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para todo $x \in A$, mostrando que a seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy então para cada $x \in A$ a seqüência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma seqüência numérica de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto convergente em $\mathbb{R}$, isto é, para cada $x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$, ou seja, $f_n \xrightarrow{p} f$ em $A$.

Precisamos mostrar que a convergência acima (que é pontual) é uniforme em $A$.

Como a seqüência de funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ temos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

Fixando-se $x \in A$ e passando o limite quando $m \to \infty$ obtemos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$, ou seja, $f_n \xrightarrow{u} f$ em $A$.

$\square$

**Exemplo 4.4.2** *A seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do exemplo (4.4.1) converge uniformemente para a função $f$, onde $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pois ela converge pontualmente para $f$ e a seqüência de funções é de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

**Observação 4.4.1** *O resultado acima é conhecido como o* ***Critério de Cauchy para convergência uniforme****.*

## 4.5 Propriedades da Convergência Uniforme de Seqüências de Funções

A seguir daremos algumas aplicações importantes da convergência uniforme de seqüências de funções.

Começaremos observando que no exemplo acima $f_n \xrightarrow{u} f$, as funções $f_n$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e a função $f$ também é contínua em $\mathbb{R}$.

Isto ocorre em geral, como afirma o resultado a seguir:

**Teorema 4.5.1** *Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma seqüência de funções contínuas em $A \subseteq \mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f$ em $A$.*

*Então $f$ é contínua em $A$.*

*Isto é, para cada $x_0 \in A$ temos*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*ou ainda:*

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x), \textit{ para todo } x_0 \in A.$$

<u>**Demonstração:**</u>

Precisamos mostrar que $f$ é contínua para cada $x \in A$.

Faremos a demonstração quando $x \in \overset{\circ}{A}$.

No caso de $x$ ser um ponto de fronteira de $A$ fazemos simples adaptações do processo abaixo.

Isto será deixado como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, do fato que $f_n \to f$ uniformemente em $A$, segue que existe $N_0 = N_0(\epsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ , para todo $y \in A$.

Em particular, $|f_{N_0}(y) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ , para todo $y \in A$.

Como $f_{N_0}$ é contínua em $x$, existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $|f_{N_0}(x+h) - f_{N_0}(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Assim, se $|h| < \delta$ temos:

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f_{N_0}(x+h) + f_{N_0}(x+h) - f_{N_0}(x) + f_{N_0}(x) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f_{N_0}(x+h)| + |f_{N_0}(x+h) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, isto é, $f$ é contínua em $x$.

□

**Observação 4.5.1** *Observemos que se $f_n \xrightarrow{u} f$ em $A$ e $f_n$ é contínua em $x_0$ então* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) \overset{(Teorema)}{=} \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Uma outra aplicação importante da convergência uniforme de seqüência de funções é dado pelo:

**Teorema 4.5.2** *Suponhamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma seqüência de funções contínuas em $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$.*

*Então $f$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

*ou seja,*

$$\int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

**Demonstração:**

Como a convergência é uniforme e as $f_n$ são contínuas segue, do resultado anterior, que $f$ é contínua logo integrável em $[a,b]$.

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$.

Logo, se $n \geq N_0$, temos:

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx| &= |\int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dx = \epsilon
\end{aligned}$$

Isto é, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

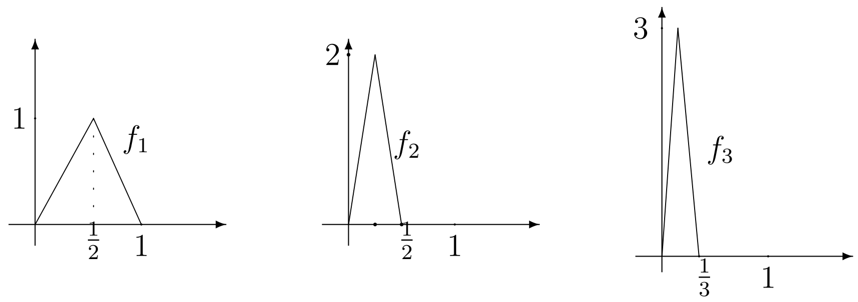
$\square$

**Observação 4.5.2**

1. *O resultado acima nos dá condições suficientes para podermos trocar um limite com uma integral definida.*

3. *Podemos provar um resultado análogo ao acima substituindo-se a hipótese de continuidade por integrabilidade das $f_n$'s.*

2. *O resultado pode* ***não*** *ser verdadeiro se retirarmos a hipótese da convergência ser uniforme como mostra o exemplo abaixo.*




*Observemos que $f_n \xrightarrow{p} f$ em $[0,1]$ onde $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.*

*Assim $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.*

*Mas $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$ (pois a área da região delimitada pelo gráfico das funções $f_n$ é $\frac{1}{2}$).*

*Portanto $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$.*

**Observação 4.5.3**

*Tendo em vista os dois teoremas acima, podemos pensar que algo semelhante deve ocorrer para a diferenciação de seqüências de funções.*

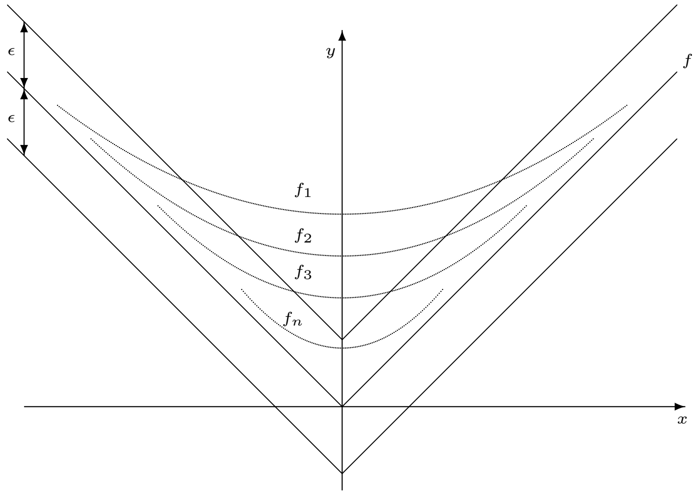
*Isto é: se $(f_n)$ é uma seqüência de funções diferenciáveis em $[a,b]$ e converge uniformemente para $f$ em $[a,b]$ então $f$ é diferenciável em $[a,b]$ e $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.*

*Infelizmente isto* ***não*** *é verdade em geral, como mostram os exemplos abaixo.*

**Exemplo 4.5.1**

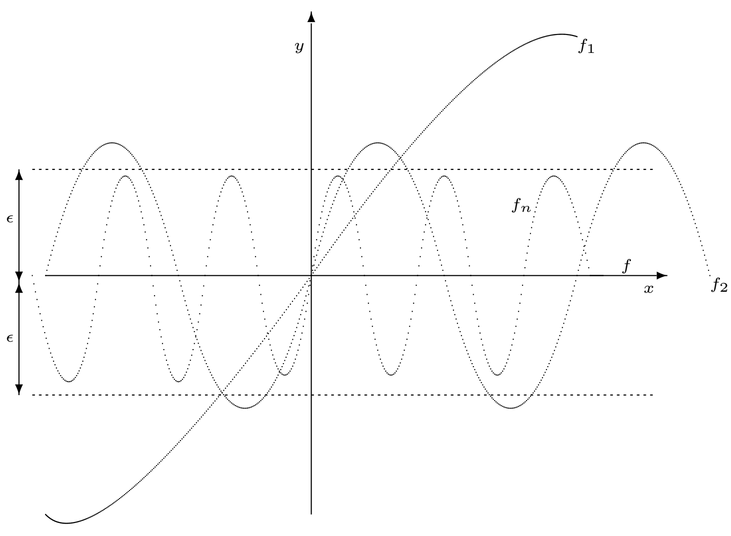
1. *Considere a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas pelos seus gráficos abaixo, definidas em $\mathbb{R}$ e $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.*

   *Observe que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $\mathbb{R}$ (exercício) e que apesar das $f_n$ serem todas diferenciáveis $f$ não é (pois não é diferenciável em $x = 0$).*




2. *Consideremos* $f_n : \mathbb{R} \to R$ *dada por* $f_n(x) = \frac{1}{n} sen(n^2 x)$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   *Observemos que apesar de* $f_n \to f$ *uniformemente em* $\mathbb{R}$ *(exercício) e* $f$ *ser diferenciável, não temos* $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$, *pois* $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$ *e este limite nem sempre existe (por exemplo, ele não existe quando* $x = 0$*).*




Para resolver este problema temos o:

**Teorema 4.5.3** *Suponhamos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma seqüência de funções continuamente diferenciáveis em* $[a,b]$ *e para algum* $x_0 \in [a,b]$ *a seqüência numérica* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

*Se a seqüência* $(f'_n)$ *converge uniformemente para alguma função* $g$ *em* $[a,b]$*, então a seqüência* $(f_n)$ *converge uniformemente para uma função* $f$ *em* $[a,b]$*,* $f$ *é continuamente diferenciável em* $[a,b]$ *e* $f'(x) = g(x)$*, para todo* $x \in [a,b]$*, isto é:*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

**Demonstração:**

Como $f'_n \to g$ uniformemente em $[a,b]$ e as $f_n$ são contínuas em $[a,b]$, então do teorema 4.5.1 temos que $g$ é contínua em $[a,b]$.

Como $(f_n(x_0))$ converge para algum valor, digamos $c \in R$, então dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in N$ tal que se $n \geq N_1$ então

$$|f_n(x_0) - c| < \frac{\epsilon}{2}$$

Defina $f : [a,b] \to R$ por

$$f(x) \doteq c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $f$ é continuamente diferenciável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, pois $g$ é contínua em $[a,b]$.

Mostremos que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$.

Do fato que $f'_n \to g$ uniformemente em $[a,b]$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $N_2 = N_2(\epsilon) \in N$, tal que $|f'_n(x) - g(x)| < \dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$, para todo $n \geq N_2$.

Se $n \geq \max(N_1, N_2)$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da convergência uniforme da seqüência de funções $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt - c - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt| \\
&\leq |f_n(x_0) - c| + |\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt| \\
&\leq |f_n(x_0) - c| + \int_{a}^{b} |f'_n - g(t)|\, dt \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon
\end{aligned}$$

mostrando que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$.

$\square$

**Observação 4.5.4** *Podemos provar um resultado análogo trocando-se a hipótese da seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ser continuamente diferenciável em* $[a,b]$ *para apenas diferenciável em* $[a,b]$*.*

**Exemplo 4.5.2** *Consideremos a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde* $f_n(x) = \dfrac{sen(nx)}{n^2}$, $x \in [0, 2\pi]$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

*Observemos que* $f_n$ *é continuamente diferenciável (na verdade* $C^\infty$*) em* $[0, \pi]$ *(em geral, em toda reta* $\mathbb{R}$*).*

*Temos que* $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$, $x \in [0, 2\pi]$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

*Se definirmos* $g(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$, *utilizando o critério de Cauchy, podemos mostrar que* $f_n' \stackrel{u}{\to} g$ *em* $[0, 2\pi]$ *(exercício).*

*Como* $f_n(0) = 0$ *temos que a seqüência numérica* $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

*Logo o teorema acima nos garante que* $f_n \stackrel{u}{\to} f$ *em* $[0, 2\pi]$.

*Além disso segue que* $f'(x) = g(x) = 0$ *para todo* $x \in [0, 2\pi]$, *assim* $f$ *é constante em* $[0, 2\pi]$.

*Mas* $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, *portanto* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [0, 2\pi]$.

# Capítulo 5

# Séries de Funções

$\boxed{\textbf{19.04 - 14.a}}$

## 5.1 Séries de Funções

**Definição 5.1.1** *Dada uma seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas em* $A \subseteq \mathbb{R}$ *podemos construir uma outra seqüência de funções,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tal que*

$$S_n(x) \doteq f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \;\; x \in A, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

*Tal seqüência é denominada* ***série de funções*** *associada à seqüência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e indicada por* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *(ou* $\sum f_n$*).*

**Observação 5.1.1**

1. *Observemos que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *pode ser olhada como uma soma infinita de funções, isto é,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$, $x \in A$.
2. *A seqüência de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(que é a série) também será denomindada de* ***seqüência das somas parciais*** *da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

   *Cada termo dessa seqüência (ou da série),* $S_n$*, será dito* ***soma parcial de ordem*** $n$ *da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

   *As funções* $f_n$ *serão ditas* ***termos da série*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

**Exemplo 5.1.1**

1. *Seja a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = x^n$, $x \in (-1,1)$ *e* $n \in \mathbb{N}$.
   *Então a série de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *terá como termos:*
   $S_1(x) = f_1(x) = x,$
   $S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + x^2,$
   $S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x + x^2 + x^3,$
   $\vdots,$
   $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$
   $\vdots,$
   *ou seja,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots,\ x \in (-1,1).$

2. *Seja a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.
   *Então a série de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *terá como termos:*
   $S_1(x) = f_1(x) = x,$
   $S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + \dfrac{x}{2},$
   $S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3},$
   $\vdots,$
   $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) = x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \cdots + \dfrac{x}{n},$
   $\vdots,$
   *ou seja,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \cdots = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}.$

3. *Seja a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.
   *Então a série de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *terá como termos:*
   $S_0(x) = f_0(x) = 1,$
   $S_1(x) = f_1(x) = x,$
   $S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = x + \dfrac{x^2}{2!},$
   $S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!},$
   $\vdots,$
   $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!},$
   $\vdots,$
   *ou seja,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$

**Observação 5.1.2** *Para cada* $x_0 \in A$ *a série* $(S_n(x_0))$ *é uma série numérica.*
*Logo podemos verificar esta é convergente ou não.*

## 5.2 Convergência Pontual de Séries de Funções

*Lembremos que podemos estudar a convergência de uma seqüências de funções de, pelo menos dos modos: convergência pontual e convergência uniforme.*

*Como uma série de funções é uma seqüência de funções "especial"podemos estudar sua convergência nesses dois sentidos.*

*Mais especificamente, temos a:*

**Definição 5.2.1** *Considere a seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definia em $A \subseteq \mathbb{R}$.*

*Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ onde a* ***converge pontualmente para*** $f$ ***em*** $A$ *se a seqüência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $f$, isto é, se para cada $x \in A$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$.*

*Neste caso diremos que $f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$ é a* ***soma da série*** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *e denotaremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \doteq f$ em $A$.*

**Observação 5.2.1** *No caso acima, símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ denotará duas coisas diferentes, a saber: a série de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (isto é, a seqüência das somas parciais associada a mesma) e a função que é a sua soma (o limite da seqüência das somas parciais), caso exista.*

**Exemplo 5.2.1**

1. *Seja a seqüência de funções $(f_n)_{n\in\{0\}\cup N}$ dada por $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ e $n \in \{0\} \cup N$.*

   *Então a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é convergente pontualmente em $[0,1)$ pois para cada $x_0 \in [0,1)$ fixado a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} x_0^n$ é uma série geométrica de razão $x_0 \in [0,1)$, portanto convergente.*

   *Além disso, sabemos que neste caso, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in [0,1)$, ou seja, a soma da série será a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in [0,1)$.*

   *A série de funções não é pontualmente convergente em $x = 1$, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pontualmente para $x \in [0,1)$.*

2. *Seja a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

   *Então a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ *não é convergente pontualmente em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *pois para cada* $x_0 \neq 0$ *fixado a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n} = x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *e a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (série harmônica).*

   *Logo a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$ *só converge em* $x = 0$.

3. *Se a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

   *A série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente pontualmente em toda a reta* $\mathbb{R}$.

   *De fato, se* $x_0 \geq 0$ *então definindo-se* $a_n = \dfrac{x_0^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 < 1.$

   *Logo, do critério da razão para séries numéricas, segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ *é convergente se* $x_0 \geq 0$.

   *Se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *em geral, a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ *é absolutamente convergente (isto é,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_0^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_0|^n}{n!}$ *pois* $|x_0| \geq 0$*).*

   *Mas se uma série numérica é absolutamente convergente ela será convergente (critério da convergência absoluta de séries numéricas).*

   *Portanto a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge pontualmente em toda a reta* $\mathbb{R}$.

   *Veremos mais adiante que a soma dessa série de funções será a função* $e^x$, *isto é,* $\displaystyle e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

## 5.3 Convergência Uniforme de Séries de Funções

**Definição 5.3.1** *Diremos que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge uniformemente*** *para* $f$ *em* $A$ *se a seqüência de funções* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* $f$ *em* $A$.

Antes de exibirmos alguns exemplos de convergência de séries de funções daremos alguns resultados que serão úteis em várias situações.

O primeiro deles é conseqüência imediata dos resultados vistos sobre convergência uniforme de seqüência de funções, a saber:

**Corolário 5.3.1** *Considere* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *série de funções uniformemente convergente para a função* $f$ *em* $[a,b]$ *(isto é,* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *onde a convergência é uniforme em* $[a,b]$*) .*

1. *Se cada uma das funções* $f_n$ *for contínua em* $[a,b]$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $f$ *será contínua em* $[a,b]$*, isto é,*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
*ou ainda*
$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

2. *Se* $f$ *e as* $f_n$ *forem contínuas em* $[a,b]$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
*isto é,*
$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$
*ou ainda, a série pode ser integrada termo a termo.*

3. *Suponha que as* $f_n$ *sejam continuamente diferenciáveis em* $[a,b]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se para algum* $x_0 \in [a,b]$ *a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *converge e a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente para uma função* $g$ *em* $[a,b]$ *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para uma função* $f$ *em* $[a,b]$*, onde* $f$ *é continuamente diferenciável em* $[a,b]$ *e* $f' = g$*, isto é,*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$
*ou*
$$\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$
*ou seja, a série pode ser derivada termo a termo.*

**Demonstração:**

De 1.:

Como as $f_n$ são contínuas, temos que $S_n = f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ também serão (pois é uma soma finita de funções contínuas).

Mas a seqüência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f$.

Logo, do teorema (4.5.1), segue que $f$ é contínua em $[a, b]$.

De 2.:

Dizer que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para $f$ em $[a, b]$ é dizer que a seqüência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f$ em $[a, b]$.

Então, segue do teorema (4.5.2), que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(t)\,dt \\
&= \int_a^b \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt \overset{(\text{ teor } 4.5.2)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt = \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

De 3.:

Dizer que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge em $x_0 \in [a, b]$ é dizer que a seqüência numérica $(S_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Além disso, como a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente para $g$ em $[a, b]$, temos que a seqüência de funções $(S_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g$ em $[a, b]$ (pois $S_n'(x) = \dfrac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \overset{(\text{soma finita})}{=} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$) .

Logo, do teorema (4.5.3), segue que a seqüência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $f$ em $[a, b]$ e $f' = g$, isto é,

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

□

**Observação 5.3.1**

1. *O corolário acima trata de algumas conseqüências da convergência uniforme de séries de funções.*

   *Sem a presença da convergência uniforme as conclusões do resultado podem não ocorrer.*

2. *No corolário acima no item 2. basta que as funções $f_n$ e $f$ sejam integráveis em $[a,b]$.*

   *No item 3. basta que as funções $f_n$ sejam diferenciáveis em $[a,b]$.*

3. *Um resultado extremamente importante, que nos dá condições suficientes para assegurar a convergência uniforme de séries de funções, é o:*

**Teorema 5.3.1** *(**Critério de Weierstrass ou Teste M. de Weierstrass**)*
*Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções definidas em $A \subseteq \mathbb{R}$.*

*Suponhamos que exista uma seqüência numérica $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n\,, \text{ para todo } x \in A,\, n \in \mathbb{N}.$$

*Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente, então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta e uniformemente para uma função $f$ em $A$.*

**Demonstração:**

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, segue, do critério da comparação, que para cada $x \in A$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Logo, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente para uma função $f$ em $A$, isto é, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Para todo $x \in A$ temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= |\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n. \end{aligned}$$

Como a série numérica converge, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$, então $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$, assim, para $n \geq N_0$ temos:

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon\,, \text{ para todo } x \in A$$

o que implica, pelo critério de Cauchy, que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para $f$ em $A$.

□

A seguir aplicaremos os resultados acima para estudar a convergência pontual e uniforme de algumas séries de funções.

**Exemplo 5.3.1**

1. *Considere* $A = [-1, 1]$ *e* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n = 0, 1, 2, \cdots$.

   *Observemos que para todo* $x \in A = [-1, 1]$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$|f_n(x)| = |\frac{x^n}{2^n}| = \frac{|x^n|}{2^n} = \frac{|x|^n}{2^n} \overset{(|x|\leq 1)}{\leq} \frac{1}{2^n}.$$

   *Mas a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *converge (série geométrica de razão* $\dfrac{1}{2}$*).*

   *Então, do critério de Weierstrass (tome* $M_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$*), segue que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ *converge uniformemente e absolutamente para uma função* $f$ *em* $[-1, 1]$.

   *Observemos que do corolário (5.3.1) item 1. segue que a função* $f$ *é contínua em* $[-1, 1]$ *(pois* $f_n$ *é contínua* $n \in \mathbb{N}$ *e a convergência da série de funções é uniforme em* $[-1, 1]$*).*

   *Neste caso podemos obter a função* $f$ *explicitamente observando que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n \overset{(\text{série geométrica de razão } \frac{x}{2})}{=} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2 - x},$$

   *isto é, a soma da série é a função* $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}$, $x \in [-1, 1]$.

   *Na verdade podemos mostrar que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \frac{2}{2 - x}$ *pontualmente para todo* $x \in (-2, 2)$ *e a convergência será uniforme em qualquer intervalo* $[a, b] \subseteq (-2, 2)$.

2. *A série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge uniformemente em qualquer intervalo da forma* $[-a, a]$, *onde* $a > 0$.

   *De fato, se* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in [-a, a]$, *temos*

$$|f_n(x)| = |\frac{x^n}{n!}| = \frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x|^n}{n!} \overset{(|x|\leq a)}{\leq} \frac{a^n}{n!}, \text{ para todo } x \in [-a, a],\, n \in \mathbb{N}.$$

*Do critério da razão para séries numéricas, segue que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ *converge (feito anteriormente).*

*Assim, segue do critério de Weierstrass (tome* $M_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$*) que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge uniformemente em* $[-a, a]$ *para qualquer* $a > 0$.

3. *A série de funções* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{3^n}$ *é uniformemente convergente em* $\mathbb{R}$.

   *Em particular,* $f$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

   *De fato, se* $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{3^n}$ *temos:*

$$|\frac{sen(nx)}{3^n}| = \frac{|sen(nx)|}{3^n} \overset{(|sen(nx)| \leq 1)}{\leq} \frac{1}{3^n}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ todo } n \in \mathbb{N}.$$

   *A série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *converge ( série geométrica de razão* $1/3$*).*

   *Logo, do critério de Weiestrass (tome* $M_n = \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$*), segue que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{3^n}$ *converge uniformemente em* $\mathbb{R}$ *para uma função* $f$ *(que será contínua pelo corolário (5.3.1) item 1.).*

4. *Mostrar que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$ *pode ser derivada termo a termo em* $\mathbb{R}$.

   *Para isto considere* $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Observemos que as* $f_n$ *são continuamente diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *e* $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   *Além disso, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ *converge para* $0$*, (pois* $f_n(0) = 0$*).*

   *Como*

$$|f_n'(x)| = |\frac{\cos(nx)}{n^2}| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \overset{(|\cos(nx)| \leq 1)}{\leq} \leq \frac{1}{n^2}$$

   *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *então, do critério de Weierstrass (tome* $M_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$*) , segue que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente para uma função* $g$ *em* $\mathbb{R}$.

*Portanto, do corolário 5.3.1 item 3., segue que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^3}$ *converge uniformemente para uma função* $f$ *que é continuamente diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e que satisfaz* $f' = g$.

*Isto é, a série de funções pode ser derivada termo a termo, ou seja*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^3}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\Big(\frac{sen(nx)}{n^3}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

*para todo* $x \in \mathbb{R}$.

**23.04 - 15.a**

5. *Calcule* $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2} dx$.

*A série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ *converge uniformemente em* $\mathbb{R}$, *pois*

$$\Big|\frac{sen(nx)}{n^2}\Big| = \frac{|sen(nx)|}{n^2} \overset{(|sen(nx)|\leq 1)}{\leq} \frac{1}{n^2}$$

*para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

*Como a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente temos, do critério de Weierstrass, que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ *é uniformemente convergente em* $\mathbb{R}$ *para uma função* $f$ *que é contínua em* $\mathbb{R}$ *(corolário (5.3.1) item 1.).*

*Logo, do corolário (5.3.1) item 2., segue que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ *pode ser integrada termo a termo em qualquer intervalo limitado e fechado da reta, ou seja,*

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{sen(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(nx)}{n^3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^3},$$

*ou seja,*

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^3}.$$

6. *Calcule* $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$, $|x| < 1$.

*A série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ *converge uniformemente em* $[-a, a]$ *para todo* $0 < a < 1$ *fixado (exercício).*

*Logo, do corolário (5.3.1) item 2., segue que a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ *pode ser integrada termo a termo em qualquer intervalo limitado e fechado contido no intervalo* $[-a,a]$*, ou seja,se* $x| < 1$ *temos que*

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1.$$

*Observemos que* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^n = \dfrac{1}{1+t^2}$.

*Logo, se ,* $|x| < 1$ *temos que* $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt = arctg(x)$*, isto é,*

$$arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1.$$

***Observação 5.3.2*** *Observemos que* $f(x) = arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$ *é um função ímpar* ($f(-x) = -f(x)$, $x \in (-1,1)$) *e a sériede funções acima que representa* $f$ *só tem potências ímpares de* $x$*.*

*Como veremos no próximo capítulo isso ocorre em geral, isto é, se uma função for ímpar (par) e possuir uma representação em série de potências de* $x$ *então a série do tipo acima (isto é, de potência) só tem potências ímpares (pares) (ou seja, os coeficientes das potências pares (ímpares) são zero).*

*Notemos também que como*

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots$$

*segue que*

$$\frac{\pi}{4} = arctg(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1},$$

*como havíamos afirmado anteriormente.*

7. *Mostraremos que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

*Para isto observemos que se definirmos* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então* $f_n$ *será continuamente diferenciável em* $\mathbb{R}$.

*Além disso temos* $\dfrac{d}{dx}f_n(x) = \dfrac{d}{dx}\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

*Dado $a > 0$, para $x \in [-a, a]$ temos que*

$$|f_n'(x)| = |\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}| = \frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!} = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \overset{|x|\leq a}{\leq} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Mas a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ *é convergente (exercício).*

*Portanto do critério de Weierstrass, segue que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ *é uniformemente convergente em* $[-a, a]$.

*Como a série numérica* $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!}$ *converge (para* $1$*) segue do corolário (5.3.1) item 2., que a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *pode ser derivada termo a termo em* $[-a, a]$ *para todo* $a > 0$*, isto é, para* $x \in [-a, a]$ *temos que*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x),$$

*ou seja, a função* $f$ *deve satisfazer a equação diferencial* $f'(x) = f(x)$, $x \in [-a, a]$ *para todo* $a > 0$.

*Do Cálculo I sabemos que se uma função satisfaz* $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *então ela deverá ser* $f(x) = ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, *para algum* $c \in \mathbb{R}$.

*Mas* $c = f(0) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$, *logo* $c = 1$ *portanto* $f(x) = e^x$, *ou seja*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

*Em particular, fazendo* $x = 1$ *temos que*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

*como havíamos afirmado anteriormente.*

Tópicos adicionais, bem como outros exemplos e resultados podem ser encontrados na bibliografia mencionada no fim destas notas.

**1.a Prova - Até aqui**

# Capítulo 6

# Séries de Potências

Neste capítulo estudaremos uma classe especial de séries de funções, denominadas **séries de potências**.

As perguntas que serão respondidas aqui estarão relacionadas com os seguintes tópicos:

1. Quando podemos aproximar uma função "bem comportada"(por exemplo de classe $C^\infty$) por um polinômio de um grau dado em algum intervalo $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$?

2. Como obter esse polinômio (seus coeficientes)?

Como veremos, a noção de "estar próximo de"estará intimamente ligada a noção de convergência de seqüência (mais expecificamente, séries) de funções tratada no capítulo anterior.

Na verdade o que faremos a seguir é tratar, entre outras, das questões colocadas acima.

Começaremos com a introdução do objeto principal do estudo desse capítulo, a saber:

## 6.1 Séries de Potências

**Definição 6.1.1** *Um série de funções do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

*onde $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, será denominada* ***série de potências*** *de $x$ (ou centrada em $0$).*

*Mas geralmente, uma série do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

*onde $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, será denominada* ***série de potências*** *de $(x-c)$ (ou centrada em $c$).*

*Os números reais $a_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ serão ditos* ***coeficientes da série de potência****.*

**Observação 6.1.1** *Uma série de potências é um caso particular de série de funções.*

*De fato, basta considerar a seqüência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde as funções* $f_n$ *são dadas por* $f_n(x) = a_n x^n$ *(ou* $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ *se for centrada em* $c$*),* $n = 0, 1, 2, \cdots$.

**Exemplo 6.1.1**

1. *A série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é uma série de potências de* $x$.

   *Seus coeficientes são* $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

2. *A série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)}$ *é uma série de potências de* $(x-1)$.

   *Seus coeficientes são* $a_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ *e* $a_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

3. *A série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n+1}$ ***não*** *é uma série de potências.*

## 6.2 Convergência Pontual de Séries de Potências

A seguir passaremos a estudar a convergência das séries de potências.

**Observação 6.2.1** *Observemos que uma série de potências de* $x$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *sempre converge quando* $x = 0$ *(pois* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$*).*

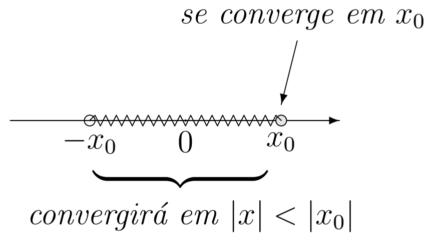
*De modo análogo, uma série de potências de* $(x-c)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, *sempre converge quando* $x = c$ *(pois* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n = a_0$*).*

Começaremos estudando as séries de potências de $x$ (centradas em 0) e mais tarde trataremos do caso das séries de potências de $(x-c)$ (ou centradas em $c$).

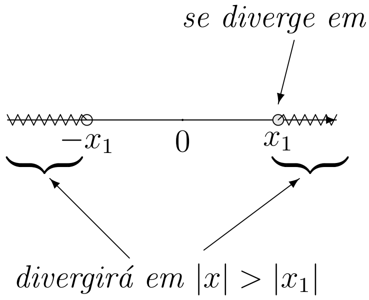
Um primeiro resultado importante é o,

**Teorema 6.2.1** *Consideremos a séries de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $x_0$, $x_1 \neq 0$.

1. *Se a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ *for convergente então a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *será absolutamente convergente para todo* $x$ *tal que* $|x| < |x_0|$.




2. *Se a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ *for divergente então a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *será divergente para todo* $x$ *tal que* $|x| > |x_1|$.




**Demonstração:**

De 1.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ é convergente e $x_0 \neq 0$, logo $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, assim a seqüência $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $|x| < |x_0|$ então $|a_n x^n| \overset{x_0 \neq 0}{=} |a_n x_0^n| |\frac{x^n}{x_0^n}| \leq M |\frac{x}{x_0}|^n = M r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $r \doteq |\frac{x}{x_0}| < 1$ (pois $|x| < |x_0|$).

Como $0 \leq r < 1$ segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente (pois é uma série geométrica de razão, $r$, menor do que 1).

Segue do critério da comparação para séries numérica que para $|x| < |x_0|$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ é convergente, portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ será absolutamente convergente para $|x| < |x_0|$.

De 2.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ é divergente.

Suponhamos, por absurdo, que para algum $x_2$, $|x_2| > |x_1|$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ seja convergente.

Então por 1. segue que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ será convergente em $|x| < |x_2$, o que é um absurdo pois $x_1$ pertence a esse intervalo e a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ é divergente.

Portanto a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ será divergente em $|x| > |x_1|$.

$\square$

**Observação 6.2.2** *A primeira parte do teorema acima nos diz que se uma série de potências converge num ponto (diferente de zero) ela convergirá pontualmente em todo ponto do intervalo simétrico em relação a origem, aberto e de amplitutide igual ao modo do ponto onde ela converge.*

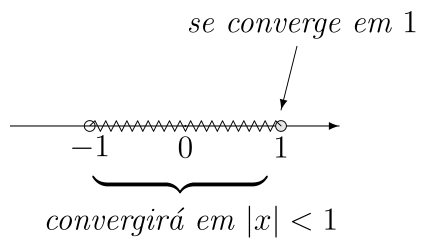
*Isso é uma propriedade intrínseca das séries de potências.*

*Séries de funções em geral* ***não*** *têm essa propriedade, como por exemplo, a série de funções (que não é uma série de potências)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen(nx)$ *converge nos pontos* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Exemplo 6.2.1**

1. *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente em* $x_0 = 1$, *pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente.*

   *Logo do teorema acima item 1., segue que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *será absolutamente convergente em* $|x| < |x_0| = 1$.

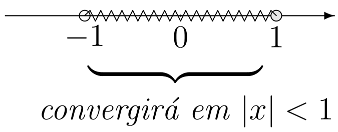



2. *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é convergente em* $0 < x_0 < 1$, *pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_0^{2n}$ *é convergente.*

   *De fato,* $|(-1)^n x_0^2| \leq x_0^2 \doteq r < 1$, *e a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *é convergente, pois é uma série geométrica de razão* $r$ *menor que* 1.

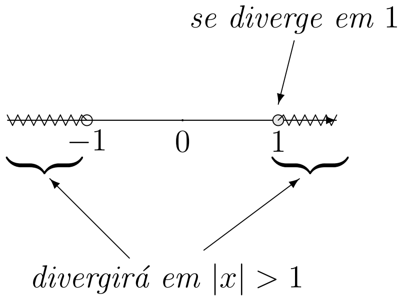
*Logo, do teorema da comparação segue que a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0^{2n}$ *é convergente.*

*Do teorema acima item 1., segue que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *será absolutamente convergente em* $|x| < |x_0| < 1$*, isto é, em* $|x| < 1$*.*

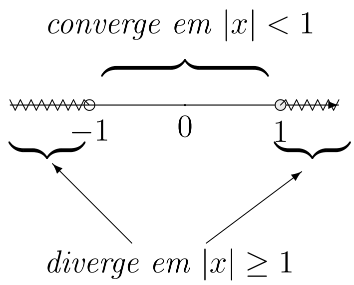



*Por outro lado a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $x_1 = 1$ *(pois a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ *é divergente).*

*Do teorema acima item 2. segue que a a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $|x| > |x_1| = 1$*, isto é, é divergente em* $|x| > 1$*.*
*Além disso é fácil de ver (exercício) que ela é divergente em* $x_1 = -1$*.*




*Com isto temos a seguinte situação:*




Em geral temos a seguinte situação:

**Teorema 6.2.2** *Dada a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

1. *a série de potências só converge em* $x = 0$*;*
2. *a série de potências converge absolutamente em toda a reta* $\mathbb{R}$*;*
3. *existe* $R > 0$ *tal que a série de potências é absolutamente convergente em* $|x| < R$ *e divergente em* $|x| > R$*.*

**Demonstração:**

Se o item 1. ocorrer, 2. e 3. não ocorrerão.

Vamos super que o item 1. não ocorre, ou seja existe $x_0 \neq 0$ tal que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ seja convergente.

Logo do item 1. do teorema anterior segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergirá absolutamente em $|x| < |x_0| \doteq r$.

Seja $S$ o conjunto formado por todos os $r > 0$ que têm a propriedade acima, isto é, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente em $|x| < r$.

O conjunto $S$ é não vazio (pois $r$ está em $S$).

Se $S$ não for limitado então o item 3. ocorrerá (ou seja a série de potências convergirá em toda a reta $\mathbb{R}$).

Se $S$ for limitado afirmamos que o item 2. ocorrerá.

De fato, se $S$ é limitado, como ele é não vazio, então existe $0 < R = \sup S$.

Afirmamos que $R$ satisfaz o item 3.

De fato, seja $r \in S$ tal que $0 < r < R$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_0| < r$.

Como $r \in S$ e $|x_0| < r$ temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, logo, do teorema anterior item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente em $|x| < r$ o que implica que ela convirgirá absolutamente em $|x| < R$.

Se $|x_1| > R$ afirmamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ diverge.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ então, pelo teorema anterior item 1., a série de potências convirgirá em $|x| < |x_1|$, ou seja $|x_1| \in S$, o que é um absurdo pois $|x_1| > R = \sup S$.

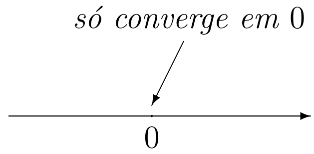
Portanto a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge em $|x| > R$, mostrando que $R$ satisfaz 2.

$\square$

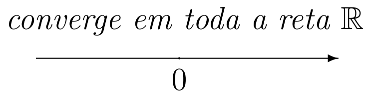
**Observação 6.2.3**

1. *O resultado acima nos diz que uma, e somente uma, das possibilidades ocorre no caso de uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*:*

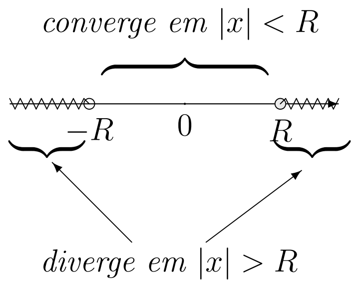
   *1.1* $R = 0$*:*




   *1.2* $R = \infty$*:*




   *1.3* $0 < R < \infty$*:*




   *Neste último caso pode ocorrer todo tipo de situação nos pontos* $-R$ *e* $R$ *(em relação a convergência) como veremos em exemplos a seguir.*

2. *O número* $0 < R < \infty$ *obtido no item 3. do teorema acima terá uma importância muito grande no estudo das séries de potências, como veremos.*

   *Por uma questão de completitude, diremos que no item 1. do teorema* $R = 0$ *e no item 2. que* $R = \infty$ *e assim teremos a seguinte definição:*

**Definição 6.2.1** *Definiremos* ***raio de convergência*** *da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *como sendo* $R$ *obtido no teorema acima* $(0 \leq R \leq \infty)$*.*

*O conjunto de todos os* $x \in \mathbb{R}$ *onde a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge será dito* ***intervalo de convergência*** *da série de potências.*

**Observação 6.2.4**

1. *Segue do teorema acima que toda série de potências tem um (único) raio de convergência e portanto um (único) intervalo de convergência.*

2. *O raio de convergência de uma série de potências pode ser 0, isto é* $R = 0$ *( e portanto o intervalo de convergência da série de potências será* $I = \{0\}$ *(um ponto), como mostra o seguinte exemplo:*

   *Consideremos a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

   *Observemos que para todo* $x_0 > 0$ *fixado que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *é divergente.*

   *De fato, como* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n^n x_0^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n x_0 = \infty > 1$*, segue do critério da raiz que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *é divergente.*

   *Assim, segue de um teorema anterior qu a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *só converge quando* $x = 0$*, isto é,* $R = 0$ *e o intervalo de convergência da série de potências é* $I = \{0\}$.

3. *O raio de convergente* $R$ *pode ser infinito e portanto o intervalo de convergência será* $I = \mathbb{R}$*, como mostra o seguinte exemplo:*

   *Consideremos a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   *Observemos que para todo* $x_0 > 0$ *fixado que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ *é convergente.*

   *De fato, como* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 < 1$*, segue do critério da razão que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ *é convergente se* $x_0 > 0$.

   *Assim, segue de um teorema anterior que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ *converge em* $\mathbb{R}$*, isto é,* $R = \infty$ *e o intervalo de convergência da série de potências é* $I = \mathbb{R}$.

4. *Se* $0 < R < \infty$*, a priori, nenhuma conclusão podemos tirar sobre o comportamento da série de potência nos pontos* $-R$ *e* $R$.

   *Podemos ter situações, como veremos, que a série de potências converge em um dos pontos e diverge no outro, ou diverge nos dois ou ainda converge nos dois.*

   *Um exemplo de um desses casos é:*

   *Consideremos a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

*Observemos que a série de potências converge em $x_0 = 1$, pois a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (série harmônica alternada).*

*Logo, de um teorema anterior, segue que a série de potências converge em $|x| < 1$.*

*Por outro lado, a série de potências diverge em $x_1 = -1$, pois a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmônica).*

*Logo, de um teorema anterior, segue que a série de potências diverge em $|x| > 1$.*

*Com isto temos que o raio de convergência $R = 1$ e o intervalo de convergência é $I = (-1, -1]$ (ou seja, a série de potência converge em $R$ e diverge em $-R$).*

$\boxed{\textbf{26.04 - 16.a - 1.a Prova}}$

$\boxed{\textbf{3.05 - 17.a}}$

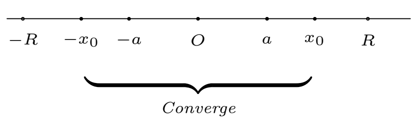
## 6.3 Convergência Uniforme de Séries de Potências

**Observação 6.3.1** *Observemos que se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em $x_0 \neq 0$ então ela convergirá absolutamente uniformemente en $|x| \leq a$, onde $0 < a < |x_0|$.*

*De fato, se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ é convergente então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, logo a seqüência $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ será limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Logo, se $|x| \leq a$, com $0 < a < |x_0|$, temos que $|a_n x^n| = |a_n x_0^n||\dfrac{x^n}{x_0^n}| \leq M|\dfrac{a^n}{x_0^n}| = M|\dfrac{a}{x_0}|^n = Mr^n$, onde $r \doteq |\frac{a}{x_0}| < 1$.*

*Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n = M\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente (série geométrica de razão $0 < r < 1$) segue, do critério de Weierstrass, que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente uniformemente convergente em $|x| \leq a$, onde $0 < a < |x_0|$.*




Em geral temos o:

**Teorema 6.3.1** *Consideremos a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$.*

*Então a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge absolutamente uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do intervalo* $(-R, R)$*, isto é, em qualquer intervalo* $[a, b] \subseteq (-R, R)$*.*

**Demonstração:**

Seja $[a, b] \subseteq (-R, R)$.

Podemos supor, sem perda de generalidade que $|a| < |b|$ (o caso em isso não vale será deixado como exercício).

Afirmamos que existe $x_0 \in (0, R)$ tal que $-x_0 < |a| < |b| < x_0$.

Como $x_0 \in (-R, R)$ temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, logo da observação acima a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergirá uniformemente no intervalo $|x| < |b|$, em particular, no intervalo, $[a, b]$ (pois este está contido em $[-|b|, |b|]$).

$\square$

**Observação 6.3.2** *Pode-se mostrar que se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge em* $[-R, R)$ *(ou* $(-R, R]$*, ou ainda* $[-R, R]$*) a convergência será absolutamente uniformemente em* $[-R, b]$ *(ou* $[a, R]$*, ou ainda* $[-R, R]$*) para* $-R \leq b < R$ *(ou* $-R < a < R$*).*

*O resultado acima é conhecido como Teorema de Abel.*

Como conseqüência do teorema acima temos o:

**Corolário 6.3.1** *Suponhamos que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tenha* $R > 0$ *como raio de convergência.*

*Considere a função* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*,* $|x| < R$*.*

*Então* $f$ *é contínua em* $(-R, R)$*.*

**Demonstração:**

Mostremos que $f$ é contínua em $x_0 \in (-R, R)$.

Consideremos $a$ e $b$ tal que $-R < a \leq x_0 < b < R$.

Do corolário acima sabemos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[a, b]$.

Como as funções $f_n(x) \doteq a_n x^n$ são contínuas em toda a reta $\mathbb{R}$, em particular em $[a, b]$, segue, da convergência uniforme da série de potências em $[a, b]$, que $f$ é uma função contínua em $[a, b]$, em particular em $x_0$.

Como $x_0 \in (-R, R)$ é arbitrário, segue que $f$ é contínua em $(-R, R)$.

$\square$

A seguir consideraremos alguns exemplos.

**Exemplo 6.3.1** *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo.*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

   *Se* $x_0 > 0$ *temos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!x_0^{n+1}}{n!x_0^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)x_0 = \infty > 1.$

   *Logo, do critério da razão segue que para todo* $x_0 > 0$ *a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x_0^n$ *é divergente.*

   *Portanto a série de potência só converge em* $x_0 = 0$*, isot é, o raio de convergência é* $R = 0$ *e o intervalo de convergência é* $I = \{0\}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n$.

   *Se* $x_0 > 0$ *temos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+1)!}x_0^{n+1}}{\frac{n}{n!}x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n} = 0 < 1.$

   *Logo, do critério da razão segue que para todo* $x_0 > 0$ *a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x_0^n$ *é convergente.*

   *Portanto a série de potência converge em toda a reta* $\mathbb{R}$*, isto é, o raio de convergência é* $R = \infty$ *e o intervalo de convergência é* $I = \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$.

   *Se* $x_0 > 0$ *temos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}x_0^{n+1}}{\frac{1}{n^2}x_0^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}x_0 = x_0.$

   *Logo, do critério da razão,* $0 \leq x_0 < 1$*, segue que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}x_0^n$ *será convergente e se* $x_0 > 1$ *será divergente.*

   *Portanto a série de potência converge em* $|x| < 1$ *e diverge para* $|x| > 1$*, isto é, o raio de convergência é* $R = 1$.

   *Para encontrarmos o intervalo de convergência precisaremos estudar o que ocorrre com a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}x^n$ *quando* $x = -1$ *e qunado* $x = 1$.

   *Quando* $x = -1$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *que é convergente pelo critério da série alternada (exercício).*

*Quando* $x = 1$ *temos a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *que é convergente.*

*Portanto o intervalo de convergência é* $= [-1, 1]$.

*A seguir daremos um processo mais simples de encotrar o raio de convergência de uma série de potências, a saber:*

**Teorema 6.3.2** *Dada uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *consideremos* $\rho \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. *Se:*

1. $\rho = 0$ *então o raio de convergência será* $R = \infty$.
2. $\rho = \infty$ *então o raio de convergência será* $R = 0$.
3. $0 < \rho < \infty$ *então o raio de convergência será* $R = \frac{1}{\rho}$.

**Demonstração:**

Fixemos $x_0 \neq 0$ e apliquemos o critério da razão para a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$.

Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x_0^{n+1}|}{|a_n x_0^n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| x_0| = \rho |x_0|$.

Logo, do critério da razão para séries numéricas temos que se $\rho|x_0| < 1$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ será convergente e se $\rho|x_0| > 1$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ será divergente.

Baseado nisso temos:

1. Se $\rho = 0$ então $\rho|x_0| = 0 < 1$, logo a série de potências convergirá sempre, isto é, o raio de convergência será $R = \infty$.
2. Se $\rho = \infty$ então para $x_0 \neq 0$ teremos que $\rho|x_0| = \infty > 1$, logo a série de potências divergirá sempre (exceto quando $x_0 = 0$) , isto é, o raio de convergência será $R = 0$.
3. Se $0 < \rho < \infty$ então para $\rho|x_0| < 1$ ( ou seja, $|x_0| < \frac{1}{\rho}$) a série de potências convergirá e para $\rho|x_0| > 1$ ( ou seja $|x_0| > \frac{1}{\rho}$) a série de potências divergirá, isto é, o raio de convergência é $R = \frac{1}{\rho}$.

□

Aplicaremos a seguir o resultado acima para encontrar o raio de convergência de séries de potências.

**Exemplo 6.3.2** *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries de potências abaixo:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

   *Neste caso* $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

   *Logo, do teorema acima, segue que o raio de convergência* $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$.

   *Portanto podemos garantir que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ *converge e* $(-1, 1)$ *e diverge em* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

   *Para completar o estudo dessa série de potências precisamos analizar o que ocorre nos pontos* $x = -1$ *e* $x = 1$.

   *Em* $x = 1$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *que é divergente (série harmônica).*

   *Em* $x = -1$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *que é convergente (série harmônica alternada).*

   *Portanto o intervalo de convergência é* $I = [-1, 1)$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$.

   *Neste caso* $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

   *Logo, do teorema acima, segue que o raio de convergência* $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$.

   *Portanto podemos garantir que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ *converge e* $(-1, 1)$ *e diverge em* $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

   *Para completar o estudo dessa série de potências precisamos analizar o que ocorre nos pontos* $x = -1$ *e* $x = 1$.

   *Em* $x = 1$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *que é convergente.*

   *Em* $x = -1$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *que é convergente .*

   *Portanto o intervalo de convergência é* $I = [-1, 1]$.

**Observação 6.3.3** *Os resultados acima podem ser aplicados para séries de potências em* $(x - c)$*, isto é, centradas em* $c$*, ou seja as séries de potências do tipo:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n$.

*Para ver isto basta observar que se definirmos* $y \doteq x - c$ *então a série de potências acima tornar-se-a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$.

*Para esta última podemos aplicar tudo o que fizemos anteriormente e depois voltarmos com a mudança de variáveis que fizemos* ($y = x - c$) *para obter todas as informações que queremos sobre a série de potências original.*

*Por exemplo, suponhamos que a série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ *tenha* $R$ *como seu raio de convergência e* $[-R, R)$ *como seu intervalo de convergência, isto é, a série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ *converge se, e somente se,* $-R \leq y < R$.

*Como* $y = x - c$, *então a série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *converge se, e somente se,* $-R \leq x - c < R$, *ou seja* $c - R \leq x < c + R$ .

*Este será o intervalo de convergência da série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

Com isto temos a:

**Definição 6.3.1** $0 \leq R \leq \infty$ *obtido acima será dito* ***raio de convergência da série de potências*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

*O intervalo* $c - R \leq x < c + R$ *será denominado* ***intervalo de convergência da série de potências*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

**Exemplo 6.3.3** *Encontrar o raio de convergência e o intervalo de convergência das seguites séries de potências:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

   *Tomando-se* $y \doteq x - 2$ *então a série de potências acima tornar-se-a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$.

   *Esta série de potências foi estudada anteriormente e vimos que seu raio de convergência é* $R = 1$ *e seu intervalo de convergência é* $[-1, 1]$.

   *Então, da observação acima, segue que o raio de convergência da série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ *é* $R = 1$ *e o intervalo de convergência é* $-1 \leq x - 2 \leq 1$, *isto é,* $I = [1, 3]$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}$.

*Tomando-se* $y \doteq x+5$ *então a série de potências acima tornar-se-a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$.

*Esta série de potências foi estudada anteriormente e vimos que seu raio de convergência é* $R=1$ *e seu intervalo de convergência é* $[-1,1]$.

*Então, da observação acima, segue que o raio de convergência da série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}$ *é* $R=1$ *e o intervalo de convergência é* $-1 \leq x+5 \leq 1$, *isto é,* $I=[-6,-4]$.

*3.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+3)} x^n$.

*Se* $a_n \doteq \dfrac{2^n}{\ln(n+3)}$, $n=0,1,2,\cdots$ *então* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{\frac{2^{n+1}}{\ln(n+4)}}{\frac{2^n}{\ln(n+3)}}| = 2$.

*Logo, de um teorema anterior, segue que o raio de convergência da série de potências será* $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{2}$.

*Estudemos a convergência da série de potências nos pontos* $x=\dfrac{1}{2}$ *e* $x=\dfrac{-1}{2}$.

*Em* $x=\dfrac{1}{2}$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+3)}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$.

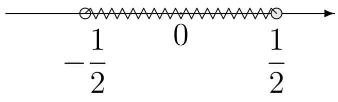
*Observemos que* $n+3 \geq \ln(n+3)$, $n=0,1,2,\cdots$ *(exercício), logo* $\dfrac{1}{n+3} \leq \dfrac{1}{\ln(n+3)}$, $n=0,1,2,\cdots$.

*Como a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ *é divergente (é semelhante a série harmônica) segue, do critério da comparação para séries numéricas, que a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$ *é divergente.*

*Em* $x=-\dfrac{1}{2}$ *temos a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+3)}(\frac{-1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$.

*Aplicando o critério da série alternada mostra-se que a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$ *é convergente (exercício).*

*Logo o intervalo de convergência é* $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.




4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

*Neste caso* $a_n \doteq \dfrac{1}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *então* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

*Logo, de um teorema anterior, segue que o raio de convergência da série de potências será* $R = \infty$, *ou seja, a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ *converge em toda a reta* $\mathbb{R}$.

*Logo o intervalo de convergência é* $I = \mathbb{R}$.

**Observação 6.3.4** *Todas as séries de potências acima estudadas convergem absolutamente uniformemente em intervalos fechados e limitados* $[a, b]$ *contidos no intervalo de convergência das respectivas séries de potências.*

*Logo suas somas definem, como já sabíamos, funções contínuas nesses intervalos.*

## 6.4 Integração Séries de Potências

Para integrar uma série de potências temos o seguinte resultado:

**Teorema 6.4.1** *Suponhamos que a série de potências* $f(x) \doteq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $0 < R \leq \infty$.

*Então para todo* $x \in (-R, R)$ *fixado, a função* $f$ *é integrável em* $[0, x]$ *se* $x > 0$ *ou em* $[x, 0]$ *se* $x < 0$.

*Além disso,*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n (= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots)$$

*isto é, a série de potências pode ser integrada termo a termo, ou ainda,*

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\, dt.$$

**Demonstração:**

Para $x \in (-R, R)$ com $x > 0$ temos que o intervalo $[0, x] \subseteq (-R, R)$ (se $x < 0$ teremos $[x, 0] \subseteq (-R, R)$).

Logo, de um resultado anterior, a série de potências convergirá uniformemente em $[0, x]$ (ou $[x, 0]$).

Portanto de um teorema segue que a série de potências pode ser integrada termo a termo, isto é,

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

$\square$

**Observação 6.4.1**

1. *Suponhamos que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$ *e* $x \in (-R, R)$.

   *Então a série obtida da integração em* $[0, x]$ *(ou* $[x, 0]$*) da série de potências acima também será uma série de potências, a saber* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

   *Neste caso os coeficientes são da forma* $A_n \doteq \frac{a_n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   *Para encontrar o raio de convergência desta basta calcularmos:*

$$\rho_{\int} = \lim_{n\to\infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}| = \lim |\frac{\frac{a_{n+1}}{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}}| = |\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho,$$

   *ou seja, as duas séries de potências (a original e a integrada) têm o mesmo raio de convergência!*

2. *De modo semelhante, a série "integrada"* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, *por ser uma série de potências com raio de convergência* $R$ *(igual ao da série original), poderá ser integrada termo a termo no intervalo* $[0, x]$ *(ou* $[x, 0]$*) para* $x \in (-R, R)$ *obtendo-se deste modo uma nova série de potência,* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$, *que terá o mesmo raio de convergência* $R$ *da série original.*

   *Podemos repetir esse processo indefinidamente obtendo sempre uma nova série de potências que tem o mesmo raio de convergência da série de potências a qual iniciamos o processo.*

   *Conclusão: Para* $x \in (-R, R)$, *integrando-se uma série de potências num intervalo* $[0, x]$ *(ou* $[x, 0]$*) obtemos uma nova série de potências cujo raio de convergência é o mesmo da série original.*

   *Como veremos em alguns exemplos a seguir os intervalos de convergência* ***não*** *precisarão ser necessariamente iguais, isto é, os raios de convergência são iguais mas os intervalos de convergência poderão ser diferentes (como veremos em alguns exemplos a seguir).*

*3. Como conseqüência do teorema acima temos que se* $[b,c] \subseteq (-R,R)$ *então*

$$\int_b^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_b^c t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}|_{t=b}^{t=c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(c^{n+1} - b^{n+1})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} c^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1}.$$

**Exemplo 6.4.1**

*1. Como vimos anteriormente a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ *converge em* $|x| < 1$ *para a função* $f(x) \doteq \frac{1}{1+x}$ *(lembremos que para cada* $x \in (-1,1)$ *fixado a série acima é uma série geométrica razão* $-x$*).*

$\boxed{\textbf{7.05 - 18.a}}$

*Um outro modo de obtermos a função soma da série acima é o seguinte:*

*Para* $x \in (-1,1)$ *temos:*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = 1 - x \underbrace{(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots)}_{=f(x)}$$
$$= 1 - x f(x).$$

*Logo* $f(x) = 1 - xf(x)$ *portanto* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$.

*Do teorema acima segue que a série de potências pode ser integrada termo a termo em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em* $[a,b]$ *onde* $[a,b] \subseteq (-1,1)$ .

*Assim, se* $x \in (-1,1)$*, aplicando-se o argumento acima ao intervalo* $[0,x]$ *(ou* $[x,0]$*) temos:*

$$\int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \overset{(m=n+1)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

*Por outro lado,* $\int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt = \ln(1+x)$*, logo*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ |x| < 1.$$

*Segue do critério da série alternada a série acima converge quando $x = 1$ (exercício), assim temos que*

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

*Observemos que o intervalo de convergência da série integrada,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$*, é "maior" que o da série original.*

*O intervalo de convergência da série integrada é $(-1, 1]$ e o da série original é $(-1, 1)$.*

2. *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *converge em $|x| < 1$ para a função* $f(x) \doteq \dfrac{1}{1+x^2}$ *(basta tomar $x^2$ no lugar de $x$ na série de potências do exemplo anterior e observar que $|x| < 1$ se , e somente se $|x^2| < 1$).*

   *Logo para $x \in (-1, 1)$ temos:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots$$

   *Do teorema acima segue que a série de potências pode ser integrada termo a termo em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em $[a, b]$ onde $[a, b] \subseteq (-1, 1)$.*

   *Assim, se $x \in (-1, 1)$, aplicando-se o argumento acima ao intervalo $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) temos:*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

   *Por outro lado,* $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = arctg(x)$*, logo*

$$arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ |x| < 1.$$

   *Segue do critério da série alternada que a série acima converge quando $x = 1$ e quando $x = -1$ (exercício).*

   *Observemos que o intervalo de convergência da série integrada,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$*, é "maior" que o da série original.*

*O intervalo de convergência da série integrada é* $[-1,1]$ *e o da série original é* $(-1,1)$.

*Em particular, se* $x=1$ *temos que*

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

3. *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ *comverge em* $|x|<1$ *para a função* $f(x)\doteq\frac{1}{1-x}$ *(basta tomar* $-x$ *no lugar de* $x$ *na série de potências do exemplo 1.).*

   *Do teorema acima segue que a série de potências pode ser integrada termo a termo em qualquer intervalo fechado e limitado contido dentro do seu intervalo de convergência, ou seja em* $[a,b]$ *onde* $[a,b]\subseteq(-1,1)$.

   *Assim, se* $x\in(-1,1)$, *aplicando-se o argumento acima ao intervalo* $[0,x]$ *(ou* $[x,0]$*) temos:*

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}x^m$$

   *Por outro lado,* $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=-\ln(1-x)$, *logo*

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n,\ |x|<1.$$

   *Segue do critério da série alternada a série acima converge quando* $x=-1$ *(exercício).*

   *Observemos que o intervalo de convergência da série integrada,* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n$, *é "maior"que o da série original. O intervalo de convergência da série integrada é* $[-1,1)$ *e o da série original é* $(-1,1)$.

## 6.5 Derivação de Séries de Potências

Para derivar séries de potências temos o seguinte resultado:

**Teorema 6.5.1** *Suponhamos que a série de potências* $f(x)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *tem raio de convergência* $R>0$.

*Então a função* $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ *é derivável em* $(-R,R)$ *e a série de potência pode ser derivada termo a termo, isto é,*

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ x\in(-R,R).$$

**Demonstração:**

Encontremos o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, defina $A_n \doteq na_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Para isso calculemos $\rho' \doteq \lim_{n\to\infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$.

Logo sendo $\rho' = \rho$ temos que os raios de convergência das série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ são iguais.

Em particular, a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge absolutamente uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado $[a, b] \subseteq (-R, R)$.

Logo, de um teorema anterior segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pode ser derivada termo a termo no intervalo $(-R, R)$ assim, para $x \in (-R, R)$, temos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

□

**Observação 6.5.1** *O resultado acima nos diz que uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *pode ser derivada termo a termo no intervalo* $(-R, R)$ *e sua derivada* $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ *é uma série de potências cujo raio de convergência é o mesmo da original (o intervalo de convergência pode, em geral, mudar, como veremos em exemplos a seguir).*

*Mas* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$ *é uma série de potências, logo podemos aplicar o teorema, isto é, derivá-la termo a termo para obter uma nova série de potências,* $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, *que temo o raio de convergência igual ao da série de potências inical.*

*Podemos repetir o processo indefinidamente e obter a seguinte conseqüência do teorema acima:*

**Corolário 6.5.1** *Suponhamos que a série de potências* $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$.

*Então a função* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *é de classe* $C^{\infty}(-R, R)$ *e se* $k \in \mathbb{N}$, *a série de* *potência pode ser derivada k-vezes termo a termo, isto é, para $x \in (-R, R)$ temos:*

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

**Demonstração:**

Conseqüência do teorema acima.

□

**Observação 6.5.2**

1. *Uma série de potências representa uma função com derivada de qualquer ordem no intervalo $(-R, R)$ ($R > 0$ é o raio de convergência da série de potências).*

   *O raio de convergência de qualquer uma das séries de potências obtidas da inicial derivando-se termo a termo não varia.*

   *O intervalo de convergência de uma série de potências obtida da derivação de uma dada pode mudar, como veremos logo a seguir em exemplos.*

2. *Estas propriedade são intrísecas de séries de potências, ou seja, isto pode não ocorrer em geral para séries de funções como mostra o seguinte exemplo:*

   *A série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ (que não é uma série de potências) é uniformemente convergente na reta $\mathbb{R}$ (como vimos anteriormente).*

   *Mas se derivarmos a série termo a termo obteremos a seguinte série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ que não converge em, por exemplo, $x = 0$ (na verdade em $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$).*

Podemos utilizar a representação em séries de potência de funções conhecidas para obter uma representação para outras funções, como mostram os exemplos aseguir:

**Exemplo 6.5.1**

1. *Obter uma representação em série de potências para a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ em $|x| < 1$.*

   *Observemos que $f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x})$, $|x| < 1$ e, como vimos anteriormente, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ que é uma série de potências cujo raio de convergência é $R = 1$ (visto anteriormente).*

*Logo, segue do teorema acima, que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *pode ser derivada, termo a termo, no intervalo* $(-1,1)$ *ou seja,* $f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$.

*Portanto,* $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$.

2. *Consideremos a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^n$.

*Consideremos* $A_n \doteq \frac{-(1)^n}{(2n)!}$, $n = 0, 1, \cdots$, *e calculemos* $\lim_{n\to\infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}|$.

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{A_{n+1}}{A_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{-(1)^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\frac{-(1)^n}{(2n)!}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

*Logo o raio de convergência da série de potências acima é* $R = \infty$, *ou seja a série de potências converge em toda a reta* $\mathbb{R}$.

*Seja* $g(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

*Sabemos que a série de potências acima pode ser derivada termo a termo em toda a reta* $\mathbb{R}$, *assim*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}[\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(2n)!} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \overset{m=n-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Derivando mais uma vez, termo a termo, obtemos:*

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = -g(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*Ou seja,* $g''(x) = -g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 0^{2n} = 1$ *e* $g'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} 0^{2m+1} = 0$.

*A única função que tem essas três propriedades é* $g(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *(isto será mostrado no curso que tratará das Equações Diferencias Ordinárias).*

*Portanto* $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *Como* $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *temos que uma representação para a função seno em série de potências é:*

$$sen(x) = -\tfrac{d}{dx}\cos(x) = -\tfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(1)^n}{(2n)!} x^{2n} \overset{(Teorema)}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}[\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}]$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. *Sabemos que* $e^x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

*Logo* $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

*Suponhamos que* $x_0 > 0$ .

*Então a série numérica* $e^{-x_0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x_0^n$ *é uma série alternada e do critério da série alternada segue que*

$$|e^{-x_0} - S_n(x_0)| \leq a_{n+1}(x_0),$$

*onde* $a_n(x_0) \doteq \dfrac{x_0^n}{n!}$ *e* $S_n(x_0)$ *denota a soma parcial de ordem* $n$ *da série numérica acima, isto é,*

$$|e^{-x_0} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x_0^k| \leq \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!},$$

*Isto pode nos ser útil para obter aproximações de* $e^{-x_0}$, *para* $x_0 > 0$ *por meio das somas parciais da série numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x_0^n$ *sabendo que o erro será menor ou igual a* $\dfrac{x_0^n}{n!}$.

*Por exemplo, se* $x_0 = 1$ *e quizermos aproximar* $e^{-1}$ *com um erro menor que* $10^{-4}$ *(três casas decimais exatas) então sabemos que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$|e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

*Observemos que para que* $\dfrac{1}{(n+1)!} < 10^{-4}$ *se, e somente se,* $(n+1)! > 10^4$, *que ocorre* $n > 7$ *(pois* $8! = 40320 > 10^4$*).*

*Assim*

$$|e^{-1} - \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k}| \leq \frac{1}{8!} < 10^{-4}.$$

*Assim* $S_7(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k} \sim 0,36786$ *é uma aproximação de* $e^{-1}$ *com erro inferior a* $10^{-4}$.

5. *Calcule* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *com um erro inferior a* $10^{-4}$.

*Sabemos que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

*Logo* $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

*Portanto a série de potência acima pode ser integrada, termo a termo, no intervalo* $[0,1]$, *ou seja,*

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

*Observemos que a série numérica acima é uma série alternada e assim, do critério da série alternada, temos que*

$$|\int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

*Observemos que para que* $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$ *se, e somente se,* $(n+1)!(2n+3) > 10^4$, *que ocorre se* $n > 5$ *(pois* $6!15 = 7560010^4$*).*

*Assim*

$$|\int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}| \leq \frac{1}{6!15} < 10^{-4}.$$

*Assim* $S_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \sim 0.74684$ *é uma aproximação de* $e^{-1}$ *com erro inferior a* $10^{-4}$.

## 6.6 Série de Taylor e de McLaurin

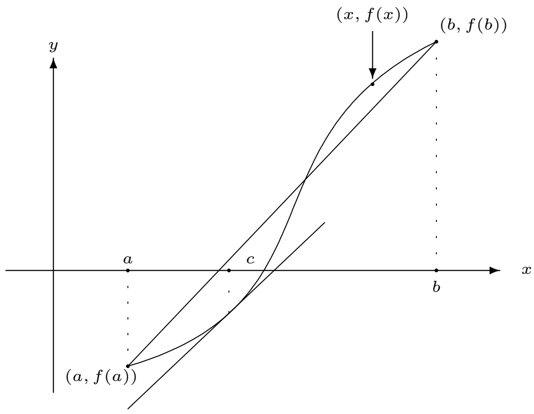
Lembremos de um resultado importante do Cálculo I que nos será muito útil logo à frente, a saber o Teorema do Valor Médio:

**Teorema 6.6.1** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* $(a,b)$.

*Então existe um* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ou equivalentemente, } f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

*Geometricamente temos:*




**Observação 6.6.1**

1. *O resultado acima nos diz que podemos determinar o valor da função $f$ em $b$ (isto é $f(b)$) sabendo-se o valor da $f$ em $a$ (isto é $f(a)$) e o valor da derivada de $f$ em um ponto intermediário $c$ entre $a$ e $b$ (isto é, $f'(c)$, $c \in (a, b)$).*

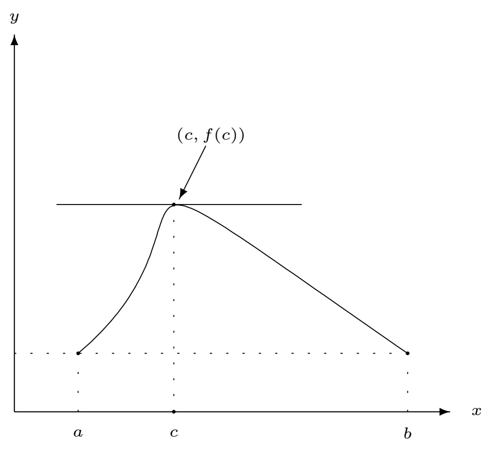
2. *Se $f$ contínua em $[0, x]$ e diferenciável em $(0, x)$ para $x \in [0, b]$ então, segue do teorema acima que, existe um $c_x \in (0, x)$ tal que $f(x) = f(0) + f'(c_x)x$.*

Como conseqüência deste temos o Teorema de Rolle:

**Teorema 6.6.2** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ diferenciável em $(a, b)$ e $f(a) = f(b) = 0$.*

*Então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

*Geometricamente temos:*




**Demonstração:**

Como $f(b) = f(a)$ do teorema acima segue que existe $c \in (a, b)$ tal qye $f'(c) = 0$.

$\square$

Podemos estender o Teorema do Valor Médio, como mostra o:

**Teorema 6.6.3** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $(a, b)$.*

*Então existe um $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

**Demonstração:**

Consideremos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n$$
$$- \frac{k}{(n+1)!}(b-x)^{n+1},$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é tal que $F(a) = 0$ (isto é, $k \doteq [f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n]\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$).

Observemos que $F$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $(a, b)$ e

$$F'(x) = \frac{k - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n, \; x \in (a, b).$$

Como $F(b) = F(a) = 0$, segue do Teorema de Rolle, que existe $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$, ou seja $f^{(n+1)}(c) = k$.

Assim

$$0 = F(a) = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-x)^n - \frac{k}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
$$= f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-x)^n$$
$$- \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

, ou seja,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

□

**14.05 - 19.a**

**Observação 6.6.2**

1. *O resultado acima é conhecido como* ***Fórmula de Taylor com resto de Lagrange****.*

2. *Na situação acima se $x \in [a, b]$ temos:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

*denominada* ***Fórmula de Taylor*** *da função $f$ em $x = a$.*

3. *A fórmula de Taylor pode ser colocada na seguinte forma:*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

*onde* $P_n(x) \doteq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *será dito* ***polinômio de Taylor*** *de grau $n$ de $f$ e* $R_n(x) \doteq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *será dito* ***resto de Taylor*** *de grau $n$ de $f$.*

*Nesta forma o resto de Taylor será dito estar na* ***forma de Lagrange*** *(1783-1813).*

4. *Se $a = 0$ teremos:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

*onde $c \in (0, x)$ que será denomindada* ***fórmula de McLaurin*** *de $f$.*

5. *A fórmula de Taylor (ou de McLaurin) pode ser usada para aproximar uma função bem comprotada por um polinômio, o polinômio de Taylor de $f$.*

   *Se pudermos encontrar um limitante $\varepsilon > 0$ para o resto de Taylor de $f$, isto é, se $|R_n(x)| < \varepsilon$, para $x \in [a, b]$, então $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, $x \in [a, b]$, ou seja $f(x) - \varepsilon < P_n(x) < f(x) + \varepsilon$, $x \in [a, b]$.*

   *Portanto se dado $\varepsilon > 0$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $|R_n(x)| < \varepsilon$, para $x \in [a, b]$ então temos que $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, $x \in [a, b]$, ou seja, a seqüência formada pelos polinômios de Taylor de ordem $n$ converge uniformemente, no intervalo $[a, b]$, para a função $f$.*

6. *A expressão da fórmula de Taylor (ou McLaurin) também é conhecida como* ***desenvolvimento de Taylor (McLaurin)*** *de ordem $n$ da função $f$ em torno de $x = a$ ($x = 0$).*

**Exemplo 6.6.1**

1. *Encontrar a fórmula de McLaurin para a função $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.*

   *Observemos que $f$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$, logo podemos aplicar o teorema de Taylor em qualquer intevalo $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$.*

   *Em particular, se $a = 0$ e $b = x$ (fórmula de McLaurin) temos:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

*Mas,*
$f(0) = -1$;
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, *logo* $f'(0) = 2$;
$f''(x) = 12x^2 - 12x$, *logo* $f''(0) = 0$;
$f'''(x) = 24x - 12$, *logo* $f'''(0) = 24$;
$f^{(4)}(x) = 24$, *logo* $f^{(4)}(0) = 24$
*e* $f^{(n)}(x) = 0$ *para* $n \geq 5$, *em particular,* $f^{(n)}(0) = 0$ *para* $n \geq 5$.

*Portanto a fórmula de McLaurin para* $f$ *de ordem* $n \geq 5$ *será:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + + \frac{f^{(4)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(5)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$= -1 + \frac{2}{1!}x + \frac{0}{2!}.x^2 + \frac{24}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1,$$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *isto é, a própria função (que é um polinômio!).*

2. *Encontrar a fórmula de McLaurin da função* $f(x) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

*Observemos que* $f$ *tem derivada de qualquer ordem em* $\mathbb{R}$, *logo podemos aplicar o teorema de Taylor em qualquer intevalo* $[a, b]$ *da reta* $\mathbb{R}$.

*Em particular, se* $a = 0$ *e* $b = x$ *(fórmula de McLaurin) temos:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

*Mas,*
$f(0) = 0$;
$f'(x) = \cos(x)$, *logo* $f'(0) = 1$;
$f''(x) = sen(x)$, *assim* $f''(0) = 0$;
$f'''(x) = -\cos(x)$, *logo* $f'''(0) = -1$;
$f^{(4)}(x) = sen(x)$, *assim* $f^{(4)}(0) = 0$.

*Em geral,* $f^{(2n)}(x) = 0$ *e* $f^{(2n+1)}(x) = 1$ *ou* $-1$.

*Portanto a fórmula de McLaurin para* $f$ *de ordem* $n \geq 5$ *será:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(5)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$ *para todo* $x \in [a, b]$.

*Observemos que* $|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ *(pois* $f^{(n+1)}(c) = \pm sen(c)$ *ou* $f^{(n+1)}(c) = \pm\cos(c)$ *logo* $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$*).*

*Para* $x \in [a, b]$ *temos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0$, *ou seja, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N_0$ *temos* $\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \varepsilon$, *ou ainda* $|R_n(x)| < \varepsilon$, *para* $x \in [a, b]$.

*Portanto, se $n \geq N_0$, o polinômio de McLaurin aproximará $f(x) = sen(x)$ com erro menor que $\varepsilon > 0$ para $x \in [a, b]$.*

*Conclusão: a seqüência formada pelos polinômios de McLaurin, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformemente para a função $f(x) = sen(x)$ em cada intervalo limitado e fechado da reta $\mathbb{R}$.*

*Acabamos de exibir um modo de aproximar uma função $f$ por um polinômio (no caso, por meio da fórmula de McLaurin).*

Podemos obter uma outra expressão para o resto de Taylor, $R_n$, a saber, chamado de **resto de Taylor na forma integral**:

**Teorema 6.6.4** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a, b]$ e $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde $P_n$ e $R_n$ são o polinômio de Taylor de $f$ de ordem $n$ e o resto de Taylor de ordem $n$, respectivamente.*

*Então*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

*para todo $x \in [a, b]$.*

**Demonstração:**

A demonstração é feita por indução.

Daremos a seguir uma idéia da demonstração.

Do Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$f(x)-f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$, ou seja, $f(x) = f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$, mostrando que o resultado é valido para $n = 0$ ($P_0(x) = f(a)$ e $R_0(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$).

Utilizando integração por partes temos:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt &= \left\langle \begin{array}{l} u = f'(t) \Rightarrow du = f''(t)\,dt \\ dv = dt \Rightarrow v = t-x \end{array} \right\rangle \\
&= f(a) + (t-x)f'(t)\big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt \\
&= f(a) + (x-x)f'(x) - (a-x)f'(a) - \int_a^x (t-x)f''(t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = P_1(x) + R_1(x),
\end{aligned}$$

isto é, o resultado é válido para $n = 1$.

Utilizando integração por partes uma vez mais temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = \left\langle \begin{array}{l} u = f''(t) \Rightarrow du = f'''(t)\,dt \\ dv = (x-t)\,dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^2}{2} \end{array} \right\rangle \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)\,dt \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)\,dt = P_2(x) + R_2(x),
\end{aligned}$$

isto é, o resultado é válido para $n = 2$.

Podemos prosseguir utilizando integração por partes uma vez mais.

A prova pode ser completada uilizando-se indução e será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

**Exemplo 6.6.2** *Encontrar o desenvolvimento de McLaurin para as seguintes funções:*

1. $f(x) = e^x$.

   *Como $f$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $f^{(n)}(x) = e^x$, segue que $f^{(n)}(0) = 1$, assim, segue da fórmula de MacLaurin que:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \end{aligned}$$

   *onde $c \in (0, x)$ (ou $c \in (x, 0)$).*

   *Neste caso:*

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

   *e*

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

   *Observemos que se $x \in [a, b] \subseteq [-M, M]$ ($M > 0$) então $|R_n(x)| = |\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq |\frac{e^M}{(n+1)!}M^{n+1}| \to 0$ quando $n \to \infty$.*

   *De fato, como $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{M^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n+2} = 0$, segue, do critério da razão que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente, logo $\lim_{n\to\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ e portanto $\lim_{n\to\infty} e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.*

   *Ou seja, a seqüência formada pelos polinômios de McLaurin associado a $f$ (isto é, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge uniformemente para $f$ em qualquer intervalo fechado e limitado $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$.*

2. $f(x) = \cos(x)$.

   *Como $f$ tem derivada de qualquer ordem em $\mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos:*
   $f(0) = \cos(0) = 1$;
   $f'(x) = -sen(x) \Rightarrow f'(0) = -sen(0) = 0$;
   $f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'(0) = -\cos(0) = -1$;
   $f'''(x) = sen(x) \Rightarrow f'''(0) = sen(0) = 0$;

*$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1;$*

*logo, segue que* $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \ n \text{ par} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}, \ n \text{ ímpar} \end{cases}$ *, assim, segue da fórmula de Taylor (com $a = 0$) que:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \end{aligned}$$

*onde $c \in (0, x)$ (ou $c \in (x, 0)$).*

*Neste caso*

$$P_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad e \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

*Observemos que se $x \in [a, b] \subseteq [-M, M]$ $(M > 0)$ então $|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq |\frac{1}{(n+1)!}M^{n+1}| \to 0$ quando $n \to \infty$.*

*Ou seja, a seqüência formada pelos polinômios de McLaurin associado a $f$ (isto é, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge uniformemente para $f$ em qualquer intervalo fechado e limitado $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$.*

## 6.7 Representação de Funções em Séries de Potências

Como vimos em uma seção anterior que podemos utilizar uma série de potências para definir uma função cujo domínio será o intervalo de convergência da série de potências, isto é, se $x$ pertence ao intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ então $f(x) \doteq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ está bem definida e será de classe $C^\infty$ no interior do intervalo de convergência.

Neste caso diremos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma **representação** da função $f$ por meio de uma série de potências, ou ainda, que $f$ é **representada pela série de potências** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

**Exemplo 6.7.1** *A função $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$ pode ser representada pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$.*

*Observemos que, de um resultado anterior, a série de potências pode ser derivada termo a termo, ou seja, para $|x| < 1$ temos:*
$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{d}{dx}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$, *em particular,* $f'(0) = -1 = a_1\, 1!$*;*
$f''(x) = \dfrac{d}{dx}f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$, *em particular,* $f''(0) = 2 = a_2\, 2!$*;*
$f'''(x) = \dfrac{d}{dx}f''(x) = \dfrac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, *em particular,* $f'''(0) = -6 = a_3\, 3!$*;*
*em geral temos que* $f^{(n)}(0) = a_n\, n!$, $n \in \mathbb{N}$, *isto é,*
$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^n + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$, *como veremos no resultado a seguir:*

**Teorema 6.7.1** *Se $f$ é uma função dada por uma série de potências, ou seja,* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *onde $|x-a| < r$ (isto é, a série de potência converge em $|x-a| < r$), então $f \in C^\infty(I)$ com $I \doteq \{x \in : |x-a| < r\}$ e*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots,$$

*ou seja,* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

**Demonstração:**

Como a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ converge em $|x-a| < r$ segue que ela define uma função, $f$, que é de classe $C^\infty$ e a série de potências pode ser derivada termo a termo no intervalo $I$, assim:
$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-a)^n = a_0$;
$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1} \Rightarrow f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(a-a)^{n-1} = a_1.\, 1!$;
$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \Rightarrow f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(a-a)^{n-2} = a_2.\, 2\,.1 = a_2\, 2!$;
$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} \Rightarrow f'''(a) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)(a-a)^{n-3} = a_3\, .3\,.2\,.1 = a_3\, 3!$;
e, por indução, segue que (exercício para o leitor)

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k} \Rightarrow$$
$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(a-a)^{n-k} = a_k\,.k\,.(k-1)\cdots\,.3\,.2\,.1 = a_k\,k!.$$

Portanto $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

□

**Observação 6.7.1**

1. *A série de potências que aparece no teorema acima será denominada* ***série de Taylor de*** $f$ *no ponto* $x = a$.

2. *Se* $a = 0$ *a série de potências obtida do teorema acima será denominada* ***série de McLaurin de*** $f$, *isto é, se* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *converge* $|x| < r$ *então* $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$, $|x| < r$, *isto é,* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

3. *Os números* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *serão denominados* ***coeficientes de Taylor de*** $f$.

4. *O teorema acima nos diz que se uma função* $f$ *possui representação em série de potências de* $(x - a)$ *então a série deverá ser a série de Taylor de* $f$ *em* $x = a$ *(unicidade de representação em séries de potências).*

5. *O teorema acima* ***<u>não</u>*** *nos dá condições para garantir a existência de uma representação em séries de potências para uma dada função* $f$.

**17.05 - 20.a**

*Para isto temos o:*

**Teorema 6.7.2** *Seja* $f : (b, d) \to \mathbb{R}$ *uma função que tem derivadas de qualquer ordem em* $(b, d)$ *(isto é, está em* $C^{\infty}((b, d))$*) e* $a \in (b, d)$.

*Suponhamos que* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, *para todo* $x \in (b, d)$ *(ou seja,* $R_n \xrightarrow{p} 0$ *em* $(b, d)$*), onde* $R_n$ *é o resto de Taylor de ordem* $n$ *de* $f$ *em* $x = a$ *(isto é,* $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$, *com* $|c - a| < |x - a|$*).*

*Então* $f$ *pode ser representada em série de Taylor em* $x = a$, *isto é,*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \ x \in (b, d). \tag{6.1}$$

**Demonstração:**

Observemos que:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é a soma parcial de ordem $n$ da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Mas $|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \xrightarrow{p} 0$ em $(b,d)$), logo temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^n + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \ x \in (b,d). \end{aligned}$$

□

**Observação 6.7.2**

1. *A convergência da série de potências acima será uniforme em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $(c,d)$)*

2. *O resultado nos dá condições suficientes para a existência de uma representação de uma função $f$ em séries de Taylor.*

3. *Exitem funções com derivada de todas as ordens na reta $\mathbb{R}$ cuja série de Taylor (ou de McLaurin) não converge para a função, como mostra o exemplo a seguir:*

   *Considere* $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$

   *Afirmamos que $f$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e que $f^{(n)}(0) = 0$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$*

   *Observemos que para $x \neq 0$ a função tem derivada de qualquer ordem.*

   *O problema é em $x = 0$, que passaremos a estudar a seguir.*

   *Mostremos que $f$ é contínua em $x = 0$.*

   *Para isto:*

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{(\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty)}{=} 0 = f(0).$$

   *Logo a série de McLaurin de $f$ será:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$ *se* $x \neq 0$, *portanto $f$ é contínua em $x = 0$.*

   *Agora:* $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \overset{(exercício)}{=} 0$, *com isto mostramos que existe $f'(0)$ e dá 0, isto é, $f'(0) = 0$.*

*Assim temos* $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$.

*Pode-se mostrar que* $f'$ *é contínua em* $x = 0$ *e, utilizando as idéias acima, que* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *(exercício para o leitor).*

*De modo semelhante mostra-se que* $f^{(n)}(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Portanto a série de McLaurin de* $f$ *será* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$ *se* $x \neq 0$*, isto é, a série de McLaurin de* $f$ ***não*** *converge para a função* $f$ *(exceto se* $x = 0$*).*

**Definição 6.7.1** *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$*, onde* $I$ *é um intervalo aberto da reta* $\mathbb{R}$*, será dita* ***analítica (real) em*** $I$ *se para cada* $a \in I$*, existir* $\varepsilon > 0$ *tal que a série de Taylor de* $f$ *em* $x = a$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$*, converge para* $f(x)$ *em* $|x - a| < \varepsilon$.

**Exemplo 6.7.2** *A seguir daremos algumas funções e suas respectivas representações em série de potências (de McLaurin):*

1. *A função* $f(x) = e^x$ *possui representação em série de McLaurin na reta* $\mathbb{R}$ *dada por* $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

2. *A função* $f(x) = sen(x)$ *possui representação em série de McLaurin na reta* $\mathbb{R}$*. dada por* $\displaystyle sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *A função* $f(x) = \cos(x)$ *possui representação em série de McLaurin na reta* $\mathbb{R}$*. dada por* $\displaystyle \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. *A função* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *possui representação em série de McLaurin em* $(-1, 1)$*. dada por* $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

5. *A função* $f(x) = arctg(x)$ *possui representação em série de McLaurin em* $(-1, 1)$*. dada por* $\displaystyle arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$.

6. *A função* $f(x) = \ln(x+1)$ *possui representação em série de McLaurin em* $(-1, 1)$*. dada por* $\displaystyle \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$, $x \in (-1, 1)$.

7. *Vamos obter uma representação da função* $f(x) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *em série de Taylor em* $x = \frac{\pi}{6}$.

   *Observemos que se* $|x - \frac{\pi}{6}| < M$ *então o resto de Taylor de ordem* $n$ *de* $f$ *em* $x = \frac{\pi}{6}$ *satisfaz:*

   $|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - \frac{\pi}{6})^n| \overset{(|f^{(k)}(x)|\leq 1)}{\leq} \frac{|x - \frac{\pi}{6}|^n}{(n+1)!} \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ *(como vimos anteriormente).*

   *Ou seja,* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *para* $|x - \frac{\pi}{6}| < M$.

   *Logo, do teorema acima segue que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{6})}{n!}(x - \frac{\pi}{6})^n$, $x \in \mathbb{R}$.

   *Mas,* $f^{(k)}(x) = \begin{cases} sen(x), & k = 0, 4, 8, \cdots, 4m, \cdots \\ \cos(x), & k = 1, 5, 9, \cdots, 4m+1, \cdots \\ -sen(x), & k = 2, 6, 10, \cdots, 4m+2, \cdots \\ -\cos(x), & k = 3, 7, 11, \cdots, 4m+3, \cdots \end{cases}$.

   *Logo* $f^{(k)}(\frac{\pi}{6}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, 4, 8, \cdots, 4m, \cdots \\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & k = 1, 5, 9, \cdots, 4m+1, \cdots \\ -\frac{1}{2}, & k = 2, 6, 10, \cdots, 4m+2, \cdots \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & k = 3, 7, 11, \cdots, 4m+3, \cdots \end{cases}$ *, ou seja,*

   $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{6})}{n!}(x - \frac{\pi}{6})^n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2.1!}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2.2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2.3!}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$.

   *Observemos que a convergência será uniforme em cada intervalo* $[-M, M] \subseteq \mathbb{R}$.

**Observação 6.7.3**

1. *Todas as funções acima são analíticas nos seus respectivos domínios.*

2. *Observemos que se uma função* $f$ *possui representação em série de McLaurin em um certo intervalo* $|x| < M$ *e ela é uma função par (isto é,* $f(-x) = f(x)$, $|x| < M$*) então sua série de McLaurin só apresentará potências pares (tipo* $x^{2n}$*), ou seja os coeficientes das potências ímpares serão zero.*

   *De fato, se* $f$ *é uma função par e com derivada então* $f'$ *será uma função ímpar (exercício), logo* $f'(0) = 0$.

   *Se* $f'$ *é uma função ímpar então* $f''$ *será uma função par, o que implicará que* $f'''$ *será ímpar, logo* $f'''(0) = 0$.

   *Prosseguindo o raciocício temos que todas as derivadas de ordem ímpar,* $f^{(2n+1)}$, *serão funções ímpares, logo* $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

   *Portanto a série de McLaurin tornar-se-a:*

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}, \ |x| < M.$$

3. *De modo análogo, se uma função $f$ possui representação em série de McLaurin em um certo intervalo $|x| < M$ e ela é uma função ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$, $|x| < M$) então sua série de McLaurin só apresentará potências ímpares (tipo $x^{2n+1}$), ou seja os coeficientes das potências pares serão zero, isto é,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ |x| < M.$$

   *Basta lembrar que se uma função é ímpar e é diferenciável então sua derivada é uma função par e assim por diante (isto será deixado como exercício para o leitor).*

Um resultado final sobre a convergência de séries de Taylor é dado pelo:

**Teorema 6.7.3** *Seja $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ tal que $f$ tem derivada de todas as ordens em $(a-r, a+r)$.*

*Além disso, suponhamos que existe $M > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $x \in (a-r, a+r)$ e $n \in \mathbb{N}$.*

*Então $f$ pode ser representada em série de Taylor em $x = a$, isto é,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < r.$$

**Demonstração:**

Como

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}| \leq |\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}||x-a|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} r^{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Logo, do teorema anterior, segue que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < r.$$

$\square$

**Exemplo 6.7.3**

1. *Se $f(x) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, pois*

   $$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |sen(x)|, & \text{se } n \text{ é par} \\ |\cos(x)|, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \text{ ou seja, } |f^{(n)}(x)| \leq 1, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

2. *Se $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, pois*

   $$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |\cos(x)|, & \text{se } n \text{ é par} \\ |sen(x)|, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \text{ ou seja, } |f^{(n)}(x)| \leq 1, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

3. *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\,dx$.

*Obseremos que* $sen(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ , $x \in \mathbb{R}$.

*Logo se* $x \neq 0$ *temos que* $\displaystyle\frac{sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$.

*Observemos que em* $x = 0$ *a série de potências converge para* $1$.

*Assim a série de potências acima converge uniformemente em* $[0, 1]$.

*Como vimos anteriormente, seu raio de convergência é* $R = \infty$.

*Logo podemos integrá-la termo a termo em* $[0, 1]$*, isto é,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}\Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}.\end{aligned}$$

*A série numérica acima é uma série alternada que satisfaz as condições do teorema da série alternada.*

*Logo sabemos que* $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\,dx - S_n\right| \leq a_{n+1}$*, onde* $\displaystyle S_n \doteq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)}$ *e* $\displaystyle a_k \doteq \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)}$.

**Observação 6.7.4** *Em particular, mostramos no exemplo acima que a função* $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ *é uma função inteira (isto é, analítica em toda a reta* $\mathbb{R}$*).*

## 6.8 Série Binomial

Sabemos do Binômio de Newton que:

**Teorema 6.8.1** *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *então*

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^n b^{m-n},$$

*onde* $\displaystyle\binom{m}{n} \doteq \frac{m!}{(m-n)!n!}$.

**Demonstração:**

A demonstração desse fato será deixado como exercício para o leitor.

□

**Observação 6.8.1**

1. *Tomando-se $a = 1$ e $b = x$ na expressão acima obtemos:*
$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{n} x^{m-n} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\overbrace{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}^{n-fatores}}{n!}x^n + \cdots + x^m,$$

2. *A expressão acima é a série de McLaurin da função $f(x) = (1+x)^m$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Se $m \in \mathbb{R}$, a série de potências*
$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\overbrace{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}^{n-fatores}}{n!}x^n + \cdots , \tag{6.2}$$
*será a série de McLaurin (se convergir) que representa a função $f(x) = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$.*

*A demonstração deste fato será deixado para o leitor.*

**Definição 6.8.1** *Tal série de potências será denominada **Série Binomial**.*

**Observação 6.8.2**

1. *Determinemos o raio de convergência da série binomial:*
$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{m(m-1)\cdots(m-(n+1-1))}{(n+1)!}}{\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|m-n|}{n+1} = 1,$$ *para todo $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixado.*

*Portanto o raio de convergência da série binomial é $R = 1$, ou seja a série binomial converge em $|x| < 1$ e diverge em $|x| > 1$.*

2. *Se $m \in \mathbb{N}$ temos que a série binomial tornar-se-a:*
$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ onde } a_1 = 1,\ a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!},\ n = 2, 3, \cdots, m$$
*e $a_n = 0$ se $n \geq m+1$.*

**Exemplo 6.8.1**

1. *Exprimir a função $f(x) \doteq (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ em série de potências de $x$, para $|x| < 1$.*

*Tomando-se $m = -\dfrac{1}{2}$ na expressão da série binomial teremos:*
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ onde } a_n = \frac{\overbrace{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(n-1))}^{n\text{-fatores}}}{n!},\ n = 0, 1, \cdots .$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2},\\
a_2 &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{\frac{3}{4}}{2!} = \frac{3}{2^2 2!},\\
a_3 &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{-1.3.5}{2^3 3!},\\
&\vdots,\\
a_n &= \frac{1.3.5\cdots(2n-1)(-1)^n}{2^n n!},\ n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

*ou seja*

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1.3.5}{2^3 3!}x^3 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)(-1)^n}{2^n n!}x^n + \cdots$$

**21.05 - 21.a**

2. *Encontrar o desenvolvimnto em série de McLaurin da função* $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ *,* $|x| < 1$.

   *Como vimos acima a série de McLaurin da função* $f(y) \doteq (1+y)^{-\frac{1}{2}}$, $|y| < 1$ *é dada por:*
   $(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{2^2 2!}y^2 - \frac{1.3.5}{2^3 3!}y^3 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)(-1)^n}{2^n n!}y^n + \cdots.$
   *Assim, fazendo-se* $y = x^2$ *obteremos:*

$$\begin{aligned}
(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{1.3}{2^2 2!}(-x^2)^2 - \frac{1.3.5}{2^3 3!}(-x^2)^3 + \cdots\\
&\quad + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)(-1)^n}{2^n n!}(-x^2)^n + \cdots\\
&= 1 - (-1)\frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2^2 2!}x^4 - (-1)\frac{1.3.5}{2^3 3!}x^6 + \cdots\\
&\quad + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)(-1)^n(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + \cdots\\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2^2 2!}x^4 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}x^6 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \cdots,\ |x| < 1.
\end{aligned}$$

3. *Encontrar a série de McLaurin da função* $f(x) = arcsen(x)$, $|x| < 1$.

   *Observemos que* $arcsen(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt.$

   *Mas, do exemplo acima, temos uma representação do integrando em série de potências.*

   *Logo podemos integrar a série de potências, termo a termo, no intervalo* $[0,x]$ *(ou* $[x,0]$*) se* $|x| < 1$.

*Portanto,*

$$\begin{aligned}
arcsen(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1},\ |x|<1,
\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$arcsen(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1},\ |x|<1.$$

## 6.9 Resolução de PVI's associados a EDO's via Séries de Potências

A seguir daremos um método para encontrar solução para o problema de valor inicial (PVI) associado a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) utilizando-se séries de potências.

Para o desenvolvimento do método precisamos supor que a solução pode ser representada em série de potências.

A verificação dessa condição será estudada no curso de Equações Diferenciais Ordinárias.

Para exemplificarmos o método consideraremos o seguinte exemplo:

**Exemplo 6.9.1** *Encontrar uma função $x = x(t)$ que possua representação em série de McLaurin, isto é, $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, definida em algum intervalo $(-R, R)$, que satisfaça o seguinte problema:*

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = sen(t),\ t>0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

**Resolução:**

Seja $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $t \in (-R, R)$.

Como a série pode ser derivada termo a termo em $[a,b] \subseteq (-R,R)$, segue que

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} \quad \text{e} \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$sen(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1},\ t \in \mathbb{R}.$$

Logo substituindo as expressões acima na equação diferencial ordinária, obtemos:

$$x''(t) + x(t) = sen(t) \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Fazendo $m = n - 2$ na primeira série obtemos a seguinte identidade:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)t^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

ou seja (fazendo $m = n$):

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Identificando os correspondentes termos nas duas séries de potências, segue que (observemos que os coeficientes dos termos das potências de ordem par são todos zero),

$$\begin{cases} a_{2n+2}(2n+2)(2n+1) + a_{2n} = 0 \\ a_{(2n+1)+2}[(2n+1)+2][(2n+1)+1] + a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ \Leftrightarrow a_{2n+3}(2n+3)(2n+2) + a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Na 1.a identidade fazendo:
$n = 0 : \; a_2.2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2}$

$n = 1 : \; a_4.4.3 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\dfrac{a_2}{4.3} = \dfrac{a_0}{4.3.2}$ .

$n = 2 : \; a_6.6.5 + a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = -\dfrac{a_4}{6.5} = -\dfrac{a_0}{6.5.4.3.2}$

Por indução, mostra-se que:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0, \; n = 1, 2, 3, ...$$

Por outro lado, na 2.a identidade fazendo:
$n = 0 : \; a_3.3.2 + a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1-a_1}{3.2}$

$n = 1 : \; a_5.5.4 + a_3 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow a_5 = \frac{-\frac{1}{3!}-a_3}{5.4} = \frac{-2+a_1}{5!}$ .

$n = 2 : \; a_7.7.6 + a_5 = \frac{1}{5!} \Rightarrow a_7 = \frac{\frac{1}{5!}-a_5}{7.6} = \frac{3-a_1}{7!}$

Por indução mostra-se que:

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n - a_1}{(2n+1)!}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

Deste modo obtemos os $a_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ e portanto $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Mas

$$0 = x(0) = a_0 \Rightarrow a_{2n} = 0,\ n = 1, 2, 3, ...$$

Por outro lado

$$1 = x'(0) = a_1 \Rightarrow a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n-1}{(2n+1)!},\ n = 1, 2, 3, ...$$

ou seja,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}.$$

**Observação 6.9.1** *Observemos que na situação acima temos:*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|\dfrac{(-1)^{(n+1)+1}((n+1)-1)|}{((2n+1)+1)!}}{|\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)|}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.(2n+1)!}{(2n+3)!(n-1)} = 0.$$

*Portanto o raio de convergência da série de potências é $R = \infty$, isto é, a série de potências converge em $\mathbb{R}$, ou seja a solução do PVI acima é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

No curso Equações Diferencias Ordinárias será desenvolvido a teoria e outros exemplos associados a problemas do tipo acima.

# Capítulo 7

# Séries de Fourier

**24.05 - 22.a**

## 7.1 Introdução

Nas próximas seções estudaremos uma outra classe especial de séries de funções, denominadas **séries de Fourier**.

O objetivo é representar funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sejam periódicas (por exemplo, $2\pi$-periódicas) na forma de uma série de funções que envolvem somente senos e cossenos.

Mais precisamente, para o caso $2\pi$-periódico, corresponderia a representar uma função $f$, $2\pi$-periódicas "bem comportada" (que será explicitado no decorrer das notas) da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)].$$

As perguntas que serão respondidas estarão relacionadas com os seguintes tópicos:

1. Se $f$ puder ser representada na forma acima quem serão os coeficientes $a_n$, $n = 0, 1, \cdots$ e os $b_n$, $n = 1, 2, \cdots$ ?
2. Que propriedades uma função $f$ para possuir uma representação na forma acima?
3. Em que sentido a série converge (pontualmente, uniformemente) ?

Na verdade estudaremos uma situação um pouco mais geral onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja $2L$-periódicas e a expansão seja da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x)], \tag{7.1}$$

(que no caso $L = \pi$ nos dá a expressão acima).

Para motivar o estudo desse tipo de séries de funções introduziremos um método (denominado método da separação de variáveis) que como conseqüência nos levará a necessidade de estudarmos funções que possuam representação em série de Fourier (do tipo (7.1)).

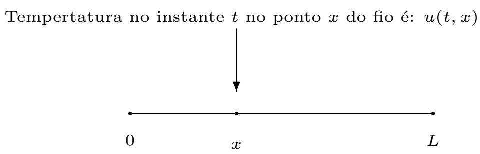
## 7.2 Método das Separação de Variáveis

Para motivar os tópicos que serão desenvolvidos nas próximas seções vamos introduzir um método para encontrar solução para uma Equação Diferencial Parcial (EDP) importante nas aplicações, denominada **Equação do Calor**.

Tal método, que pode ser aplicado a problemas relacionados com outras EDP's (por exemplo, Equação da Onda, Equação de Laplace) e é denominado **Método da Separação de Variáveis**.

Como dito acima, aplicaremos o método para encontrar (ou tentar encontrar) a solução para o problema da distribuição de calor num fio finito (de comprimento $L > 0$) para os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo no instante inicial ($t = 0$), que está isolado termicamente (imagine que o fio está dentro de um isopor) e cujas extremidades são mantidas a $0^o\, C$ ao longo de todo o processo.

Vamos imaginar que o fio é o intervalo $[0, L] \subseteq \mathbb{R}$ e que $u = u(t, x)$ nos dá a temperatura no ponto $x$ do fio no instante $t \geq 0$.




Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar $u = u(t, x)$, $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$ que satisfaça:

$$\partial_t u(t,x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t,x), \;\; t > 0, \; x \in [0, L] \tag{7.2}$$

$$u(0,x) = f(x), \;\; x \in [0, L] \;\; \text{(temp. no ponto } x \in [0, L] \text{ do fio é } f(x)) \tag{7.3}$$

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \;\; t \geq 0, \text{(temp. nos extremos do fio, } x = 0 \text{ e } x = L, \text{ é } 0^0 C). \tag{7.4}$$

A Equação Diferencial Parcial (7.2) é denominada **Equação do Calor**.

A constante $\alpha > 0$ está relacionada com a condutibilidade térmica do fio (isto é, depende do material que o fio é feito).

No nosso caso, vamos supor que $\alpha = 1$.

O método que desenvolveremos a seguir é simples e o próprio nome já nos diz o que faremos.

Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:

$$f(0) \stackrel{((7.3) \text{ com } x=0)}{=} u(0,0) \stackrel{((7.4) \text{ com } t=0)}{=} 0 \stackrel{((7.4) \text{ com } t=0)}{=} u(0,L) \stackrel{((7.3) \text{ com } x=L)}{=} f(L),$$

ou seja

$$f(0) = f(L) = 0. \tag{7.5}$$

Do ponto de vista matemático é razoável, à primeira vista, procurarmos soluções $u = u(t, x)$ na seguinte classe

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L))$$

o que implicará que $f(.) = u(0,.) \in C([0,L])$.

A EDP (7.2) é uma equação importante nas aplicações e também um exemplo importante das EDP's lineares de tipo **parabólico**.

Um dos primeiros a estudar, de modo sistemático, o problema da condução de calor foi Joseph B. Fourier (1768-1830) e a desenvolver o método que trataremos a seguir (dito Método de Fourier).

O método consiste em procurar soluções do problema acima do tipo

$$u(t,x) = \psi(t)\phi(x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L] \tag{7.6}$$

isto é, soluções do tipo variáveis separadas (dai o nome do método).

Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.2), (7.4) e, posteriormente, utilizaremos (7.3).

Na verdade estaremos interessados em soluções não nulas, isto é, $u(t,x) \neq 0$, para algum $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$, o que implicará que $\psi(t), \phi(x) \neq 0$ para algum $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$.

Supondo que as funções $\psi$ e $\phi$ possuam derivadas, substituindo (7.6) em (7.2) obtemos:

$$\psi'(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x),\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Dividindo a igualdade por $\psi(t)\phi(x)$ (nos pontos onde $\psi(t)\phi(x) \neq 0$) obtemos:

$$\frac{\psi'(t)\,\phi(x)}{\psi(t)\phi(x)} = \frac{\psi(t)\,\phi''(x)}{\psi(t)\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Como $\psi(t), \phi(x) \neq 0$ para $t > 0$ e $x \in (0,L)$ temos que

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Notemos que o lado direito é uma função de $x$ enquanto o lado esquerdo é uma função de $x$.

Logo ambos deverão ser iguais a uma constante que chamaremos de $-\lambda$ (o motivo do sinal será justificado mais adiante).

Portanto

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Com isto obtemos duas Equações Diferencias Ordinárias (EDO), a saber:

$$\psi'(t) = -\lambda\,\psi(t),\ t > 0 \tag{7.7}$$
$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0,L). \tag{7.8}$$

Impondo (7.4) temos:

$$\psi(t)\phi(0) = u(t,0) = 0 = u(t,L) = \psi(t)\phi(L),\ t \geq 0$$

Como $\psi(t) \neq 0$ para algum $t > 0$, dividindo ambos os membros da igualdade por $\psi(t)$ teremos

$$\phi(0) = 0 = \phi(L),$$

ou seja, $\phi$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0, L) \tag{7.9}$$
$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \tag{7.10}$$
$$\phi \in C([0, L]) \cap C^2((0, L)). \tag{7.11}$$

**Observação 7.2.1**

1. *Um valor $\lambda$ para os quais (7.9)-(7.10) admite solução não nula na classe (7.11) será dito* ***autovalor*** *do problema (7.9) e as soluções não triviais da equação na classe (7.11) serão ditas* ***autofunções*** *correspondentes ao autovalor $\lambda$.*

2. *Como estamos procurando soluções reais (isto é, $u(t,x) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$) só nos interessará o caso em que $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   *O item a seguir mostrará que $\lambda$ deverá ser real, ou melhor ,que $\lambda > 0$.*

3. *Afirmamos que $\lambda > 0$ (em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).*

   *De fato, sejam $\phi = \phi(x)$ satisfaz (7.9)-(7.11) para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

   *Logo existem os limites laterias:*

$$\phi''(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \phi''(x) \overset{(7.9)}{=} -\lambda \lim_{x\to 0^+} \phi(x) \overset{(7.11)}{=} -\lambda\phi(0) \overset{(7.10)}{=} 0 \tag{7.12}$$
$$\phi''(L^-) = \lim_{x\to L^-} \phi''(x) \overset{(7.9)}{=} -\lambda \lim_{x\to L^-} \phi(x) \overset{(7.11)}{=} -\lambda\phi(L) \overset{(7.10)}{=} 0. \tag{7.13}$$

   *Por outro lado, como $\phi \in C([0, L])$, para $x \in (0, L)$, temos:*

$$\begin{aligned} -\lambda \int_0^x \phi(y)\,dy &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^x -\lambda\phi(y)\,dy \overset{(7.9)}{=} \lim_{a\to 0^+} \int_a^x \phi''(y)\,dy \\ &\overset{(T.Fund.Cálc.)}{=} \lim_{a\to 0^+} [\phi'(x) - \phi'(a)] \end{aligned} \tag{7.14}$$
$$\begin{aligned} -\lambda \int_x^L \phi(y)\,dy &= \lim_{b\to L^-} \int_x^b -\lambda\phi(y)\,dy \overset{(7.9)}{=} \lim_{b\to L^-} \int_x^b \phi''(y)\,dy \\ &\overset{(T.Fund.Cálc.)}{=} \lim_{b\to L^-} [\phi'(b) - \phi'(x)], \end{aligned} \tag{7.15}$$

   *portanto existem os limites lateriais $\phi(0^+) = \lim\limits_{a\to 0^+} \phi'(a)$ e $\phi(L^-) = \lim\limits_{b\to L^-} \phi'(b)$.*

   *Logo podemos integrar as funções $\phi'$ e $\phi''$ no intervalo $[0, L]$ o que permite fazer as contas a seguir.*

*Observemos que*

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_0^L |\phi(x)|^2\, dx &\overset{(|z|^2 = z\bar{z})}{=} \lambda \int_0^L \phi(x)\overline{\phi(x)}\, dx = \int_0^L (\lambda\phi(x))\overline{\phi(x)}\, dx \overset{(7.9)}{=} -\int_0^L \phi''(x)\,\overline{\phi(x)}\, dx \\
&= - \lim_{\substack{a \to 0^+ \\ b \to L^-}} \int_a^b \phi''(x)\,\overline{\phi(x)}\, dx \overset{\text{(Int. por Partes)}}{=} \\
&= - \lim_{\substack{a \to 0^+ \\ b \to L^-}} \left[ \phi'(x)\overline{\phi(x)}|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \phi'(x)\overline{\phi'(x)}\, dx. \right] \\
&= - \lim_{\substack{a \to 0^+ \\ b \to L^-}} \left[ \phi'(b)\overline{\phi(b)} - \phi'(a)\overline{\phi(a)} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2\, dx \\
&= -\left[ \phi'(L^-)\overline{\phi(L)} - \phi'(0^+)\overline{\phi(0)} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2\, dx \\
&\overset{(7.10)}{=} \int_0^L |\phi'(x)|^2\, dx > 0, \qquad (7.16)
\end{aligned}
$$

*( se fosse $= 0$, $\phi'(x) = 0$, ou seja , $\phi$ seria constante; logo por (7.10) teríamos $\phi = 0$, que não nos interessa pois neste caso $u(t, x) = 0$, $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$).*

*Assim*

$$\lambda \int_0^L |\phi(s)|^2\, dx = \lambda |\phi|^2 > 0$$

*implicando que $\lambda > 0$ (em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).*

4. *Observemos que se $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são autovalores distintos do problema (7.9)-(7.11) e $\phi_1$ e $\phi_2$ são duas correspondentes autofunções então:*

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx &= \int_0^L (\lambda_1\phi_1(x))\overline{\phi_2(x)}\, dx \\
&\overset{(7.9)}{=} -\int_0^L \phi_1''(x)\,\phi_2(x)\, dx \overset{(Int.por Partes)}{=} \\
&= -[\phi_1'(x)\,\phi_2(x)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1'(x)\,\phi_2'(x)\, dx] \overset{(7.10)}{=} \int_0^L \phi_1'(x)\,\phi_2'(x)\, dx \\
&\overset{(Int.por Partes)}{=} [\phi_1(x)\,\phi_2'(x)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2''(x)\, dx] \\
&\overset{(7.10)}{=} -\int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2''(x)\, dx \overset{(7.9)}{=} -\int_0^L \phi_1(x)(\overline{\lambda_2\phi_2(x)})\, dx \\
&\overset{(\lambda_2 \in \mathbb{R})}{=} -\lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx.
\end{aligned}
$$

*Logo*

$$\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx = -\lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx,$$

*ou seja,*

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx = 0.$$

*Como* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *segue que* $\displaystyle\int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\, dx = 0$*, ou seja,* $\phi_1$ *e* $\phi_2$ *são ditas ortogonais* *(* $\displaystyle(\phi, \psi) = \int_0^L \phi(x)\overline{\psi(x))}\, dx$ *é um produto interno em* $C([0, L])$*).*

5. *Como* $\lambda > 0$ *temos que a solução geral da EDO (7.9) é dada por:*

$$\phi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\, sen(\sqrt{\lambda}x) \tag{7.17}$$

*onde* $a$ *e* $b$ *são constantes (exercício para o leitor).*

*Mas* $\phi$ *deve satisfazer:*

$$\begin{aligned} a &\overset{(7.17)}{=} \phi(0) \overset{(7.10)}{=} 0 \Rightarrow \phi(x) = b\, sen(\sqrt{\lambda}x) \\ b\, sen(\sqrt{\lambda}L) &\overset{(7.17)}{=} \phi(L) \overset{(7.10)}{=} 0. \end{aligned}$$

*Como* $\phi(x) \neq 0$, $x \in [0, L]$*, segue que* $b \neq 0$ *(pois* $a = 0$*) assim, da segunda identidade acima, deveremos ter* $sen(\sqrt{\lambda}L) = 0$*, ou seja* $\sqrt{\lambda}L = n\pi$*,* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{N}, \tag{7.18}$$

*e assim, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *teremos que:*

$$\phi(x) = \phi_n(x) = sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0, L].$$

6. *Resolvendo a EDO (7.7) com* $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *obtemos (exercício para o leitor)*

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},\ t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Podemos resumir tudo nisso no seguinte resultado, cuja demonstração foi feita na observação acima:

**Proposição 7.2.1**

1. *Se* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor e* $\phi = \phi(x)$ *é autofunção associada a* $\lambda$ *para os problemas (7.9)-(7.11) então* $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ *(isto é,* $\lambda \in \mathbb{R}^+$*) e* $\phi(x) = \phi_n(x) = sen(\dfrac{n\pi}{L}x)$*,* $x \in [0, L]$*.*

   *Ou seja, toda solução de (7.9)-(7.11) é combinação linear finita das funções abaixo:*

$$\phi_n(x) = sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0, L],\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.19}$$

2. *Toda solução de (7.7) com* $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *é combinação linear finita das funções abaixo:*

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},\ t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.20}$$

**Observação 7.2.2**

1. *Obtivemos agindo da forma acima soluções de (7.2) e (7.4) da forma:*

$$u_n(t,x) = \psi_n(t)\phi_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L],\ n \in \mathbb{N}.$$

*Utilizando o princípio da superposição (infinita) tentaremos encontrar soluções do problema (7.2)-(7.4) da forma*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x), \tag{7.21}$$

$t \geq 0,\ x \in [0,L]$.

*Observemos que se soubermos que a série de funções acima pode ser derivada termo a termo então* $u = u(t,x)$ *acima irá satisfazer (7.2) e (7.4) (por construção das funções* $u_n(t,x) = \psi(t)\phi_n(x)$, $t > 0$, $x \in (0,L)$*; será deixado como exercício para o leitor).*

*Para satisfazer (7.3) deveremos ter:*

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0,L].$$

*Ou seja, devemos saber expressar a função* $f$ *dada em uma série do tipo acima, isto é, uma* ***série de senos****.*

2. *Vamos imaginar uma outra situação em que o fio está isolado termicamente e que suas extremidades não troquem calor com o meio ambiente.*

*Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar* $u = u(t,x)$, $x \in [0,L]$ *e* $t \geq 0$ *que satisfaça (exercício para o leitor):*

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), t > 0,\ x \in [0,L] \tag{7.22}$$
$$u(0,x) = f(x), x \in [0,L] \ \ (\textit{temp. no ponto } x \in [0,L] \textit{ do fio é } f(x).) \tag{7.23}$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, t \geq 0 (\textit{extremos não trocam calor com o m.a.}). \tag{7.24}$$

*Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:*

$$f'(0) \overset{(\frac{d}{dx}(7.23)\ com\ x=0)}{=} u_x(0,0) \overset{((7.24)\ com\ t=0)}{=} 0 \overset{((7.24)\ com\ t=0)}{=} u_x(0,L) \overset{(\frac{d}{dx}(7.23)\ com\ x=L)}{=} f'(L),$$

*ou seja* $f'(0) = f'(L) = 0$.

*Do ponto de vista aplicado é razoável procurarmos soluções $u = u(t, x)$ na seguinte classe*

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, L]) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L))$$

*o que implicará que $f = u(0, .) \in C^1([0, L])$.*

*Como anteriormente, procuraremos soluções do problema do tipo*

$$u(t, x) = \psi(t)\phi(x),\ t \geq 0,\ x \in [0, L] \tag{7.25}$$

*isto é, soluções do tipo variáveis separadas.*

*Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.22), (7.24) e posteriormente utilizaremos (7.23).*

*Estaremos interessados em soluções não constantes, isto é, $u(t, x) \neq C$, $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$, o que implicará que $\psi(t), \phi(x) \neq C$ para alguns $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$ para qualquer $C \in \mathbb{R}$ fixado.*

*Supondo que as funções $\psi$ e $\phi$ possuam derivadas, substituindo (7.25) em (7.22) obtemos:*

$$\psi'(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x),\ t > 0,\ x \in (0, L).$$

*Dividindo a igualdade por $\psi(t)\phi(x)$ (nos pontos onde este é diferente se zero) obteremos:*

$$\frac{\psi'(t)\,\phi(x)}{\psi(t)\phi(x)} = \frac{\psi(t)\,\phi''(x)}{\psi(t)\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0, L),$$

*ou seja*

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0, L).$$

*Como no caso anterior, o lado direito é uma função de $x$ enquanto o lado esquerdo é uma função de $x$.*

*Logo ambos deverão ser iguais a uma constante que chamaremos de $-\lambda$.*

*Portanto*

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},\ t > 0,\ x \in (0, L).$$

*Com isto obtemos duas Equações Diferencias Ordinárias (EDO), a saber:*

$$\psi'(t) = -\lambda\,\psi(t),\ t > 0 \tag{7.26}$$
$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0, L) \tag{7.27}$$

*Impondo (7.24) temos:*

$$\psi(t)\phi'(0) = u_x(t, 0) = 0 = u_x(t, L) = \psi(t)\phi'(L),\ t \geq 0$$

*Como $\psi(t) \neq 0$, dividindo ambos os membros da igualdade por $\psi(t)$ teremos*

$$\phi'(0) = 0 = \phi'(L),$$

*ou seja, $\phi$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:*

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0, L) \tag{7.28}$$
$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0 \tag{7.29}$$
$$\phi \in C^2((0, L)) \cap C^1([0, L]) \tag{7.30}$$

3. *Afirmamos que $\lambda > 0$ (em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).*

   *De fato, sejam $\phi = \phi(x)$ satisfaz (7.28)-(7.30) para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

   *Observemos que xistem os limites laterias:*

$$\phi''(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \phi''(x) \overset{(7.28)}{=} -\lambda \lim_{x\to 0^+} \phi(x) \overset{(7.30)}{=} -\lambda\phi(0) \tag{7.31}$$
$$\phi''(L^-) = \lim_{x\to L^-} \phi''(x) \overset{(7.28)}{=} -\lambda \lim_{x\to L^-} \phi(x) \overset{(7.30)}{=} -\lambda\phi(L). \tag{7.32}$$

   *Logo podemos calcular:*

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^L \phi(x)\overline{\phi(x)}\,dx &= \int_0^L \lambda\phi(x)\overline{\phi(x)}\,dx \overset{(7.28)}{=} (-\phi'', \phi) = -\int_0^L \phi''(x)\,\overline{\phi(x)}\,dx \overset{\text{(Int. por Partes)}}{=} \\
&= \left[\phi'(x)\overline{\phi(x)}|_{x=0}^{x=L} - \int_a^b \phi'(x)\overline{\phi'(x)}\,dx.\right] \\
&= -\left[\phi'(L)\overline{\phi(L)} - \phi'(0)\overline{\phi(0)}\right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2\,dx \\
&\overset{(7.29)}{=} \int_0^L |\phi'(x)|^2\,dx > 0,
\end{aligned} \tag{7.33}$$

   *(se tivéssemos $\phi'(x) = 0$ então, $\phi$ seria constante que não nos interessa).*

   *Assim*

$$\lambda \int_0^L |\phi(x)|^2\,dx = \int_0^L |\phi'(x)|^2\,dx > 0$$

   *(se $\phi'(x) = 0$ segue que $\phi = const.$) implicando que $\lambda > 0$ (em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).*

4. *Observemos ainda que se $\lambda_1$ e $\lambda_2$ satisfazem o problema (7.28)-(7.30) e $\phi_1$ e $\phi_2$ são*

*duas correspondentes soluções então:*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx &= \int_0^L \lambda_1\phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx \stackrel{(7.28)}{=} -\int_0^L \phi_1''(x)\,\phi_2(x)\,dx \\
&\stackrel{(Int.por Partes)}{=} -[\phi_1'(x)\,\phi_2(x)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1'(x)\,\phi_2'(x)\,dx] \\
&\stackrel{(7.29)}{=} \int_0^L \phi_1'(x)\,\phi_2'(x)\,dx \stackrel{(Int.por Partes)}{=} \\
&= [\phi_1(x)\,\phi_2'(x)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2''(x)\,dx] \\
&\stackrel{(7.29)}{=} -\int_0^L \phi_1(x)\,\phi_2''(x)\,dx \stackrel{(7.28)}{=} -\int_0^L \phi_1(x)\overline{\lambda_2\phi_2(x)}\,dx \\
&\stackrel{(\lambda_2\in\mathbb{R})}{=} -\lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

*Logo:*
$\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx = \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx$ *, ou seja* $(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx = 0.$

*Como* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *segue que* $\int_0^L \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\,dx = 0$*, ou seja* $\phi_1$ *e* $\phi_2$ *são ortogonais.*

5. *Como* $\lambda > 0$ *temos que a solução geral da EDO (7.28) é dada por:*

$$\phi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\,sen(\sqrt{\lambda}x) \tag{7.34}$$

*onde* $a$ *e* $b$ *são constantes o que implicará que*

$$\phi'(x) = -a\sqrt{\lambda}\,sen(\sqrt{\lambda}x) + b\sqrt{\lambda}\,\cos(\sqrt{\lambda}x) \tag{7.35}$$

*Mas* $\phi$ *deve satisfazer:*

$$\begin{aligned}
&b\sqrt{\lambda} \stackrel{(7.37)}{=} \phi'(0) \stackrel{(7.29)}{=} 0 \Rightarrow \phi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) \\
&- a\sqrt{\lambda}\,sen(\sqrt{\lambda}L) \stackrel{(7.37)}{=} \phi'(L) \stackrel{(7.29)}{=} 0.
\end{aligned}$$

*Como* $\phi \neq const.$ *segue que* $a \neq 0$ *(pois* $b = 0$*) assim, da segunda identidade acima, segue que* $sen(\sqrt{\lambda}L) = 0$*, ou seja* $\sqrt{\lambda}L = n\pi$*,* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ n \in \mathbb{N}, \tag{7.36}$$

*e assim*

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0, L],\ n \in \mathbb{N}.$$

6. *Resolvendo a EDO (7.26) com* $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *obtemos*

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \ t \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

7. *Obtivemos agindo da forma acima soluções de (7.22) e (7.24) da forma:*

$$u_n(t,x) = \psi_n(t)\phi_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x), \ t \geq 0, \ x \in [0,L], \ n \in \mathbb{N}.$$

*Utilizando o princípio da superposição (infinita), tentaremos encontrar soluções do problema (7.22)-(7.24) da forma*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(t)\phi_n(x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x), \ t \geq 0, \ x \in [0,L]. \end{aligned}$$

*Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada termo a termo então* $u = u(t,x)$ *acima irá satisfazer (7.2) e (7.4) (exercício para o leitor).*

*Para satisfazer (7.3) deveremos ter:*

$$f(x) = u(0,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x), \ x \in [0,L].$$

*Ou seja, devemos saber expressar a função* $f$ *dada em uma série do tipo acima, isto é, uma* ***série de cossenos****.*

8. *Uma outra situação é a que fluxo de calor nas extremidades do fio seja proporcional à temperatura na extremidade do mesmo.*

*Matematicamente, em uma versão simplificada, o problema acima corresponde a encontrar* $u = u(t,x)$, $x \in [0,L]$ *e* $t \geq 0$ *que satisfaça:*

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), t > 0, \ x \in [0,L] \tag{7.37}$$
$$u(0,x) = f(x), x \in [0,L] \tag{7.38}$$
$$u_x(t,0) + u(t,0) = 0 = u_x(t,L) + u(t,L), t \geq 0 \tag{7.39}$$

*Agindo como nos dois casos anteriores (aplicando o método da separação de variáveis que, neste caso, será deixado como exercício para o leitor) chegaremos a seguinte expressão para as soluções do problema (7.37)-(7.39):*

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}[a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\, sen(\frac{n\pi}{L}x)], \ t \geq 0, \ x \in [0,L].$$

*Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada termo a termo então $u = u(t,x)$ acima irá satisfazer (7.37) e (7.39).*

*Para satisfazer (7.38) deveremos ter:*

$$f(x) = u(0,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\, sen(\frac{n\pi}{L}x)],\ x \in [0,L]. \tag{7.40}$$

*Ou seja, devemos saber expressar a função $f$ dada em uma série do tipo acima, isto é, uma* ***série de senos e cossenos*** *também denominada de* ***série de Fourier*** *da função $f$.*

*Isto nos motiva a estudar as funções que podem ser representadas nesse tipo de séries de funções.*

**28.05 - 23.a**

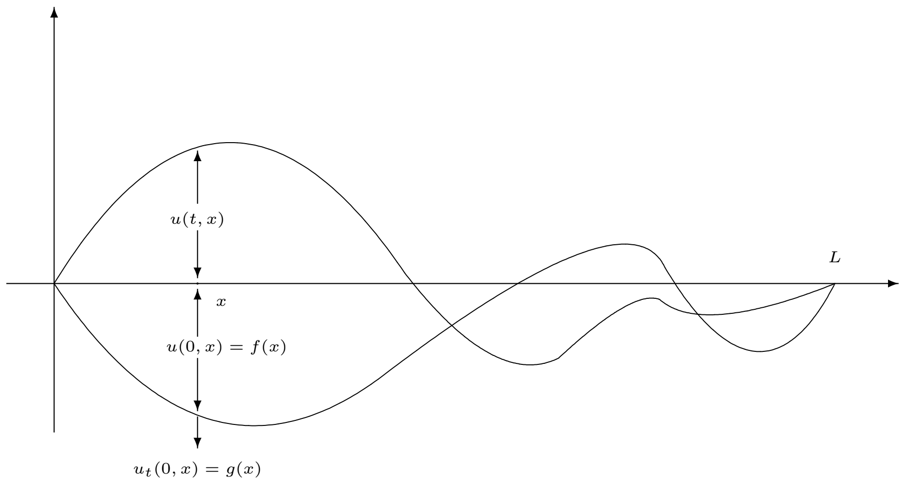
9. *Podemos fazer do método acima para estudar outros tipos de problemas, como por exemplo, o problema da corda de comprimento $L > 0$ vibrante num plano com as extremidades presas.*

   *Suponhamos que o fio esteja estendido sobre o eixo dos $x$'s e que seus extremos sejam $x = 0$ e $x = L$.*

   *Neste caso, se $u = u(t,x)$ nos dá a deflexão da corda em relação à posição de repouso e $f = f(x)$, $g = g(x)$, $0 \leq x \leq L$, são a posição inicial da corda e a velocidade inicial de vibração da corda, respectivamente, então, matematicamente, $u = u(t,x)$ deve satisfazer:*

$$\partial_t^2 u(t,x) - c^2 \partial_x^2 u(t,x) = 0, t > 0,\ x \in [0,L] \tag{7.41}$$
$$u(0,x) = f(x),\ u_t(0,x) = g(x),\ x \in [0,L] \tag{7.42}$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0, t \geq 0, \tag{7.43}$$

   *onde, (7.42) nos diz que a posição e velocidade inicial da corda no ponto $x \in [0,L]$ são dadas por $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente e (7.43) nos diz que as extremidades da corda estão fixas e $c > 0$ é uma constante (que depende do material com que a corda é feita).*



*A EDP (7.41) acima é conhecida como **Equação da Onda**.*

*Essa equação é um exemplo importante de EDP's do tipo **hiperbólico**.*

10. *Podemos considerar outros tipos de problemas relacionados com a corda vibrante. Eles aparecerão nas listas exercícios.*

11. *Outro problema importante que podemos aplicar o método da separação de variáveis é para encontrar solução $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ que satisfaz:*

$$\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega \tag{7.44}$$
$$u_{|\partial\Omega} = 0 \tag{7.45}$$

*onde $\partial\Omega$ é a fronteira de $\Omega$ ou*

$$\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega \tag{7.46}$$
$$\frac{\partial}{\partial\nu} u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{7.47}$$

*onde $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ denota a derivada direcional na direção do vetor normal unitário exterior da fronteira de $\Omega$.*

*Os problemas acima aparecerão nas listas de exercícios para serem tratados nos casos em que $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ e no caso em que $\Omega$ é uma circunferência.*

Passaremos, a seguir, a estudar as funções que possuem representão na forma (7.40).

## 7.3 Os Coeficientes de Fourier

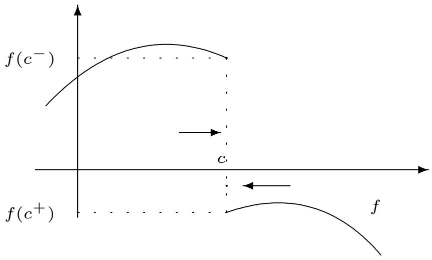
Começaremos tentanto responder a 2.$^a$ questão colocada no início do capítulo, isto é, sabendo-se que $f$ pode ser representada por uma expressão do tipo (7.1) como deverão ser os coeficientes $a_n$ e $b_n$?

Para isto, introduziremos uma classe de funções que nos ajudará a tratar da resposta a essa pergunta.

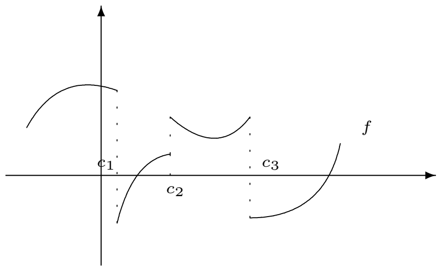
**Definição 7.3.1** *Dado $c \in \mathbb{R}$, diremos que uma função real de variável real $f$ definida em $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (exceto, eventualmente, em $c \in I$) tem uma **descontinuidade de 1.$^a$ espécie em** $x = c$ se $f$ não for contínua em $x = c$ (isto é, é descontínua em $x = c$) mas existem e são finitos os limites lateriais $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.*

*Neste caso denotaremos por*

$$f(c^+) \doteq \lim_{x\to c^+} f(x)$$
$$f(c^-) \doteq \lim_{x\to c^-} f(x) \tag{7.48}$$




*Diremos que a função $f$ acima é **contínua por partes em** $I$ (ou seccionalmente contínua em $I$) se em cada intervalo $(a,b)$ contido em $I$ ela tem, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1.ª espécie.*




*O conjunto formado por todas as funções contínuas por partes (seccionalmente contínuas) em $I$ será indicado por $SC(I)$.*

**Observação 7.3.1**

1. *Dizer que uma função tem uma descontinuidade de 1.ª espécie em $x = c$ é equivalente a dizer que seu gráfico tem um salto finito em $x = c$.*

2. *Dizer que uma função é contínua por partes em $I$ é equivalente a dizer que seu gráfico tem um número finito de saltos em cada intervalo $(a,b)$ contido em $I$.*

3. *Se $f,\, g \in SC(I)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então é fácil mostrar que (exercício para o leitor) $f + g$ e $\alpha f \in SC(I)$, isto é, $SC([a,b])$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$ se as funções forem a valores complexos).*

**Exemplo 7.3.1**

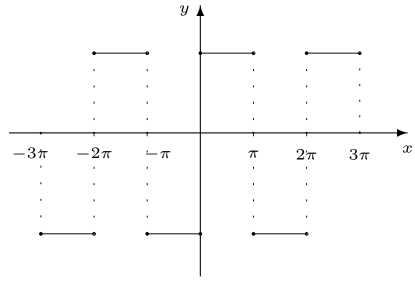
1. *Considere* $f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x < \pi \\ -1 & ,-\pi \leq x < 0 \\ f(x+2\pi) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ .

   *Então $f$ é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em $\mathbb{R}$.*

   *De fato, os pontos de descotinuidade de 1.ª espécie de $f$ são da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

   *Logo em qualquer intervalo limitado $[a,b]$ ela tem, no máximo, um número finito de pontos de descotinuidade de 1.ª espécie*

   *(Ela é conhecida como **onda quadrada**).*




*Onda Quadrada*

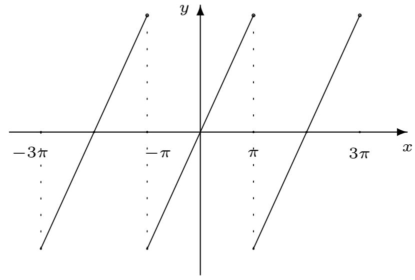
2. *Considere* $f(x) = \begin{cases} x & , -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$.

   *Então $f$ é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em $\mathbb{R}$.*

   *De fato, os pontos de descotinuidade de 1.ª espécie de $f$ são da forma $x = (2\pi+1)k$, $k \in \mathbb{Z}$.*

   *Logo em qualquer intervalo limitado $[a, b]$ ela tem, no máximo, um número finito de pontos de descotinuidade de 1.ª espécie*

   *(Ela é conhecida como **onda dente de serra**).*

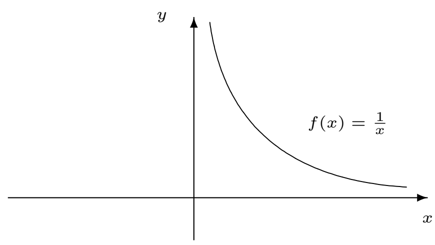



*Onda Dente de Serra*

3. *Considere* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , 0 \leq x \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$.

   *Então $f$ **não** é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em $\mathbb{R}$.*

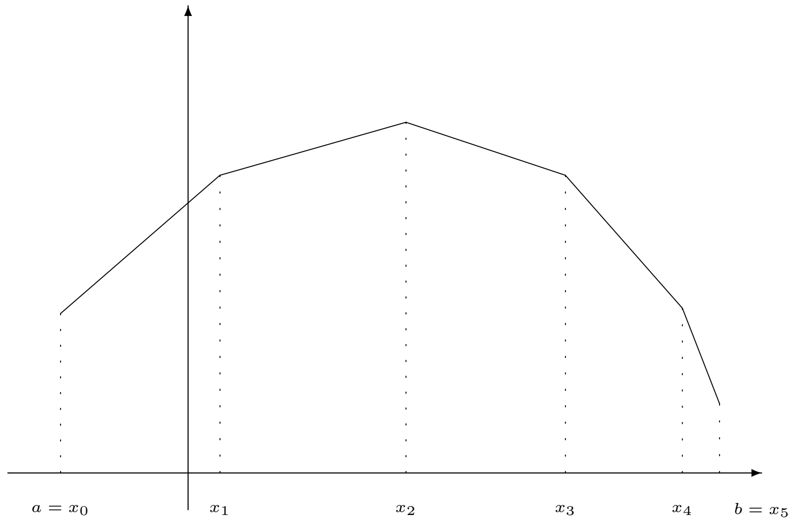
   *De fato, o ponto de descotinuidade de $f$ ($x = 0$) não é de 1.ª espécie (não existe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$).*



**Observação 7.3.2**

1. *Uma função seccionalmente contínua em* $[a,b]$ *não precisa, necessariamente, estar definida em todo o intervalo* $[a,b]$ *mas apenas em* $\bigcup_{j=0}^{N}(x_j, x_{j-1})$.

   *Isto será importante para incluirmos as derivadas de funções cujos gráficos são formados por poligonais (como no exemplo abaixo).*




2. *Toda função* $f$ *secionalmente contínua em* $[a,b]$ *é limitada em* $[a,b]$*, isto é, existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $|f(x)| \leq M$*, para todo* $x \in [a,b]$.

   *De fato, se* $f$ *é secionalmente contínua em* $[a,b]$ *então existem, no máximo, um número finito de* $x_j \in [a,b]$, $j = 0, \cdots, N$ *tal que* $f$ *é contínua em* $\bigcup_{j=1}^{N}(x_j, x_{j-1})$*, existem* $\lim_{x \to x_j^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_j^-} f(x)$ *(excetuando-se, eventualmente,* $x_0 = a$ *e* $x_N = b$ *que seriam* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x \to x_N^-} f(x)$*) e são finitos.*

   *Assim* $f_{|(x_j, x_{j-1})}$ *pode ser estendida a uma função contínua no intervalo* $[x_j, x_{j-1}]$ *portanto limitada nesse intervalo,* $j = 1, \cdots, N$*, implicando que* $f$ *é limitada no seu domínio.*

3. *Toda função contínua em* $I$ *é seccionalmente contínua em* $I$ *(exercício para o leitor).*

4. *Toda função seccionalmente contínua em* $[a,b]$ *é integrável em* $[a,b]$ *(exercício para o leitor).*

**Definição 7.3.2** *Se* $f$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são seccionalmente contínuas em* $[a,b]$ *definimos*

$$(f,g) \doteq \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

*Se $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{C}$ são seccionalmente contínuas em $[a,b]$ definimos*

$$(f,g) \doteq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

*onde $\overline{a+bi} \doteq a - bi$ (dito conjugado do número complexo $a+bi$).*

Com isto temos:

**Proposição 7.3.1** *A função $(\,.\,,\,.\,) : SC([a,b]) \times SC([a,b]) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tem as seguintes propriedades:*

*Se $f,\ g,\ h \in SC([a,b])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) então:*

1. *$(\alpha f + g, h) = \alpha(f,h) + (g,h)$;*
2. *$(f,g) = (g,f)$ (no caso complexo $(f,g) = \overline{(g,f)}$);*
3. *$(f,f) \geq 0$.*

**Demonstração:**

Faremos a demonstração para o caso $(\,.\,,\,.\,) : SC([a,b]) \times SC([a,b]) \to \mathbb{R}$.

O caso complexo será deixado como exercício para o leitor.

De 1.: $(\alpha f + g, h) = \int_a^b (\alpha f + g)(x)h(x)\,dx = \int_a^b [\alpha f(x) + g(x)]h(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = \alpha(f,h) + (g,h)$.

De 2.: $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = (g,f)$ .

De 3.: $(f,f) = \int_a^b f(x)f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$.

□

**Observação 7.3.3**

1. *A funcão $(\,.\,,\,.\,) : SC([a,b]) \times SC([a,b]) \to \mathbb{R}$ é quase um* **produto interno** *em $SC([a,b])$.*

   *Para ser um produto interno ela tem que satisfazer as prpriedades 1., 2. e 3. acima e também deveria satisfazer a seguinte propriedade: $(f,f) = 0$ se, e somente se, $f = 0$.*

   *Mas essa propriedade* ***não*** *vale em $SC([a,b])$.*

   *Para ver isto basta tomar a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ e observar que $f \in SC([0,1])$, $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$ mas $f \neq 0$.*

   *Mesmo assim ela desempenhará um papel inportante na determinação dos coeficientes $a_n$ e $b_n$ das expansão (7.1), como veremos mais adiante.*

2. *A funçao $(.,.)$ satisfaz a desiguladade de Cauchy-Schwartz, isto é,*

   *Se $f, g \in SC([a,b])$ então*
$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\| \tag{7.49}$$
   *onde $\|f\| \doteq \sqrt{(f,f)}$ (que é dito* ***semi-norma*** *de $f$).*

   *Faremos a demonstração da desigualdade acima para o caso real.*

   *O caso complexo será deixado com exercício para o leitor.*

   *Dado $\lambda \in \mathbb{R}^*$ sabemos que*
$$0 \leq (\lambda f + g, \lambda f + g) = \lambda^2 (f,f) + 2\lambda(f,g) + (g,g) = \lambda^2 \|f\|^2 + 2\lambda(f,g) + \|g\|^2.$$
   *Como $\lambda > 0$ temos que o discriminante, $\Delta$, do trinômio do 2.o grau à direita deverá ser negativo, isto é $\Delta \leq 0$.*

   *Logo $0 \geq \Delta = 4(f,g)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2$, isto é, $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$, como queríamos mostrar.*

3. *Como conseqüência temos que $\|.\|$ satisfaz a desigualdade triangular, ou seja:*
$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{7.50}$$
   *onde $f, g \in SC([a,b])$.*

   *De fato,*
$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2|(f,g)| + \|g\|^2 \\ &\overset{(7.50)}{\leq} \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2|(f,g)| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$
   *mostrando que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.*

4. *Além disso vale o teorema de Pitágoras, ou seja, se $f, g \in SC([a,b])$ com $(f,g) = 0$ então*
$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \tag{7.51}$$
   *De fato, se $(f,g) = 0$ então $\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$, como queríamos mostrar.*

   *Na verdade vale a recíproca, ou seja, $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ se, e somente se, $(f,q) = 0$.*

$\boxed{\textbf{31.05 - 24.a}}$

**Observação 7.3.4** *Antes de tentar encontrar os coeficientes $a_n$ e $b_n$ na expressão (7.1) observemos que:*

1. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* $2L-$ *periódica e integrável em* $[-L, L]$ *então* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{0}^{2L} f(x)\,dx$.
   *Em geral*
   $$\int_{x_0-L}^{x_0+L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx. \tag{7.52}$$
   *De fato,* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2L} f(x)\,dx + \int_{2L}^{L} f(x)\,dx$.
   *Mas*
   $\displaystyle\int_{2L}^{L} f(x)\,dx = \left\langle \begin{array}{l} y = x - 2L \Rightarrow dy = dx \\ x = 2L \Rightarrow y = 0 \\ x = L \Rightarrow y = -L \end{array} \right\rangle = \int_{0}^{-L} f(y+2L)\,dy \stackrel{(f(y+2L)=f(y))}{=} \int_{0}^{-L} f(y)\,dy = -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy$.
   *Portanto* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{0}^{2L} f(x)\,dx$.
   *A identidade* (7.52) *será deixada como exercício para o leitor.*

2. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função par (isto é,* $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$*) então* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.
   *De fato,* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx$.
   *Mas*
   $\displaystyle\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = \left\langle \begin{array}{l} y = -x \Rightarrow dy = -dx \\ x = -L \Rightarrow y = L \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\rangle = \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy) \stackrel{(f(-y)=f(y))}{=} \int_{0}^{L} f(y)\,dy = -\int_{-L}^{0} f(y)\,dy$.
   *Portanto* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.

3. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar (isto é,* $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$*) então* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.
   *De fato,* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx$.
   *Mas*

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = \left\langle \begin{array}{l} y=-x \Rightarrow dy=-dx \\ x=-L \Rightarrow y=L \\ x=0 \Rightarrow y=0 \end{array} \right\rangle = \int_{L}^{0} f(-y)\,(-dy) \overset{(f(-y)=-f(y))}{=} -\int_{0}^{L} f(y)\,dy,$$

*ou seja* $\displaystyle\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{L} f(y)\,dy.$

*Portanto* $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$

4. *Lembremos que se $f$ e $g$ são funções pares então $f.g$, $f+g$, $f-g$ e $f/g$ (se estiver definida) também serão funções pares.*

   *Se $f$ e $g$ forem ímpares então $f.g$, $f/g$ (se estiver definida) serão funções pares e $f+g$, $f-g$ serão funções ímpares.*

   *Se $f$ for uma função par e $g$ for uma função ímpar então $f.g$ e $f/g$ (se estiver definida) serão funções ímpares.*

A seguir definiremos duas famílias de funções que serão importantes no estudo das funções que podem ser expandidas na forma (7.1).

**Definição 7.3.3** *Para $n \in \mathbb{N}$ definiremos*

$$\phi_n(x) \doteq sen(\frac{n\pi}{L}x) \tag{7.53}$$

*e para $n = 0, 1, 2\cdots$ definiremos*

$$\psi_n(x) \doteq \cos(\frac{n\pi}{L}x) \tag{7.54}$$

*$x \in \mathbb{R}$.*

Estas duas famílias de funções têm as seguintes propriedades:

**Proposição 7.3.2**

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções $\psi_n$ e $\phi_n$ são $\dfrac{2L}{n}$-periódicas.*

   *Em particular todas são $2L$-periódicas;*

2. *As funções $\phi_n$ são funções ímpares, $n \in \mathbb{N}$;*

3. *As funções $\psi_n$ são funções pares, $n \in \mathbb{N}$;*

4. 
$$(\psi_n, \psi_m) = \begin{cases} 0, & m, n = 0, 1, 2, \cdots, m \neq n \\ L, & m = n \in N \\ 2L, & m = n = 0 \end{cases}; \tag{7.55}$$

$$(\psi_n, \phi_m) = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots, m \in \mathbb{N}; \tag{7.56}$$

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 0, & m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \\ L, & m = n \in \mathbb{N} \end{cases}. \tag{7.57}$$

<u>**Demonstração:**</u>

<u>De 1.:</u> Seja $T \doteq \dfrac{2L}{n}$.

Para $\phi_n$:

Temos que

$\phi_n(x+T) = sen(\dfrac{n\pi}{L}(x+T)) = sen(\dfrac{n\pi}{L}(x+\dfrac{2L}{n})) = sen(\dfrac{n\pi}{L}x+2\pi) \overset{sen \text{ é } 2\pi\text{-periódica}}{=} sen(\dfrac{n\pi}{L}x) = \phi_n(x)$.

Logo $T$ é um período para $\phi_n$.

Por outro lado se $T' > 0$ é um outro período para $\phi_n$ então deveremos ter $\phi_n(x+T') = \phi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja $sen(\dfrac{n\pi}{L}(x+T')) = sen(\dfrac{n\pi}{L}x)$, ou ainda $sen(\dfrac{n\pi}{L}x)\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') + \cos(\dfrac{n\pi}{L}x)sen(\dfrac{n\pi}{L}T') = sen(\dfrac{n\pi}{L}x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tomando-se $x = \dfrac{L}{2n}$ na identidade acima obtemos:

$sen(\dfrac{\pi}{2})\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') + \cos(\dfrac{\pi}{2})sen(\dfrac{n\pi}{L}T') = sen(\dfrac{\pi}{2})$, isto é, $\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') = 1$, logo $\dfrac{n\pi}{L}T' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $T' = k\dfrac{2L}{n} = kT$, mostrando que $T = \dfrac{2L}{n}$ é o período fundamental de $\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Para $\psi_n$:

Temos que

$\psi_n(x+T) = \cos(\dfrac{n\pi}{L}(x+T)) = \cos(\dfrac{n\pi}{L}(x+\dfrac{2L}{n})) = \cos(\dfrac{n\pi}{L}x+2\pi) \overset{(\cos \text{ é } 2\pi\text{-periódica})}{=} \cos(\dfrac{n\pi}{L}x) = \phi_n(x)$

Por outro lado se $T' > 0$ é um outro período para $\psi_n$ então deveremos ter $\psi_n(x+T') = \psi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja $\cos(\dfrac{n\pi}{L}(x+T')) = \cos(\dfrac{n\pi}{L}x)$, ou ainda $\cos(\dfrac{n\pi}{L}x)\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') + sen(\dfrac{n\pi}{L}x)sen(\dfrac{n\pi}{L}T') = \cos(\dfrac{n\pi}{L}x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tomando-se $x = \dfrac{L}{n}$ na identidade acima obtemos:

$\cos(\pi)\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') + sen(\pi)sen(\dfrac{n\pi}{L}T') = \cos(\pi)$, isto é, $\cos(\dfrac{n\pi}{L}T') = 1$, logo $\dfrac{n\pi}{L}T' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $T' = k\dfrac{2L}{n} = kT$, mostrando que $T = \dfrac{2L}{n}$ é o período fundamental de $\psi_n$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>De 2.:</u> Observemos que $\phi_n(-x) = sen(\dfrac{n\pi}{L}(-x)) \overset{(sen \text{ é ímpar})}{=} -sen(\dfrac{n\pi}{L}x) = -\phi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo são funções ímpares, $n \in \mathbb{N}$;

<u>De 3.:</u> Observemos que $\psi_n(-x) = \cos(\dfrac{n\pi}{L}(-x)) \overset{(\cos \text{ é par})}{=} \cos(\dfrac{n\pi}{L}x) = \psi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo são funções pares, $n \in \mathbb{N}$;

De 4.: Mostremos:

$$(\psi_n, \psi_m) = \begin{cases} 0, & m,n = 0,1,2,\cdots, m \neq n \\ L, & m = n \in N \\ 2L, & m = n = 0 \end{cases};$$

$$(\psi_n, \phi_m) = 0,\ n = 0,1,2,\cdots, m \in \mathbb{N};$$

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 0, & m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n \\ L, & m = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

De fato, sabemos que (exercício)

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b) \tag{7.58}$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b) \tag{7.59}$$

Somando-se (7.58) com (7.59) obtemos

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \tag{7.60}$$

e subtraindo-se (7.58) de (7.59) temos

$$sen(a)sen(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}. \tag{7.61}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \int_{-L}^{L} \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = \int_{-L}^{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,dx \\
&\overset{(7.60)}{=} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}[\cos(\frac{n\pi}{L}x + \frac{m\pi}{L}x) + \cos(\frac{n\pi}{L}x - \frac{m\pi}{L}x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} [\cos(\frac{n+m)\pi}{L}x) + \cos(\frac{(n-m)\pi}{L}x)]\,dx
\end{aligned} \tag{7.62}$$

Se $m \neq n$ temos:

$$\begin{aligned}
(\psi_n, \psi_m) &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} [\cos(\frac{n+m)\pi}{L}x) + \cos(\frac{(n-m)\pi}{L}x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}[sen(\frac{(n+m)\pi}{L}x).\frac{L}{(n+m)\pi}|_{-L}^{L} + sen(\frac{(n-m)\pi}{L}x).\frac{L}{(n-m)\pi}|_{-L}^{L}] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{(n+m)\pi}[sen((n+m)\pi) - sen((n+m)(-\pi)))]\right. \\
&\quad \left. + \frac{L}{(n-m)\pi}[sen((n-m)\pi) - sen((n-m)(-\pi)))]\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Se $m = n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}(\psi_n, \psi_n) &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[\cos(\frac{2n)\pi}{L}x) + 1]\,dx = \frac{1}{2}[sen(\frac{(2n)\pi}{L}x).\frac{L}{2n\pi} + x|_{-L}^{L} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{L}{2n\pi}sen(2n\pi) + L - (\frac{L}{2n\pi}sen(-2n\pi) - L)] = L. \end{aligned} \tag{7.64}$$

Se $m = n = 0$ temos:

$$(\psi_0, \psi_0) = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 2\,dx = 2L. \tag{7.65}$$

Se $m \neq n$ , $m, n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}(\phi_n, \phi_m) &= \int_{-L}^{L}\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[sen(\frac{n\pi}{L}x).sen(\frac{m\pi}{L}x)]\,dx \\ &\overset{(7.61)}{=} \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[\cos(\frac{(n-m)\pi}{L}x) - \cos(\frac{(n+m)\pi}{L}x)] \overset{(7.81)}{=} 0. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Se $m = n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}(\phi_n, \phi_n) &= \int_{-L}^{L}\phi_n(x)\phi_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[sen(\frac{n\pi}{L}x).sen(\frac{m\pi}{L}x)]\,dx \\ &\overset{(7.61)}{=} \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[\cos(\frac{(n-n)\pi}{L}x) - \cos(\frac{(2n)\pi}{L}x)] = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[1 - \cos(\frac{(2n)\pi}{L}x)] \\ &= \frac{1}{2}[x - \cos(\frac{2n\pi}{L}x)\frac{L}{2n\pi}]|_{x-L}^{x=L} = L. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Por outro lado (exercício),

$$sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a) \tag{7.68}$$
$$sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a) \tag{7.69}$$

Somando-se (7.68) com (7.69) obtemos

$$sen(a)\cos(b) = \frac{sen(a+b) + sen(a-b)}{2}. \tag{7.70}$$

Logo, se $n \in \mathbb{Z}^{+}$ e $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}(\psi_n, \phi_m) &= \int_{-L}^{L}\psi_n(x)\phi_m(x)\,dx = \int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)sen(\frac{m\pi}{L}x)\,dx \\ &\overset{(7.70)}{=} \int_{-L}^{L}\frac{1}{2}[sen(\frac{n\pi}{L}x + \frac{m\pi}{L}x) + sen(\frac{n\pi}{L}x - \frac{m\pi}{L}x)]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[sen(\frac{(n+m)\pi}{L}x) + sen(\frac{(n-m)\pi}{L}x)]\,dx. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Se $n \neq m$ temos:

$$
\begin{aligned}
(\psi_n, \phi_m) &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[sen(\frac{(n+m)\pi}{L}x) + sen(\frac{(n-m)\pi}{L}x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}[-\cos(\frac{(n+m)\pi}{L}x)\frac{L}{(n+m)\pi}|_{x=-L}^{x=L} - \cos(\frac{(n-m)\pi}{L}x)\frac{L}{(n-m)\pi}|_{x=-L}^{x=L}] = 0.
\end{aligned}
\tag{7.72}
$$

e finalmente, se $n = m$ teremos:

$$
(\psi_n, \phi_n) = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[sen(\frac{2n\pi}{L}x) + 0]\,dx = -\frac{1}{2}\cos(\frac{2n\pi}{L}x)\frac{L}{2n\pi}|_{x=-L}^{x=L} = 0. \tag{7.73}
$$

$\square$

**Observação 7.3.5**

1. *Suponhamos que*

$$
f(x) = \frac{a_0}{2}\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\psi_n(x) + b_n\,\phi_n(x)] \tag{7.74}
$$

*onde* $-L \leq x \leq L$ *e* $\psi_n$ *e* $\phi_m$ *são dadas como anteriormente para* $n \in \mathbb{Z}^+$ *e* $m \in \mathbb{N}$.

*Fomalmente temos:*

$$
\begin{aligned}
(f, \psi_0) &= (\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n], \psi_0) \\
&\overset{(cuidado!)}{=} \frac{a_0}{2}(\psi_0, \psi_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,(\psi_n, \psi_0) + b_n\,(\phi_n, \psi_0)] \overset{(7.56)}{=} \frac{a_0}{2}(\psi_0, \psi_0) \\
&\overset{(7.55)}{=} \frac{a_0}{2}2L = a_0 L.
\end{aligned}
\tag{7.75}
$$

*ou seja,*

$$
a_0 = \frac{1}{L}(f, \psi_0) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\psi_0(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \tag{7.76}
$$

*De modo análogo, se* $m \neq 0$, *temos:*

$$
\begin{aligned}
(f, \psi_m) &= (\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n], \psi_m) \\
&\overset{(cuidado!)}{=} \frac{a_0}{2}(\psi_0, \psi_m) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,(\psi_n, \psi_m) + b_n\,(\phi_n, \psi_m)] \overset{((7.55)\ e\ (7.56))}{=} a_m(\psi_m, \psi_m) \\
&\overset{(7.55)}{=} a_m L.
\end{aligned}
\tag{7.77}
$$

*ou seja, para $m \in \mathbb{N}$ teremos*

$$a_m = \frac{1}{L}(f, \psi_m) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\psi_m(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,dx. \tag{7.78}$$

*Assim como, se $m \in \mathbb{N}$, temos:*

$$\begin{aligned}(f, \phi_m) &= (\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\psi_n + b_n\,\phi_n], \phi_m)\\ &\overset{(cuidado!)}{=} \frac{a_0}{2}(\psi_0, \phi_m) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,(\psi_n, \phi_m) + b_n\,(\phi_n, \phi_m)] \overset{(7.56)\ e\ (7.57)}{=} b_m(\phi_m, \phi_m)\\ &\overset{(7.57)}{=} b_m L.\end{aligned} \tag{7.79}$$

*ou seja, para $m \in \mathbb{N}$ teremos*

$$b_m = \frac{1}{L}(f, \phi_m) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\phi_m(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{m\pi}{L}x)\,dx. \tag{7.80}$$

*Conclusão:*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{Z}^+ \tag{7.81}$$

*e*

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{m\pi}{L}x)\,dx,\ \ m \in \mathbb{N}. \tag{7.82}$$

2. *A obtenção de (7.81) e (7.82) foi formal, isto é, sem o rigor necessário com relação a convergência das séries envolvidas.*

3. *Dada uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ tal que as integrais (7.81) e (7.82) existam podemos formar a série de funções, denotada por $S[f]$:*

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2}\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\psi_n(x) + b_n\,\phi_n(x)], \tag{7.83}$$

*onde $a_n$ é dado por (7.81), $n \in \mathbb{Z}^+$ e $b_n$ é dado por (7.82), $n \in \mathbb{N}$ e estudar sua convergência.*

*A fórmulas (7.81) e (7.82) são chamadas de* ***fórmulas de Euler-Fourier****.*

Com isto temos a:

**Definição 7.3.4** *Sejam $L > 0$ e $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável.*

*A série (7.83) onde $a_n$ e $b_m$ são dados por (7.81) e (7.82), respectivamente, será denominada* ***série de Fourier*** *da função $f$.*

*Os coeficientes $a_n$ e $b_m$ são dados por (7.81) e (7.82), respectivamente, serão ditos* ***coeficientes de Fourier*** *da função $f$.*

**Observação 7.3.6**

1. *Da proposição (7.3.2) segue que cada termo da série (7.83) são funções $2L$-periódicas, logo se a série convergir, convirgirá para uma função $2L$-periódica na reta toda.*

   *Em particular, se $f(-L) \neq f(L)$, não poderemos esperar que a série de Fourier de $f$ venha a convergir para $f$ em $[-L, L]$ (pois $f(-L) = f(-L + 2L) = f(L)$).*

   *Portanto, é natural estudarmos as séries de Fourier de funções que estão definidas em toda a reta e sejam $2L$-periódicas, isto é, se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ tal que $f(-L) = f(L)$ e sua série de Fourier, $S[f]$, convergir para $f$ em $[-L, L]$ então $S[f]$ vai convergir para uma função $F$ em toda a reta $\mathbb{R}$ onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a extensão $2L$-periódica de $f$ a reta $\mathbb{R}$.*

2. *Observemos que se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável e par então $f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ é uma função par e $f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)$ é uma função ímpar, logo:*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

   *e*

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = 0,\ m \in \mathbb{N}.$$

3. *Observemos que se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável e ímpar então $f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ é uma função ímpar e $f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)$ é uma função par, logo:*

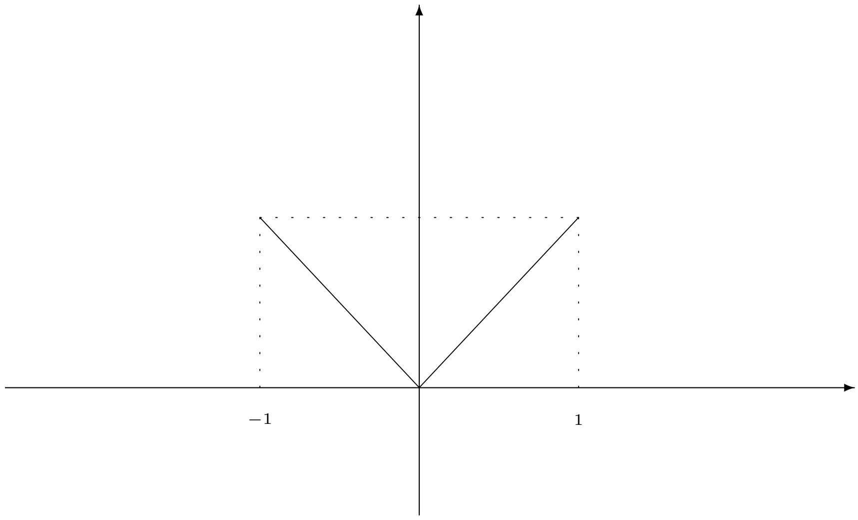
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = 0,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

   *e*

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ m \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 7.3.2**

1. *Encontrar a série de Fourier, $S[f]$, da função $f$ onde $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.*




*Onda Dente de Serra*

*Neste caso* $L = 1$. *Assim:*

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \overset{(f\ \acute{e}\ par)}{=} 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1;$$

*Se* $n \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \overset{L=1}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx \\ &\overset{(f\ e\ \cos\ s\tilde{a}o\ pares)}{=} 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[x\frac{sen(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{x=0}^{x=1} \int_0^1 \frac{sen(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right] \\ &= 2\left[(\frac{sen(n\pi)}{n\pi} - 0) + \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi^2},\ n\ \acute{\imath}mpar \\ 0, n\ par \end{cases}. \end{aligned} \tag{7.84}$$

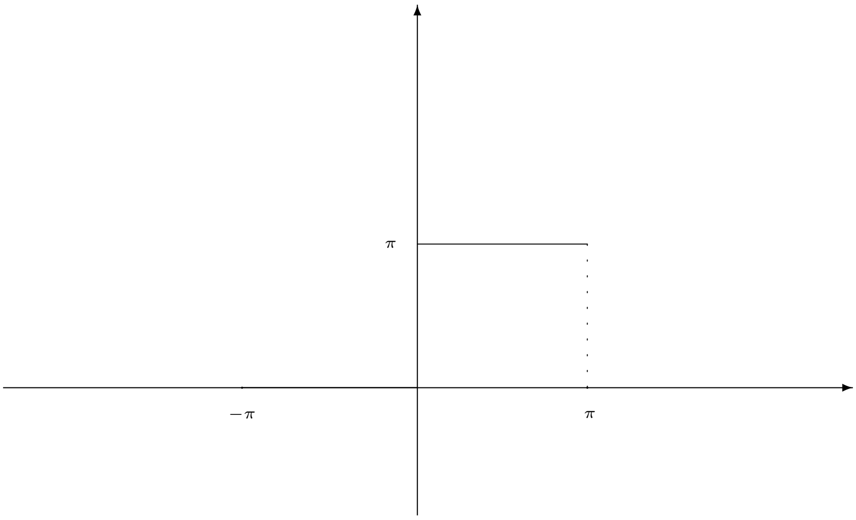
*e para* $m \in \mathbb{N}$ *temos*

$$b_m \overset{(f\ \acute{e}\ par)}{=} 0.$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\ \cos(n\pi x) + b_n\, sen(n\pi x)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \cos(n\pi x) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\ \cos[(2n-1)\pi x)]. \end{aligned}$$

2. *Encontrar a série de Fourier,* $S[f]$, *da função* $f$ *onde* $f(x) = \begin{cases} 0,\ -\pi \le x < 0\ \ ou\ x = \pi \\ \pi,\ 0 \le x < \pi \end{cases}$.




Onda Quadrada

*Neste caso* $L = \pi$. *Assim:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,dx = x|_{x=0}^{x=\pi} = \pi; \end{aligned}$$

*Se* $m \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{sen(nx)}{\pi n}|_{x=0}^{x=\pi} = 0; \end{aligned}$$

*e para* $n \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(x)sen(mx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)sen(mx)\,dx] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi sen(mx)\,dx \\ &= -\frac{\cos(mx)}{m}|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{m}[-\cos(m\pi)+1] = \frac{1}{m}[1-(-1)^m]\begin{cases} \frac{2}{m},\ m\ ímpar \\ 0, m\ par \end{cases}. \end{aligned}$$

*Portanto*

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,\cos(nx) + b_n\,sen(nx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,sen(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1}\,sen[(2n-1)x)]. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.06 - 25.a}}$

**Observação 7.3.7**

1. *Utilizando variáveis complexas, vamos encontrar as expressões para os coeficientes de Fourier numa forma diferente.*

   *Para isto lembremos que*

$$e^{ix} = \cos(x) + i sen(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.85}$$

*onde* $i \doteq \sqrt{-1}$. *Logo*

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i sen(-x) = \cos(x) - i sen(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{7.86}$$

*Somando-se (7.85) e (7.86) obtemos*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.87}$$

*e subtraindo-se (7.86) de (7.85) obtemos*

$$sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\ x \in \mathbb{R}. \tag{7.88}$$

*Portanto*

$$\cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2},\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.89}$$

*e*

$$sen(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} = i\frac{e^{-i\frac{n\pi}{L}x} - e^{i\frac{n\pi}{L}x}}{2},\ x \in \mathbb{R}. \tag{7.90}$$

*implicando que*

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\, sen(\frac{n\pi}{L}x)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + b_n\, i\frac{e^{-i\frac{n\pi}{L}x} - e^{i\frac{n\pi}{L}x}}{2}] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}], \end{aligned} \tag{7.91}$$

*Definindo-se*

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &\doteq \frac{a_0}{2}, \\ \hat{f}(n) &\doteq \frac{a_n - ib_n}{2},\ n \in \mathbb{N}, \\ \hat{f}(-n) &\doteq \frac{a_n + ib_n}{2},\ n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{7.92}$$

*segue de (**??**) que*

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \tag{7.93}$$

*onde a última série definida acima será encarada como um **valor próprio**, isto é,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \doteq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x}. \tag{7.94}$$

*Os coeficientes $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, dados por (7.92), serão denominados **coeficientes de Fourier na forma complexa** da função $f$.*

*A série de funções (7.93) será denominada **série de Fourier na forma complexa** da função $f$.*

2. *Estudar a convergência da série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por (**??**) é equivalente a estudar a convergência da série (7.93) da função $f$ (no sentido de (7.94)) .*

3. *Observemos que*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{0\pi}{L}x}\,dx,\\
\hat{f}(n) &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx]\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\cos(\frac{n\pi}{L}x) - i sen(\frac{n\pi}{L}x)]\,dx,\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} - i\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i}]\,dx\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}\\
\hat{f}(-n) &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx + i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx]\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\cos(\frac{n\pi}{L}x) + i sen(\frac{n\pi}{L}x)]\,dx\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + i\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i}]\,dx\\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{-n\pi}{L}x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

*ou seja*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7.95}$$

4. *Mesmo para funções reais* ($f : [-L, L] \to \mathbb{R}$) *, que é o caso que estamos tratando, os coeficientes de Fourier na forma complexa da função são, em geral, números complexos não reais, excetuando-se o caso em que os* $b_n = 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *(isto é,* $f$ *é uma função par).*

## 7.4 Interpretação Geométrica dos Coeficientes de Fourier

Observemos que o maneira como obtivemos os coeficientes de Fourier ($a_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e os $b_m$, $m \in \mathbb{N}$) é bastante natural se olharmos do modo que faremos a seguir.

Para isto consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual, a saber:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definamos

$$e_i \doteq (0, \cdots, 0, \underset{1}{\overset{i - \text{ésima posição}}{\downarrow}}, 0, \cdots, 0),\ i = 1, \cdots, n.$$

Com isto sabemos que $\{e_i;\ i = 1, \cdots, n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ (dita base canônica), ou seja

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} . \tag{7.96}$$

Logo se $x \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,$$

onde $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$.

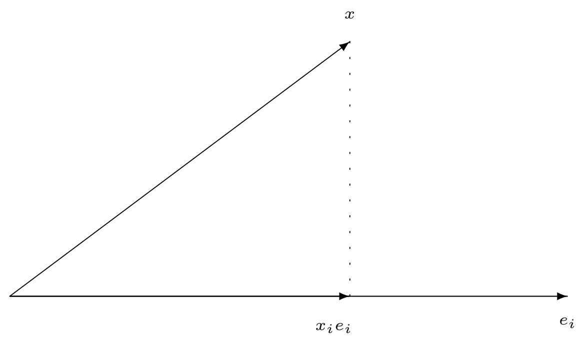
Observemos que

$$(x, e_i) = (\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (e_j, e_i) \overset{(7.96)}{=} x_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

ou seja,

$$x_i e_i = (x, e_i) e_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

o que significa, geometricamente, que $x_i e_i$ é a projeção ortogonal do vetor $x$ na direção do vetor unitário $e_i$, $i = 1, \cdots, n$.




No caso das séries de Fourier a situação é análoga, como veremos a seguir.

Sabemos que $C([-L, L])$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ que pode ser munido do produto interno

$$(f, g) = \int_{-L}^{L} f(x)\, g(x)\, dx,$$

onde $f, g \in C([-L, L])$.

Vimos na proposição (7.3.2) que o conjunto $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\phi_m : m \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal (será ortonormal se $L = 1$, excetuando-se $n = 0$).

Embora esse conjunto não seja uma base para o espaço vetorial $C([-L, L])$ no sentido algébrico, se uma função $f \in C([-L, L])$ puder ser expandida em série de Fourier, se a série convergir para a função $f$ em $[-L, L]$ e se a série puder ser integrada termo a termo (por exemplo se a convergência da série for uniforme em $[-L, L]$) então podemos justificar as contas formais feitas na observação (7.3.5) para obter as fórmulas de Euler-Fourier (7.81), (7.82).

Para ilustrar consideraremos o caso em que $L = 1$ ( e portanto $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\phi_m : m \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal, exceto se $n = 0$).

Temos que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\psi_n(x)\, dx \overset{(L=1)}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\psi_n(x)\, dx = (f, \psi_n),\ n \in \mathbb{Z}^+,$$
$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\phi_m(x)\, dx \overset{(L=1)}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\phi_m(x)\, dx = (f, \phi_m),\ m \in \mathbb{N},$$

ou seja, $a_n\psi_n$ e $b_m\phi_m$ são as projeções ortogonais de $f$ na direção dos vetores (neste caso unitários) $\psi_n$ e $\phi_m$, respectivamente, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $m \in \mathbb{N}$.

Observemos que se $L \neq 1$ então trocamos $\phi_n$ e $\phi_m$ por $\Psi_n$ e $\Phi_m$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $m \in \mathbb{N}$, respectivamente, onde $\Psi_n(x) \doteq \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}$ e $\Phi_n(x) \doteq \frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}$, $x \in [-L, L]$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $m \in \mathbb{N}$.

Deste modo o conjunto $\{\Psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\Phi_m : m \in \mathbb{N}\}$ será um conjunto ortonormal e poderemos aplicar as mesma idéias acima para este conjunto para concluir que $a_n\Psi_n$ e $b_m\Phi_m$ são as projeções ortogonais de $f$ na direção dos vetores (unitários) $\Psi_n$ e $\Phi_m$, respectivamente, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $m \in \mathbb{N}$.

Utilizaremos as idéias acima para obter algumas propriedades da séries de Fourier de uma função integrável em $[-L, L]$.

Consideraremos o espaço vetorial $SC([-L, L])$ em vez do espaço vetorial $C([-L, L])$ para o que faremos a seguir.

O primeiro resultado interessante é dado pela:

**Proposição 7.4.1** *Sejam $f \in SC([-L,L])$ e $S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\psi_n + b_n\phi_n]$ a série de Fourier de $f$.*

*Então para todo $N \in \mathbb{Z}^+$, $M \in \mathbb{N}$, $c_n, d_m \in \mathbb{R}$, $0 \leq n \leq N$ e $1 \leq m \leq M$ temos:*

$$\|f - (\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m)\| \leq \|f - (\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m\phi_m)\|. \tag{7.97}$$

*Além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se, $c_n = a_n$ e $d_m = b_m$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $m \in \mathbb{N}$.*

**Demonstração:**

Dado $M, N \in \mathbb{N}$ defina $S_{NM}$ como sendo o subespaço gerado pelo conjunto $S_{NM} \doteq \{\psi_n : 0 \leq n \leq N\} \cup \{\phi_m : 1 \leq m \leq M\}$, isto é,

$$[S_{NM}] = \{\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m\phi_m \ : \ c_n, d_m \in \mathbb{R},\ 0 \leq n \leq N,\ 1 \leq m \leq M\}.$$

Definamos $g : [-L,L] \to \mathbb{R}$ por $g(x) \doteq f(x) - [\frac{a_0}{2}\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n(x) + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m(x)]$, $-L \leq x \leq L$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
(g, \psi_0) &= (f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m], \psi_0) \\
&= (f, \psi_0) - \frac{a_0}{2}(\psi_0, \psi_0) - \sum_{n=1}^{N} a_n(\psi_n, \psi_0) + \sum_{m=1}^{M} b_m(\phi_m, \psi_0) \\
&\overset{(7.3.2)}{=} La_0 - \frac{a_0}{2}2L = 0.
\end{aligned} \tag{7.98}$$

Se $k \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
(g, \psi_k) &= (f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m], \psi_k) \\
&= (f, \psi_k) - \frac{a_0}{2}(\psi_0, \psi_k) - \sum_{n=1}^{N} a_n(\psi_n, \psi_k) + \sum_{m=1}^{M} b_m(\phi_m, \psi_k) \\
&\overset{(7.3.2)}{=} La_k - La_k = 0
\end{aligned} \tag{7.99}$$

e

$$\begin{aligned}
(g, \phi_k) &= (f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m], \phi_k) \\
&= (f, \phi_k) - \frac{a_0}{2}(\psi_0, \phi_k) - \sum_{n=1}^{N} a_n(\psi_n, \phi_k) + \sum_{m=1}^{M} b_m(\phi_m, \phi_k) \\
&\overset{(7.3.2)}{=} Lb_k - Lb_k = 0,
\end{aligned} \tag{7.100}$$

isto é, $g$ é ortogonal a todos os elementos do conjunto $S_{NM}$, logo será ortogonal ao subespaço $[S_{NM}]$.

Defina

$$h(x) \doteq \frac{a_0 - c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n - c_n)\psi_n(x) + \sum_{m=1}^{M}(b_m - d_m)\phi_m(x).$$

Logo $h \in [S_{NM}]$ e assim $g$ é ortogonal a $h$.

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, segue que

$$\begin{aligned}
&\|f - [\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m\phi_m]\|^2 \\
&= \|f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m] + [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m, \phi_k] \\
&\qquad - [\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m\phi_m]\|^2 \\
&= \|g + \frac{a_0 - c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n - c_n)\psi_n + \sum_{m=1}^{M}(b_m - d_m)\phi_m]\|^2 \\
&= \|g + h\|^2 \overset{\text{(Teor. Pitágoras)}}{=} \|g\|^2 + \|h\|^2 \overset{(*)}{\geq} \|g\|^2 = \|f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m]\|^2
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m]\| \leq \|f - [\frac{c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m\phi_m]\|,$$

mostrando (7.97).

Observemos que se $c_n = a_n$ e $d_m = b_m$ para $n \geq 0$ e $m \geq 1$ então vale a igualdade em (7.97).

Reciprocamente, se vale a igualdade em (7.97) de $(*)$ acima temos que $\|h\|^2 = 0$, logo $\displaystyle\int_{-L}^{L} |h(x)|^2\, dx = 0$.

Como $h$ é uma função contínua e $|h(x)| \geq 0$ em $[-L, L]$ temos que $h(x) = 0$ em $[-L, L]$, ou seja

$$\frac{a_0 - c_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n - c_n)\psi_n + \sum_{m=1}^{M}(b_m - d_m)\phi_m = 0 \text{ em } [-L, L].$$

Mas $S_{NM}$ é um conjunto L.I., logo os coeficientes da combinação linear acima devem ser todos iguais a zero, ou seja, $c_n = a_n$ e $d_m = b_m$, para $n \geq 0$ e $m \geq 1$, como queríamos mostrar.

□

**Observação 7.4.1** *A proposição acima nos diz que a soma parcial da série de Fourier de uma função de $SC([-L,L])$ nos dá a melhor aproximação possível entre as aproximações por combinações lineares envolvendo senos e cossenos.*

Uma outra propriedade importante das séries de Fourier é dado pela seguinte proposição:

**Proposição 7.4.2** *(Desigualdade de Bessel)*

*Se $f \in SC([-L,L])$ e $S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\psi_n + b_n\phi_n]$ então as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2$ convergem e vale*

$$L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2\right) \leq \|f\|^2. \tag{7.101}$$

**Demonstração:**

Para cada $N, M \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - [\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m]\|^2 \\
&= (f - \frac{a_0}{2}\psi_0 - \sum_{k=1}^{N} a_k\psi_k - \sum_{l=1}^{M} b_l\phi_l, f - \frac{a_0}{2}\psi_0 - \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n - \sum_{m=1}^{M} b_m\phi_m) \\
&= \overbrace{(f,f)}^{\|f\|^2=} - \frac{a_0}{2}\overbrace{(f,\psi_0)}^{La_0} - \sum_{n=1}^{N} a_n \overbrace{(f,\psi_n)}^{La_n} - \sum_{m=1}^{M} b_m \overbrace{(f,\phi_m)}^{Lb_m} \\
&\quad - \frac{a_0}{2}\overbrace{(\psi_0,f)}^{La_0} + \frac{a_0^2}{4}\overbrace{(\psi_0,\psi_0)}^{2L} + \sum_{n=1}^{N}\frac{a_0}{2}a_n\overbrace{(\psi_0,\psi_n)}^{0} + \sum_{m=1}^{M}\frac{a_0}{2}b_m\overbrace{(\psi_0,\phi_m)}^{0} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N} a_k\overbrace{(\psi_k,f)}^{La_k} + \sum_{k=1}^{N} a_k\frac{a_0}{2}\overbrace{(\psi_k,\psi_0)}^{0} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_k a_n \overbrace{(\psi_k,\psi_n)}^{0,\text{ se } n\neq k \text{ ou } L,\text{ se } n=k} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_k b_m\overbrace{(\psi_k,\phi_m)}^{0} \\
&\quad - \sum_{l=1}^{M} b_l\overbrace{(\phi_l,f)}^{Lb_l} + \sum_{l=1}^{M} b_l\frac{a_0}{2}\overbrace{(\phi_l,\psi_0)}^{0} + \sum_{l=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} b_l a_n\overbrace{(\phi_l,\psi_n)}^{0} + \sum_{l=1}^{M}\sum_{m=1}^{M} b_l b_m \overbrace{(\phi_l,\phi_m)}^{0,\text{ se } m\neq l \text{ ou } L,\text{ se } m=l} \\
&\overset{(7.3.2)}{=} \|f\|^2 - \frac{L}{2}a_0^2 - L\sum_{n=1}^{N} a_n^2 - L\sum_{m=1}^{M} b_m^2 - \frac{L}{2}a_0^2 + \frac{L}{2}a_0^2 - L\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + L\sum_{k=1}^{N} a_k^2 - L\sum_{l=1}^{N} b_l^2 + L\sum_{l=1}^{N} b_l^2 \\
&= \|f\|^2 - L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2\right),
\end{aligned} \tag{7.102}$$

isto é,

$$0 \leq \|f\|^2 - L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2\right),$$

ou seja

$$0 \leq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2 \leq \frac{1}{L}\|f\|^2, \tag{7.103}$$

para todo $N, M \in \mathbb{N}$.

Assim, segue de (7.103), que as seqüências das somas parcias das séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2$ são limitadas (e como $a_n^2,\ b_m^2\ \geq 0,\ n, m \in N$, serão monótonas) logo convergentes.

Portanto passando os limites em $N,\ M \to \infty$ em (7.103) obteremos a desigualdade de Bessel (7.101).

□

**11.06 - 26.a**

Na forma complexa, a desigualdade de Bessel torna-se

**Corolário 7.4.1** *Se $f \in SC([-L, L])$ e $S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x}$, onde $\hat{f}(n)$ são os coeficientes de Fourier na forma complexa, então a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ converge e vale*

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2L}\|f\|^2. \tag{7.104}$$

**Demonstração:**

Segue de (7.92) que:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(0)|^2 &= \frac{a_0^2}{4} \\
|\hat{f}(n)|^2 &= |\frac{a_n - ib_n}{2}|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2),\ n \in \mathbb{N} \qquad (7.105)\\
|\hat{f}(-n)|^2 &= |\frac{a_n + ib_n}{2}|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2),\ n \in \mathbb{N}, \qquad (7.106)
\end{aligned}$$

logo, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 &= |\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(-n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^2 \\
&= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n^2) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n^2).
\end{aligned}$$

Logo da proposição (7.4.2) segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ é convergente (lembremos que o sentido de convergência é $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |\hat{f}(n)|^2)$ e

$$\begin{aligned}\sum_{n=\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |\hat{f}(n)|^2 \overset{(7.106)}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2) \overset{(7.101)}{\leq} \frac{1}{2L}\|f\|^2\end{aligned}$$

completando a demonstração.

□

**Observação 7.4.2**

1. *Se $f \in SC([-L, L])$ então*

$$\overline{\hat{f}(0)} \overset{(7.92)}{=} \overline{\frac{a_0}{2}} \overset{(a_0\in\mathbb{R})}{=} \frac{a_0}{2} = \hat{f}(-0).$$

*E se $n \in \mathbb{N}$ temos:*

$$\begin{aligned}\overline{\hat{f}(n)} &\overset{(7.92)}{=} \overline{\frac{a_n - ib_n}{2}} = \frac{\overline{a_n} - \overline{ib_n}}{2} = \frac{\overline{a_n} - \overline{i}\,\overline{b_n}}{2} \overset{(a_n,b_n\in\mathbb{R})}{=} \frac{a_n + ib_n}{2} \overset{(7.92)}{=} \hat{f}(-n);\\ \overline{\hat{f}(-n)} &\overset{(7.92)}{=} \overline{\frac{a_n + ib_n}{2}} = \frac{\overline{a_n} + \overline{ib_n}}{2} = \frac{\overline{a_n} + \overline{i}\,\overline{b_n}}{2} \overset{(a_n,b_n\in\mathbb{R})}{=} \frac{a_n - ib_n}{2} \overset{(7.92)}{=} \hat{f}(n) = \hat{f}(-(-n)),\end{aligned}$$

*ou seja*

$$\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{7.107}$$

2. *Observemos também que se $f \in SC(\mathbb{R})$ e $2L$-periódica então considerando-se*

$$h(x) \doteq f(-x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

*então $h \in SC(\mathbb{R})$, é $2L$-periódica e para $n \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(-x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\ &= \left\langle \begin{array}{c} y = -x \Rightarrow dy = -dx \\ x = -L \Rightarrow y = L \\ x = L \Rightarrow y = -L \end{array} \right\rangle = \int_{L}^{-L} f(y)e^{-i\frac{n\pi}{L}(-y)}\,(-dy) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\frac{(-n)\pi}{L}y}dy = \hat{f}(-n),\end{aligned} \tag{7.108}$$

*isto é,*

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(-n), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

3. *O corolário (7.4.1) permanece válido se a função $f$ a valores complexos, isto é, se $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$ for seccionalmente contínua.*

   *De fato, se $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in [-L, L]$, onde $u, v : [-L, L] \to \mathbb{R}$ então $u, v \in SC([-L, L]$ e além disso, para $n \in \mathbb{Z}$ temos:*

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{N\pi}{L}x}\,dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(u(x)+iv(x))e^{-i\frac{N\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(x)e^{-i\frac{N\pi}{L}x}\,dx + i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} iv(x)e^{-i\frac{N\pi}{L}x}\,dx \\ &= \hat{u}(n) + i\hat{v}(n), \end{aligned} \tag{7.109}$$

   *logo, se $n \in \mathbb{Z}$ temos:*

$$\begin{aligned}|\hat{f}(n)|^2 = \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)} &= (\hat{u}(n)+i\,\hat{v}(n))(\overline{\hat{u}(n)+i\,\hat{v}(n)}) = (\hat{u}(n)+i\,\hat{v}(n))(\overline{\hat{u}(n)}+\overline{i\,\hat{v}(n)}) \\ &= (\hat{u}(n)+i\,\hat{v}(n))(\overline{\hat{u}(n)}+\bar{i}\,\overline{\hat{v}(n)}) \stackrel{(7.107)}{=} (\hat{u}(n)+i\,\hat{v}(n))(\hat{u}(-n)-i\,\hat{v}(-n)) \\ &= \hat{u}(n)\hat{u}(-n) - i\,\hat{u}(n)\hat{v}(-n)) + i\,\hat{v}(n)\hat{u}(-n) + \hat{v}(n)\hat{v}(-n) \\ &\stackrel{(7.107)}{=} \hat{u}(n)\overline{\hat{u}(n)} + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] + \hat{v}(n)\overline{\hat{v}(n)} \\ &= |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] \end{aligned} \tag{7.110}$$

   *Portanto, para $N \in \mathbb{N}$ segue que*

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{n=N}|\hat{f}(n)|^2 &\stackrel{(7.110)}{=} \sum_{n=-N}^{n=N}\left(|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)]\right) \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N}\left(|\hat{u}(n)|^2+|\hat{v}(n)|^2\right) + i\sum_{n=-N}^{n=N}(\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)) \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N}\left(|\hat{u}(n)|^2+|\hat{v}(n)|^2\right) + i\left(\sum_{n=-N}^{n=N}\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \overbrace{\sum_{n=-N}^{n=N}\hat{u}(n)\hat{v}(-n)}^{(*)}\right) \\ &\stackrel{(m=-n \text{ em } (*))}{=} \sum_{n=-N}^{n=N}\left(|\hat{u}(n)|^2+|\hat{v}(n)|^2\right) + i\left(\sum_{n=-N}^{n=N}\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \sum_{m=N}^{m=-N}\hat{u}(-m)\hat{v}(m)\right) \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N}\left(|\hat{u}(n)|^2+|\hat{v}(n)|^2\right). \end{aligned} \tag{7.111}$$

   *Mas do corolário (7.4.1) temos que $\displaystyle\sum_{n-\infty}^{\infty}|\hat{u}(n)|^2$ e $\displaystyle\sum_{n-\infty}^{\infty}|\hat{v}(n)|^2$ são convergentes (pois*

*$u, v \in SC([-L, L])$ e são reais), logo $\sum_{n-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ converge e*

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \stackrel{(7.111)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2\right) \stackrel{((7.104)\ para\ u\ e\ v)}{\leq} \frac{1}{2L}(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \frac{1}{2L}\|f\|^2. \tag{7.112}$$

Como conseqüência da desiguladade de Bessel temos o:

**Corolário 7.4.2** *(Lema de Riemann-Lebesgue)*
*Sejam $\phi_m$, $m \in \mathbb{N}$ e $\psi_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ como em (7.53) e (7.54), respectivamente.*
*Se $f \in SC[-L, L])$ e $S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\psi_n + b_n\phi_n]$ então*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m = 0. \tag{7.113}$$

**Demonstração:**

Da proposição (7.4.2) temos que as séries numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2$ convergem.
Logo $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{m\to\infty} b_m^2 = 0$, portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m = 0$.

□

Na forma complexa o resultado acima torna-se:

**Corolário 7.4.3** *(Lema de Riemann-Lebesgue forma complexa)*
*Se $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$ é seccionalmente contínua e $S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}(x)}$ então*

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0, \tag{7.114}$$

*ou seja, $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) = \lim_{n\to-\infty} \hat{f}(n) = 0$.*

**Demonstração:**

Do item 2. da observação (7.4.2) temos que as séries numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ converge.
Logo $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) = \lim_{n\to-\infty} \hat{f}(n) = 0$, como queríamos mostrar.

□

**Observação 7.4.3**

1. *Definamos $l^2(\mathbb{R}) \doteq \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$, isto é, o conjunto formado pelas seqüências reais de quadrado somável.*

*Com as operações usuais de soma de seqüência e multiplicação de número real por seqüência $l^2(\mathbb{R})$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (exercício).*

*Além disso $\|.\|_{l^2(\mathbb{R})} : l^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^2(\mathbb{R})} \doteq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$ é uma norma em $l^2(\mathbb{R})$ (exercício) (na verdade essa norma provém do produto interno $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ que está bem definido em $l^2(\mathbb{R})$, isto é, $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sqrt{((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}})}$ (exercício)).*

2. *Observemos que se $f,\, g \in SC([-L, L])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então*

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f + g})(n) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} (\alpha f + g)(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}}\, dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} (\alpha f(x) + g(x)) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&= \alpha\Big(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx\Big) + \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \\
&= \alpha\hat{f}(n) + \hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
\tag{7.115}
$$

*Além disso,*

$$
\|\hat{f} - \hat{g}\|^2_{l^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f - g}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\widehat{f - g})(n)|^2 \overset{(7.104)}{\leq} \frac{1}{2L}\|f - g\|^2_{L^2([-L,L])},
$$

*onde $\|f\|_{L^2([-L,L])} \doteq \int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx$, isto é,*

$$
\|\hat{f} - \hat{g}\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{2L}}\|f - g\|_{L^2([-L,L])}. \tag{7.116}
$$

*Logo, da desigualdade de Bessel (7.4.1), da identidade (7.115) e da desigualdade acima seque que a aplicação*

$$
\begin{array}{rccc}
\hat{} : & SC([-L, L]) & \to & l^2(\mathbb{R}) \\
& f & \mapsto & \hat{f}
\end{array}
$$

*é uma transformação linear que é contínua.*

## 7.5 Convergência Pontual da Série de Fourier

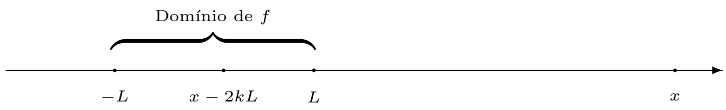
A seguir iniciaremos o estudo da convergência das séries de Fourier para uma função $f \in SC([-L, L])$.

Nesta seção estudaremos a convergência pontual da série de Fourier e na próxima seção a convergência uniforme.

Antes porém, vale observar que dada uma função $f \in SC([-L, L])$ (com $f(-L) = f(L)$) podemos estendê-la a uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2L$-periódica e que seja seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b]$ da seguinte forma:

$$F(x) = f(x - 2kL),$$

onde $-L \leq x - 2kL \leq L$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.




**Definição 7.5.1** *Definamos*

$$SC_{per}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ F \text{ é } 2L\text{-periódica e seccional/}_e \text{ contínua em todo intervalo } [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$$

*e*

$$C_{per}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ F \text{ é } 2L\text{-periódica e contínua } \mathbb{R}\}.$$

**Observação 7.5.1**

1. *Observemos que $SC_{per}(2L)$ e $C_{per}(2L)$ são espaços vetorias sobre $\mathbb{R}$ quando munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função (exercício).*

2. *Podemos indentificar de maneira natural, o espaço vetorial $SC([-L, L])$ com $SC_{per}(2L)$. Para isto dado $f \in SC([-L, L])$ (defina, se necessário, $f(L) \doteq f(-L)$ para que ela seja igual nos extremos do intervalo $[-L, L]$)) consideramos sua extensão $2L$-periódica a reta toda que estará em $SC_{per}(2L)$.*

   *Analogamente, se $F \in SC_{per}(2L)$ então sua restrição a $[-L, L]$ estará em $SC([-L, L])$.*

3. *Se $f \in SC_{per}(2L)$ então a série de Fourier de $f$ estará bem definida, isto é,*

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x), \tag{7.117}$$

*onde*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \tag{7.118}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N} \tag{7.119}$$

*ou*

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \tag{7.120}$$

*onde*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx,\ n \in \mathbb{Z} \tag{7.121}$$

Iniciaremos o nosso estudo da convergência pontual da série de Fourirer estabelecendo o seguinte resultado:

**Lema 7.5.1** *Seja que $f \in SC_{per}(2L)$ e diferenciável em $(-L, L)$, exceto em um número finito de pontos, e $f' \in SC_{per}(2L)$. Suponhamos também que $f$ é contínua em $x = 0$ e $f(0) = 0$.*

*Então a série de Fourier de $f$ converge para $0$ em $x = 0$, isto é, fazendo $x = 0$ em (7.117) e (7.120) temos:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,(= f(0)). \tag{7.122}$$

**Demonstração:**

Utilizaremos a forma complexa da série de Fourier, isto é, provaremos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = 0.$$

Para isto consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}, & x \neq 0, -L \leq x \leq L \\[2ex] -iL\dfrac{f'(0^+)}{\pi}, & x = 0 \end{cases} \tag{7.123}$$

e $g(x + 2L) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Observemos que existem $g(0^+)$ e $g(0^-)$ pois:

$$g(0^+) = \lim_{x\to 0^+} g(x) \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x}-1}{x-0}} \right].$$

Mas

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0^+) \text{ (que existe por hipótese)} \tag{7.124}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x}-1}{x-0}} = \frac{1}{\frac{d}{dx} e^{i\frac{\pi}{L}x}|_{x=0}} = \frac{L}{i\pi}, \tag{7.125}$$

ou seja

$$g(0^+) = f'(0^+)\frac{L}{i\pi} = -i\frac{L}{\pi} f'(0^+) = g(0), \tag{7.126}$$

portanto existe $g(0^+)$ e é igual a $g(0)$.

De modo semelhante:

$$g(0^-) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x+2L) \overset{-L\leq x+2L<L}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x+2L)}{e^{i\frac{\pi}{L}(x+2L)}-1}$$
$$\overset{f(x+2L)=f(x)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x}.e^{i2\pi}-1} \overset{e^{i2\pi}=1}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x}-1} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x}-1}{x-0}}\right]$$
$$\overset{(7.124)\text{ e }(7.125)}{=} f'(0^-)\frac{L}{i\pi} = -i\frac{L}{i\pi}f'(0^-), \tag{7.127}$$

isto é, existe $g(0^-)$.

Como $f \in SC_{per}(2l)$ e a função $x \to e^{i\frac{\pi}{L}x}-1$ é contínua e $2L$-periódica em $\mathbb{R}$ e só se anula em $x=0$ no intervalo $[-L,L]$ temos que a função $g \in SC_{per}(2l)$ (o único problema de $g$ no intervalo $[-L,L]$ seria $x=0$, mas nesse ponto existem os limites laterais).

Logo do Lema de Riemman-Lebesgue (na forma complexa) (7.4.3) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{g}(n) = \lim_{n\to -\infty} \hat{g}(n) = 0. \tag{7.128}$$

Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)(e^{i\frac{\pi}{L}x}-1)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)e^{-i\frac{(n-1)\pi}{L}x}\,dx - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \hat{g}(n-1)-\hat{g}(n). \tag{7.129}$$
$$\tag{7.130}$$

Logo

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \hat{f}(-N)+\hat{f}(-N+1)+\cdots+\hat{f}(N-1)+\hat{f}(N)$$
$$\overset{(7.129)}{=} (\hat{g}(-N-1)-\hat{g}(-N)) + (\hat{g}(-N)-\hat{g}(-N+1)) + \cdots$$
$$+ (\hat{g}(N-2)-\hat{g}(N-1)) + (\hat{g}(N-1)-\hat{g}(N))$$
$$= \hat{g}(-N-1)-\hat{g}(N)) \overset{n\to\infty}{\to} 0, \text{ devido a (7.128)} \tag{7.131}$$

Portanto, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n) = 0$, ou seja, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n) = f(0)$, logo a série de Fourier de $f$ em $x=0$ converge para $0 = f(0)$ como queríamos demonstrar.

□

**Observação 7.5.2**

1. *O (7.5.1) prova a convergência da série de Fourier na forma complexa* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$ *num sentido mais forte, a saber,*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \sum_{n=-N}^{M} \hat{f}(n) = 0$$

*e não apenas no sentido de valor principal, isto é,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = 0.$$

*De fato, pelo que vimos da demonstração do lema temos que:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{M} \hat{f}(n) &= \hat{f}(-N) + \hat{f}(-N+1) + \cdots + \hat{f}(M-1) + \hat{f}(M) \\ &\overset{(7.129)}{=} (\hat{g}(-N-1) - \hat{g}(-N)) + (\hat{g}(-N) - \hat{g}(-N+1)) + \cdots \\ &\quad + (\hat{g}(M-2) - \hat{g}(M-1)) + (\hat{g}(M-1) - \hat{g}(M)) \\ &= \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(M)) \overset{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}}{\to} 0, \ \textit{devido a } (7.128).\end{aligned}$$

*Portanto*

$$\lim_{N,\,M\to\infty} \sum_{n=-N}^{M} \hat{f}(n) = 0.$$

2. *A soma (7.131) é dita* ***soma telescópica****.*

Podemos agora tratar do resultado principal, a saber:

**Teorema 7.5.1** *Sejam que $f \in SC_{per}(2L)$ e diferenciável em $(-L, L)$, exceto em um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2L)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*Então a série de Fourier de $f$ em $x_0$ converge, pontualmente, para $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$, isto é,*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L} x_0) + b_n sen(\frac{n\pi}{L} x_0), \tag{7.132}$$

*onde*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{n\pi}{L} x)\, dx \tag{7.133}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L} x)\, dx, \ n \in \mathbb{N} \tag{7.134}$$

*ou*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L} x_0}, \tag{7.135}$$

*onde*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L} x}\, dx, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{7.136}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Consideremos a trasformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y)\doteq(x-x_0,y-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Observemos que $T(x_0,\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2})=(0,0)$ e $T(x,f(x))=(x-x_0,f(x)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2})$,
Defina $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$g(x)\doteq f(x+x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Então os pontos do gráfico de $g$ são da forma:

$$\begin{aligned}(x,g(x))&=(x,f(x+x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2})\overset{z\doteq x+x_0}{=}(z-x_0,f(z)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2})\\&=T(z,f(z))=T(x+x_0,f(x+x_0)).\end{aligned}\tag{7.137}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}g(0^+)&=\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}[f(x+x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}]=f(x_0^+)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\\&=\frac{f(x_0^+)-f(x_0^-)}{2}.\end{aligned}\tag{7.138}$$

$$\begin{aligned}g(0^-)&=\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}[f(x+x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}]=f(x_0^-)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\\&=\frac{f(x_0^-)-f(x_0^+)}{2},\end{aligned}\tag{7.139}$$

Logo de (7.138) e (7.139) segue que

$$\frac{g(0^+)+g(0^-)}{2}=\frac{1}{2}[\frac{f(x_0^+)-f(x_0^-)}{2}+\frac{f(x_0^-)-f(x_0^+)}{2}]=\frac{1}{4}[f(x_0^+)-f(x_0^-)+f(x_0^-)-f(x_0^+)]=0.$$

Observemos que como $f,f'\in SC_{per}(2L)$ segue que $g,g'\in SC_{per}(2L)$ (exercício).
Se definirmos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$h(x)\doteq\begin{cases}\dfrac{g(x)+g(-x)}{2} & -L\le x\le L,\ x\neq0\\ 0 & x=0\\ h(x+2L)=h(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases},$$

então $h,h'\in SC_{per}(2L)$ (exercício).
Além disso $h$ é contínua em $x=0$, pois,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}h(x)&\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)+g(-x)}{2}=\frac{g(0^+)+g(0^-)}{2}=0=h(0);\\ \lim_{x\to0^-}h(x)&\overset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)+g(-x)}{2}=\frac{g(0^-)+g(0^+)}{2}=0=h(0),\end{aligned}$$

logo $lim_{x\to 0}h(x) = 0 = h(0)$.

Aplicando o lema (7.5.1) para $h$ ($h$ satisfaz todas as condições do lema) logo sabemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = 0\,(= h(0)). \tag{7.140}$$

Mas

$$\hat{h}(n) \overset{7.108}{=} \frac{\hat{g}(n) + \hat{g}(-n)}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{7.141}$$

logo

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n) \overset{(7.141)}{=} \sum_{n=-N}^{N} \frac{\hat{g}(n)+\hat{g}(-n)}{2} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\hat{g}(n)}{2} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{\hat{g}(-n)}{2} \underset{(\sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(-n))}{=} \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n). \tag{7.142}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[f(x+x_0) - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}]e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x+x_0)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\
&= \text{ na 1.a integral fazendo: } \left\langle \begin{array}{l} y = x+x_0 \Rightarrow dy = dx \\ x = -L \Rightarrow y = -L + x_0 \\ x = L \Rightarrow y = L + x_0 \end{array} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(y)e^{-i\frac{n\pi}{L}(y-x_0)}\,dx - \frac{1}{2L}\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\
&\overset{(7.52)}{=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\frac{n\pi}{L}y}e^{i\frac{n\pi}{L}x_0}\,dx - \frac{1}{2L}\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\
&= \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x_0} - \frac{1}{2L}\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx.
\end{aligned} \tag{7.143}$$

Observemos que

$$\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \begin{cases} 2L & n = 0 \\ \dfrac{e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{-i\frac{n\pi}{L}}\Big|_{x=-L}^{x=L} = \dfrac{L}{-in\pi}\overbrace{[e^{-in\pi} - e^{+in\pi}]}^{=0} = 0 & n \neq 0. \end{cases} \tag{7.144}$$

Assim

$$\hat{g}(n) = \begin{cases} \hat{f}(0) - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}, dx & n = 0 \\ \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x_0}, & n \neq 0. \end{cases} \tag{7.145}$$

Logo

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x_0} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \stackrel{(7.145)}{=} -\sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) \stackrel{(7.142)}{=} -\sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n) \stackrel{N\to\infty}{\to} 0,$$

devido a (7.140), ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

como queríamos demonstrar.

□

**Observação 7.5.3**

1. *A demonstração acima é devido a P.R.Chernoff (1980).*

2. *O resultado acima nos diz que nas condições do teorema acima a série de Fourier de $f$ converge para a média do valor do salto de $f$ em $x_0$.*

3. *Se além de satisfazer as hipóteses do teorema acima a função $f$ for contínua em $x_0$ então temos que $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$ logo*

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x_0) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x_0), \tag{7.146}$$

*ou*

$$f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x_0}, \tag{7.147}$$

4. *Em particular, se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $2L$-periódica então, do teorema acima, a série de Fourier de $f$ converge pontualmente para a função $f$ em $\mathbb{R}$, isto é,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x), \tag{7.148}$$

*ou*

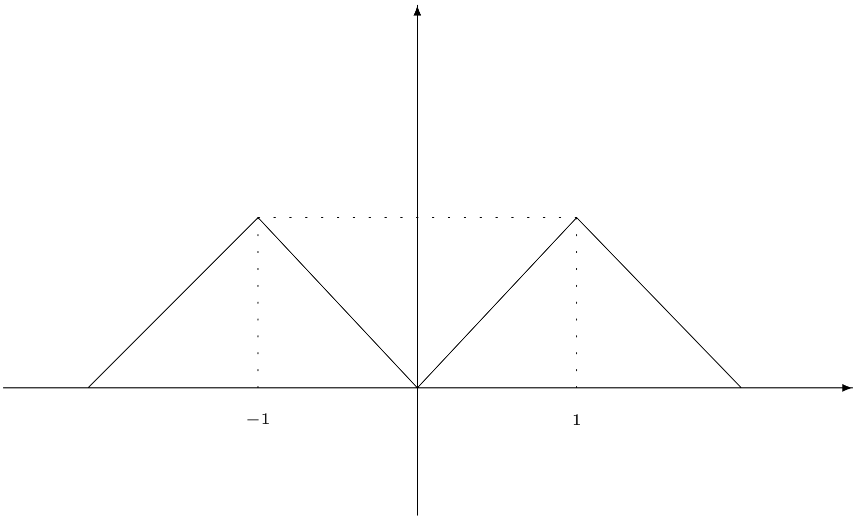
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \tag{7.149}$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Consideraremos a seguir dois exemplos os quais já foram calculados os coeficientes de Fourier.

**Exemplo 7.5.1**

1. *Seja* $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ f(x+2) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ , $L = 1$ *(ou seja* $f(x) = |x|$ *se* $|x| \leq 1$ *e* $f(x+2) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$*).*




Onda Dente de Serra

*Vimos anteriormente, (7.3.2) item 1., que a série de Fourier de* $f$ *é dada por:*

$$S[f](x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x)].$$

*Como* $f \in C_{per}(2)$ *e* $f'$ *é seccionalmente contínua em qualquer intervalo* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(f'(x) = -1,\ -1 < x < 0$ *e* $f'(x) = 1,\ 0 < x < 1)$.

*Portanto segue do teorema (7.146) e da observação (7.5.3) item 2. que a série de Fourier de* $f$ *converge para a* $f$ *pontualmente em* $\mathbb{R}$*, isto é,*

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x)], \ x \in \mathbb{R}.$$

*Em particular*

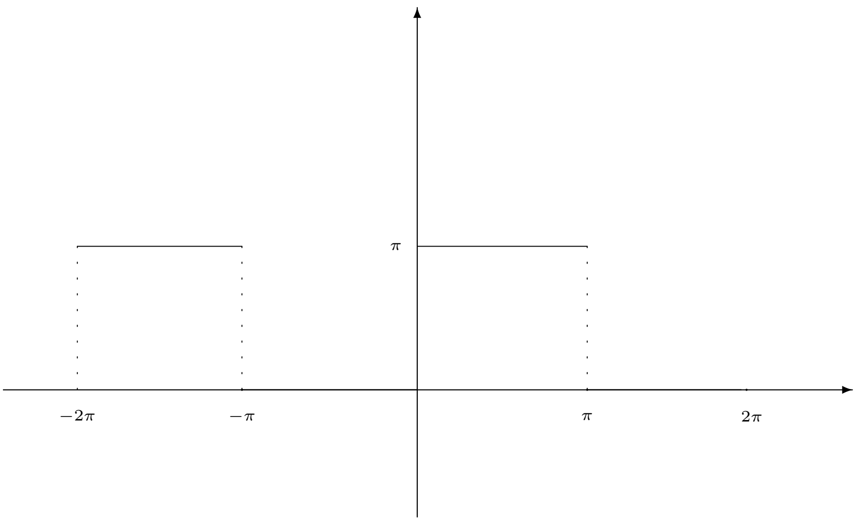
$$0 = f(0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi 0)] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

*isto é,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**14.06 - 27.a**

2. Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0,\ x = \pi \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$, $L = \pi$.




Onda Quadrada

*Vimos anteriormente, (7.3.2) item 2., que a série de Fourier de $f$ é dada por:*

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x].$$

*Como $f \in C_{per}(2)$ e $f'$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ($f'(x) = 0$, $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$).*

*Portanto segue da observação (7.5.3) item 3. que a série de Fourier de $f$ converge para a $f$ pontualmente em $\mathbb{R}$, exceto nos pontos da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é,*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x],\ x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*Em $x = 0$:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x]]|_{x=0} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

*Em $x = \pi$:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x]]|_{x=\pi} = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi}{2},$$

*Em $x = -\pi$:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x]]|_{x=-\pi} = \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{\pi}{2},$$

*Como $f$ é contínua em $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos que a série de Fourier de $f$ converge para $f(\dfrac{\pi}{2})$, isto é,*

$$\pi = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)x)]|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\, sen[(2n+1)\frac{\pi}{2})]$$
$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\,(-1)^n = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1}\,,$$

*ou seja,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

## 7.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

O objetivo desta secção é apresentar um resultado que garanta a convergência uniforme da série de Fourier para uma função periódica.

Para a demonstração desse resultado precisaremos de alguns outros, entre eles a:

**Proposição 7.6.1** *Seja que $f \in SC_{per}(2L)$ e diferenciável em $(-L, L)$, exceto em um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2L)$.*

*Então os coeficientes de Fourier (complexos) de $f$ e de $f'$ se relacionam da seguinte forma:*

$$\widehat{f'}(n) = \frac{in\pi}{L}\hat{f}(n),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{7.150}$$

*ou seja*

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

*e*

$$S[f'](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in\pi}{L}\hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x}.$$

*Em relação aos coeficientes de Fourier (reais) temos*

$$\begin{aligned} a'_0 &= 0 \\ a'_n &= \frac{n\pi}{L} b_n,\ n \in N \\ b'_n &= -\frac{n\pi}{L} a_n,\ n \in N; \end{aligned} \tag{7.151}$$

*onde*

$$S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n + b_n\phi_n$$

$$S[f'] = \frac{a'_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n\psi_n + b'_n\phi_n$$

**Demonstração:**

Observemos que se (7.150) ocorre então (7.151) ocorrerá, pois:

$$a_0' = \hat{f'}(0) \overset{(7.150)\text{ com } n=0)}{=} 0.\hat{f}(0) = 0.$$
$$\frac{a_n' - ib_n'}{2} \overset{((7.92)}{=} \hat{f'}(n) \overset{(7.150)}{=} \frac{in\pi}{L}\hat{f}(n) = \frac{in\pi}{L}\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{\frac{n\pi}{L}b_n + i\frac{n\pi}{L}a_n}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Logo $a_n' = \frac{n\pi}{L}b_n$ e $b_n' = -\frac{n\pi}{L}a_n$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, (7.151).

Para $n \in \mathbb{Z}$ tenos:

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f'(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \overset{\text{(int.p.partes)}}{=} \left\langle \begin{array}{l} u \doteq e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \Rightarrow du = -i\frac{n\pi}{L}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \\ dv \doteq f'(x)\,dx \Rightarrow v = f(x) \end{array} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2L}\left[ f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\Big|_{x=-L}^{x=L} - \int_{-L}^{L} f(x)(-i\frac{n\pi}{L}e^{-i\frac{n\pi}{L}x})\,dx \right]$$
$$\overset{(f,e^{-i\frac{n\pi}{L}\cdot}\text{ são } 2L\text{-periócida})}{=} i\frac{n\pi}{L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x})\,dx = i\frac{n\pi}{L}\hat{f}(n),$$

como queríamos demonstrar.

□

**Observação 7.6.1**

1. *Observemos que (7.150) nos diz que quanto mais diferenciável a função $f$ for mas rápido a seqüência dos coeficientes de Fourier decai.*

   *Mais precisamente, suponhamos que $f$ é $2L$-periódica e duas vezes diferenciável com $f'' \in SC_{per}(2L)$.*

   *Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos:*

$$\widehat{f''}(n) = \widehat{(f')'}(n) \overset{(7.150)}{=} \frac{in\pi}{L}\widehat{f'}(n) \overset{(7.150)}{=} \frac{(in\pi)^2}{L^2}\hat{f}(n).$$

   *Em geral, se $f$ é $k$-vezes diferenciável e $f^{(k)} \in SC_{per}(2L)$, $k \in \mathbb{N}$ podemos mostrar, por indução (exercício) que*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \frac{(in\pi)^k}{L^k}\hat{f}(n), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{7.152}$$

2. *Se $k \geq 2$, isto é se $f, f' \in C_{per}(2L)$ e $f''$ existe, exceto em um número finito de pontos de $[-L, L]$, e $f'' \in SC_{per}(2L)$ então a série de Fourier de $f$ converge uniformemente para $f$ em $\mathbb{R}$.*

   *De fato, do Lema de Riemann-Lebesgue, (7.4.3), temos que*

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f''}(n) = 0$$

*logo a seqüência numérica* $(\widehat{f''}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *é limitada, ou seja exite* $M > 0$ *tal que* $|\widehat{f''}(n)| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.
*Mas, para* $n \in Z$, $n \neq 0$ *temos*

$$|\hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x}| = |\hat{f}(n)|\underbrace{|e^{i\frac{n\pi}{L}x}|}_{=1} \overset{(7.150)}{=} |(\frac{L}{in\pi})^2\widehat{f''}(n)| = \frac{L^2}{\pi^2 n^2}|\widehat{f''}(n)| \leq \frac{ML^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}.$$

*Como a série numérixa* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *é convergente segue, do Teste M.de Weierstrass, que a série de funções (a série de Fourier de* $f$*)* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}\cdot}$ *converge uniformemente em toda a reta* $\mathbb{R}$.
*Do teorema (7.146) segue que a série de Fourier de* $f$ *converge para* $f$ *pontualmente em toda a reta (pois* $f$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*), portanto* $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *onde a convergência da série de funções é a convergência uniforme em toda a reta* $\mathbb{R}$, *isto é,*

$$\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x), \textit{unifomemente em } \mathbb{R}.$$

Na verdade temos um resultado um pouco mais geral, a saber:

**Teorema 7.6.1** *Sejam que* $f \in C_{per}(2L)$ *e diferenciável em* $(-L, L)$, *exceto em um número finito de pontos, com* $f' \in SC_{per}(2L)$.
*Então a série de Fourier de* $f$ *converge uniformemenste para* $f$ *em* $\mathbb{R}$, *isto é,*

$$\lim_{N\to\infty}[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x)] = f(x) \textit{ uniformemente em } \mathbb{R}, \tag{7.153}$$

*onde*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \tag{7.154}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx, \ n \in \mathbb{N} \tag{7.155}$$

*ou*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x} = f(x), \textit{ uniformemente em } \mathbb{R}, \tag{7.156}$$

*onde*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{7.157}$$

**Demonstração:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{1\leq|n|\leq N} |\hat{f}(n)| &\stackrel{(7.150)}{=} |\hat{f}(0)| + \sum_{1\leq|n|\leq N} |\frac{L}{in\pi}\hat{f}(n)| \\
&= |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi}\sum_{1\leq|n|\leq N} \frac{1}{|n|}|\widehat{f'}(n)| \\
&\stackrel{(7.50)}{\leq} |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}|\widehat{f'}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f'}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\stackrel{f'\in SC_{per}(2L) \text{ e Cor. } (7.4.1)}{\leq} |\hat{f}(0)| + \frac{L}{\pi}\left(\sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2L}\|\hat{f}'(n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{L}}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|\hat{f}'(n)\| \doteq M. \qquad (7.158)
\end{aligned}
$$

Com o teorema (7.6.1) podemos mostrar que a desigualdade de Bessel, (7.4.1), é na verdade uma igualdade, isto é:

**Teorema 7.6.2** *Sejam que $f$, $g \in C_{per}(2L)$ diferenciáveis em $(-L, L)$, exceto em um número finito de pontos, com $f'$, $g' \in SC_{per}(2L)$. Então*

$$\frac{1}{2L}(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \qquad (7.159)$$

*Em particular*

$$\frac{1}{2L}\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \qquad (7.160)$$

*que é conhecida como* ***Identidade de Parseval****.*

**Demonstração:**

Do teorema (7.6.1) a série de Fourier de $f$ converge uniformemente para $f$.

Logo do Corolário (5.3.1) item 2., temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2L}(f,g) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\sum_{n-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]\overline{g(x)}\,dx \\
&\overset{(5.3.1)}{=} \frac{1}{2L}\sum_{n-\infty}^{\infty}\int_{-L}^{L}\hat{f}(n)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\overline{g(x)}\,dx = \sum_{n-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\overline{g(x)}\,dx \\
&\sum_{n-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\overline{g(x)e^{i\frac{n\pi}{L}x}}\,dx = \sum_{n-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}g(x)e^{i\frac{n\pi}{L}x}\,dx} \\
&= \sum_{n-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.
\end{aligned}
$$

**Observação 7.6.2**

1. *O teorema (7.6.2) vale em situações mais gerais, como por exemplo se $f, g \in SC_{per}(2L)$, ou até condições mais fracas (por exemplo $f \in L^2([-L,L])$).*

2. *Em termos dos coeficientes de Fourier reais as relações (7.159) e (7.160) tornam-se:*

$$
\frac{1}{L}(f,g) = \frac{a_0\,A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n) \tag{7.161}
$$

*onde*

$$
S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n + b_n\phi_n
$$

*e*

$$
S[g] = \frac{A_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n + B_n\phi_n.
$$

*Para mostrar isso basta ver que:*

$$
\begin{aligned}
n = 0: &\qquad \hat{f}(0)\overline{\hat{g}(0)} = \frac{a_0}{2}\frac{\overline{A_0}}{2} \overset{A_0\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_0\,A_0}{4}; && (7.162)\\
n \in \mathbb{N}: &\qquad \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{a_n - ib_n}{2}\,\overline{\frac{A_n - iB_n}{2}} \overset{A_n,B_n\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_n - ib_n}{2}\,\frac{A_n + iB_n}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{4}[a_nA_n + b_nB_n + i(a_nB_n - b_nA_n)]; && (7.163)\\
n \in \mathbb{N}: &\qquad \hat{f}(-n)\overline{\hat{g}(-n)} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,\overline{\frac{A_n + iB_n}{2}} \overset{A_n,B_n\in\mathbb{R}}{=} \frac{a_n + ib_n}{2}\,\frac{A_n - iB_n}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{4}[a_nA_n + b_nB_n + i(-a_nB_n + b_nA_n)]. && (7.164)
\end{aligned}
$$

*Logo*

$$\frac{1}{L}(f,g) \overset{(7.159)}{=} 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = 2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

$$= 2\lim_{N\to\infty}[\hat{f}(0)\overline{\hat{g}(0)} + \sum_{n=1}^{N}\hat{f}(-n)\overline{\hat{g}(-n)} + \sum_{n=1}^{N}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}]$$

$$\overset{(7.162),(7.163)\ e\ (7.164)}{=} 2\lim_{N\to\infty}\{\frac{a_0\,A_0}{4} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4}[a_nA_n + b_nB_n + i(-a_nB_n + b_nA_n)]$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4}[a_nA_n + b_nB_n + i(a_nB_n - b_nA_n)]\}$$

$$= \frac{a_0\,A_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_nA_n + b_nB_n) = \frac{a_0\,A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n),$$

*como queríamos demonstrar.*

3. *Nesse caso a indentidade de Parseval tornar-se-á:*

$$\frac{1}{L}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{7.165}$$

4. *A identidade de Parseval pode ser muito útil, tanto na forma complexa quanto na forma real (7.165), (7.160), para encontrarmos a soma de certas séries numéricas, como veremos em alguns exemplos a seguir.*

**Exemplo 7.6.1**

1. *Vimos anteriormente no Exemplo (7.5.1) item 1. que se*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ f(x+2) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases},$$

*então*

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)\pi x)],$$

*em particular* $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_{2n+1} = \frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}$, $n \in \mathbb{N}$ *e, pelo teorema (7.6.1), a convergência é uniforme em* $\mathbb{R}$.

*Logo, da identidade de Parseval segue que* $(L = 1)$*:*

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2})^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \overset{Id.Parseval}{=} \|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$$

$$\overset{f\ \acute{e}\ par}{=} 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.$$

*ou seja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

2. *Se*

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2) = f(x), & x \in \mathbb{R}\ (L = \pi). \end{cases},$$

*então como* $f \in SC_{per}(2)$ *e* $f'$ *é seccionalmente contínua em qualquer intervalo* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *(*$f'(x) = 1$, $-\pi < x < \pi$ *segue que a série de Fourier de* $f$ *converge para* $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

*Mas* $f$ *é uma função ímpar em* $(-\pi, \pi)$ *logo* $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *e*

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\, dx \overset{f\ \text{é ímpar}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x sen(nx)\, dx \\ &\overset{int.porpartes}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = sen(nx) \to v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}[-x\frac{\cos(nx)}{n}|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx] = \frac{2}{\pi}[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{sen(nx)}{n^2}|_{x=0}^{x=\pi}] \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2}{n},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{7.166}$$

*Portanto*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2}{n} sen(nx),\ x \in \mathbb{R}.$$

*Observemos que se* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *então* $f$ *será contínua em* $x$ *logo a série de Fourier de* $f$ *convergirá para* $f$, *isto é*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2}{n} sen(nx),\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. *Seja* $f(x) = sen(10x) + 5\cos(5x) - 2sen(20x) - 4\cos(11x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$ *com* $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

*Como* $f$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *com derivada contínua (na verdade* $f \in C^{\infty}_{per}(2\pi)$*) temos que a série de Fourier de* $f$ *converge uniformemente para* $f$, *isto é,*

$$sen(10x) + 5\cos(5x) - 2sen(20x) - 4\cos(11x) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)$$

$x \in \mathbb{R}$.

*Comparando o lado direito como o lado esquerdo teremos:* $b_n = 0$, $n \neq 10, 20$, $b_{10} = 1$, $b_{20} = -2$; $a_n = 0$, $n \neq 5, 11$, $a_5 = 5$ *e* $a_{11} = -4$, *isto é,* $sen(10x) + 5\cos(5x) - 2sen(20x) - 4\cos(11x)$ *é a expansão da função* $f$ *em série de Fourier em* $[-\pi, \pi]$ *(*$L = \pi$*).*

## 7.7 Notas Históricas

A seguir vamos fornecer um breve relato do desenvolvimento da teria associada as séries de Fourier.

1. d'Almbert (1747) e Euler (1748) encontraram solução geral para a equação da onda $u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0$; a saber:
$$u(t,x) = F(x+t) + G(x-t), \ (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$
onde $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

2. D.Bernoulli (1753) afirmou que a equação da onda deveria ter solução da forma:
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt)), \ 0 \leq x \leq \pi \ \ (L = \pi).$$

3. Lagrange (1759) afirmou que a equação da onda em $[0,1]$ $(L=1)$ com dado inicial $f$ e velocidade inicial $g$ deveria ser dada por:
$$\begin{aligned} u(t,x) = 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [sen(n\pi y) sen(n\pi x)\cos(n\pi t)) f(y)\,dy \\ + 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} sen(n\pi y) sen(n\pi x) sen(n\pi t)) g(y)\,dy, \ 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{7.167}$$

Obs.: Se fizermos $t = 0$ em (7.167) e trocarmos a integral com a série obteremos:
$$\begin{aligned} f(x) = u(0,x) &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [sen(n\pi y) sen(n\pi x)\cos(n\pi 0)) f(y)\,dy \\ &+ 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} sen(n\pi y) sen(n\pi x) sen(n\pi 0)) g(y)\,dy, \\ &= 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [sen(n\pi y) sen(n\pi x) f(y)\,dy \\ &\overset{(\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1)}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[\int_0^1 sen(n\pi y) f(y)\,dy]}_{\text{Coef. de Fourier}} sen(n\pi x) \ \ 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{7.168}$$

4. Fourier (1811) obteve os coeficientes de Fourier e escreveu as séries de senos e cossenos de várias funções. Segundo consta, ele dizia que qualquer função periódica poderia ser expressa por uma tal série. Mais tarde foi mostrado que isso não é verdade.

5. Dirichlet (1829 e 1837) foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função periódica poderia ser representada por uma série de Fourier.

   Produziu os primeiros critérios de convergência da série de Fourier.

6. Riemann (18..) propôs ecnontrar condições necessárias e suficientes para que uma função pudesse ser representada por uma série de Fourier. Como estas questões estavam ligadas a integração de funções, ai começa a teoria de integração de Riemann.
7. de Bois e Reymond (1876) construiram uma função contínua cuja série de Fourier divergia em um ponto (depois construiram uma outra para o qual a série de Fourier divergia num conjunto denso).

   Féjér (1909) deu exemplos mais simples.
8. Dini (1880) conseguiu critérios para a convergência da série de Fourier (Teste ou Critério de Dini).
9. Jordan (1881) demostrou outro critério de convergência da série de Fourier (Critério de Jordan).

Obs.: Todos estes trabalhos, e muitos outros, conduziram a uma melhor compreensão das funções descontínuas e propiciaram os trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, culminando com a introdução de um novo conceito de integração. Ai começa a teoria moderna das séries de Fourier.

10. Riesz e Fischer (1907) mostraram a convergência da séire de Fourier na norma $\|.\|_2$ para funções cujo módulo ao quadrado são integráveis em um intervalo $[0, L]$.
11. Carleson (1966) mostrou que para uma função módulo ao quadrado são integráveis em um intervalo $[0, L]$ a série de Fourier converge, exceto num conjunto de medida de Lebesgue zero, para a própria função.

## 7.8 Aplicação de Série de Fourier a EDP's

Faremos uso da teoria das séries de Fourier para resolver alguns problemas aplicados. Na verdade trataremos de aproximações de problemas físicos que envolvem EDP's (Equações Diferenciais Parciais).

### 7.8.1 O Problema da Condução do Calor em um Fio

O objetivo é encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito (de comprimento $L > 0$) os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo no instante inicial ($t = 0$), que está isolado termicamente (imagine que o fio está dentro de um isopor) e cujas extremidades são mantidas a $0^o\, C$ ao longo de todo o processo.

Se imaginarmos que o fio é o intervalo $[0, L] \subseteq \mathbb{R}$ e que $u = u(t, x)$ nos dá a temperatura no ponto $x$ do fio no instante $t \geq 0$ então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar $u = u(t, x)$, $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$ que satisfaça:

$$\partial_t u(t, x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t, x), \;\; t > 0,\, x \in [0, L] \tag{7.169}$$

$$u(0, x) = f(x), \;\; x \in [0, L] \;\; \text{(temp. no ponto } x \in [0, L] \text{ do fio é } f(x).) \tag{7.170}$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \;\; t \geq 0, \text{(temp. nos extremos do fio, } x = 0 \text{ e } x = L, \text{ é } 0) \tag{7.171}$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L)). \tag{7.172}$$

A constante $\alpha > 0$ está relacionada com a condutibilidade térmica do fio (isto é, depende do material que o fio é feito).

No nosso caso, vamos supor que $\alpha = 1$ para facilitarmos as contas.

Aplicando o método da separação de variáveis desenvolvido no início do capítulo (ver (7.6)) obtemos que $u = u(t,x)$ deverá ter a seguinte forma (ver (7.21)):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L].$$

Fazendo $t = 0$ e utilizando (7.170) obtemos

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0,L], \tag{7.173}$$

isto é, precisamos saber expandir $f$ em série de Fourier (em senos) em $[0,L]$.

Observemos que precisamos conhecer $f$ no intervalo $[-L,L]$, ou seja precisamos encontrar uma extensão de $f$ ao intervalo $[-L,L]$ (se possível) e, posteriormente, considerarmos uma extensão desta $2L-$periódica a toda a reta $\mathbb{R}$ (se possível).

Como estender $f$ ao intervelo $[-L,L]$?

Voltemos na representação de $f$ em série de Fourier.

Observemos que o lado direito da igualdade é uma função ímpar (em toda a reta $\mathbb{R}$), logo o natural é considerarmos uma extensão ímpar de $f$ ao intervalo $[-L,L]$, que denotaremos por $F$.

Na verdade $F : [-L,L] \to \mathbb{R}$ será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & -L \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{7.174}$$

Como $f(L) = f(0) = 0$ (ver (7.5)) segue que se $f$ é contínua em $[0,L]$ essa extensão $F$ será uma função contínua em $[-L,L]$.

Agora podemos considerar uma extensão (na verdade só tem uma) $2L-$periódica de que indicaremos tamb;em por $F$, ou seja $F(x) = F(x+2kL)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ é escolhido de tal sorte que $-L \leq x + 2kL \leq L$.

Se $f \in C([0,L])$, com $f(0) = f(L) = 0$ então $F \in C_{per}(2L)$ e ímpar.

Logo segue que os coeficientes de Fourier de $F$ (e portanto de $f$) serão da forma:

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde $a_n = 0$, $n = 0,1,2,\cdots$ (pois $F$ é ímpar) e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

(pois $F(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)$ é uma função par), isto é, se $f \in C([0,L])$, com $f(0) = f(L) = 0$ então

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L]. \tag{7.175}$$

com

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\, dx \tag{7.176}$$

será uma candidata a solução do nosso problema.

Para completar precisamos mostrar que $u = u(t, x)$ dada acima (7.175) é realmente solução do problema, isto é:

i. a série (7.175) converge em $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$;

ii. a série (7.175) pode ser derivada termo a termo duas vezes em relação a $x$ e a $t$ em $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$;

iii. $u = u(t, x)$ satisfaz a (7.169), (7.170) e (7.171).

Na verdade mostraremos que $u \in C([0, \infty) \times [0, L]) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$ e a série pode ser derivada termo a termo quantas vezes precisarmos em $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$ se $f \in C([0, L)])$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos e $f' \in SC([0, L])$ e $f(0) = f(L) = 0$ (neste caso sua extensão $F$, ímpar e $2L$-periódica, satisfaz: $F \in C_{per}(2L)$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos e $F' \in SC_{per}(2L)$ ).

Provaremos o seguinte resultado:

**Teorema 7.8.1** *Suponhamos que $f \in C([0, L)])$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos e $f' \in SC([0, L])$ e $f(0) = f(L) = 0$.*

*Então a série de funções (7.175) converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$ para uma função $u \in C([0, \infty) \times [0, L]) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L])$ que é solução de (7.169)-(7.171), onde os $b_n$, $n \in \mathbb{N}$, são dados por (7.176).*

**Demonstração:**

Mostremos, primeiramente que a série de funções (7.175) converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Para isto observemos que a série de Fourier de $f$ (na verdade da sua extensão ímpar e $2L$-periódica) converge uniformemente para $f$ (pelo teorema (7.6.1)), isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\frac{n\pi}{L}x), \text{ uniformemente para } x \in \mathbb{R},$$

onde $b_n$ são dados por (7.176), logo para $t = 0$ a série (7.175) converge uniformemente (para a função $f$), em particular, $u(0, x) = f(x)$, $0 \le x \le L$, ou seja provamos (7.170).

Segue do Lema de Riemann-Lebesgue (7.4.2) que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, em particular a seqüência $(b_n)_{n \in N}$ é limitada, isto é, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \le M,\ n \in \mathbb{N}.$$

Se $t_0 > 0$ mostremos que a série de funções (7.175) converge uniformemente $[t_0, \infty) \times [0, L]$.

Para isso, observemos que para $t \geq t_0$ e $0 \leq x \leq L$ temos:

$$|b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)| \overset{t\geq t_0,\ |sen(\frac{n\pi}{L}x)|\leq 1}{\leq} |b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}| \leq M e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0} \doteq c_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Mas a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} M e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}$ é convergente pois tomando-se $d_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{M e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}}{\frac{1}{n^2}} = M \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}} = M \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} M \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}x^2}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = M \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_0\, e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = 0.\end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do Critério da razão por limites, segue que série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}$ é convergente.

Logo Teste M.de Weierstrass (5.3.1) segue que a série de funções

$$u(t,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

converge uniformemente em $[t_0, \infty) \times [0, L]$.

Da convergência uniforme segue que $u \in C([0,\infty) \times [0, L])$.

Mostremos que $u \in C^{\infty}((0,\infty) \times [0, L])$ e que a série de funções (7.175) pode ser derivada (a qualquer ordem) em relação a $t$ ou a $x$, termo a termo, em $(0,\infty) \times [0, L]$.

Seja $t_0 > 0$ fixado e definamos

$$u_n(t,x) \doteq b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x),\ (t,x) \in (t_0,\infty) \times [0,L],\ n \in \mathbb{N}.$$

Temos que $u_n \in C^{\infty}((t_0,\infty) \times [0,L])$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que

$$\begin{aligned}\partial_t u_n(t,x) &= \partial_t [b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)] = b_n[-\frac{n^2\pi^2}{L^2}] e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x),\quad (t,x) \in (t_0,\infty) \times [0,L],\ n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|\partial_t u_n(t,x)| &= |-\frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)| = \frac{n^2\pi^2}{L^2}|b_n| e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} |sen(\frac{n\pi}{L}x)| \\ &\leq M \frac{n^2\pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0} \doteq s_n,\quad (t,x) \in (t_0,\infty) \times [0,L],\ n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{d_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{M\frac{n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}}{\frac{1}{n^2}} = M\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}} = \frac{M\pi^2}{L^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}}\\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{M\pi^2}{L^2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}x^4}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = \frac{M\pi^2}{L^2}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_0\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}}\\
&= \frac{3M\pi^2}{2L^2}\frac{1}{\frac{\pi^2}{L^2}t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{3M}{2t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}x^2}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}}\\
&\frac{3M}{2t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_0\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = 0
\end{aligned} \tag{7.177}$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do Critério da razão por limites, segue que série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{n^2\pi^2}{L^2}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}$ é convergente.

Logo Teste M.de Weierstrass (5.3.1) segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial_t u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{n^2\pi^2}{L^2}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)$$

converge uniformemente em $[t_0,\infty)\times[0,L]$.

Como a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)$ converge em $[0,\infty)\times[0,L]$ segue do Corolário (5.3.1) item 3. que a série de funções pode ser derivada em relação a $t$ , termo a termo, em $[t_0,\infty)\times[0,L]$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= \partial_t\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n=1}^{\infty}\partial_t[b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)]\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{n^2\pi^2}{L^2}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x),\ \ (t,x)\in[t_0,\infty)\times[0,L].
\end{aligned} \tag{7.178}$$

De modo semelhante temos para $(t,x)\in[t_0,\infty)\times[0,L]$ que:

$$\begin{aligned}
\partial_x u_n(t,x) &= \partial_x[b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)] = b_n[\frac{n\pi}{L}]e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\\
&= \frac{n\pi}{L}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x),\ \ (t,x)\in(t_0,\infty)\times[0,L],\ n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|\partial_x u_n(t,x)| &= |\frac{n\pi}{L}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)| = \frac{n\pi}{L}|b_n|e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}|\cos(\frac{n\pi}{L}x)|\\
&\leq M\frac{n\pi}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0} \doteq r_n,\ \ (t,x)\in(t_0,\infty)\times[0,L],\ n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{d_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{M\frac{n\pi}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}}{\frac{1}{n^2}} = M\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\frac{n\pi}{L}}{e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}} = \frac{M\pi}{L}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{M\pi}{L}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}x^3}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = \frac{M\pi}{L}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_0\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \\
&= \frac{M\pi}{Lt_0}\frac{3L^2}{2\pi^2 t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{3LM}{2\pi t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} \\
&= \frac{3LM}{2\pi t_0}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x\pi^2}{L^2}t_0\,e^{\frac{x^2\pi^2}{L^2}t_0}} = 0.
\end{aligned}$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do Critério da Razão por Limites, segue que série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{n\pi}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t_0}$ é convergente.

Logo Teste M.de Weierstrass (5.3.1) segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty}\partial_x u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

converge uniformemente em $[t_0,\infty)\times[0,L]$.

Como a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)$ converge em $[0,\infty)\times[0,L]$ segue do Corolário (5.3.1) item 3. que a série de funções acima pode ser derivada em relação a $t$ , termo a termo, em $[t_0,\infty)\times[0,L]$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\partial_x u(t,x) &= \partial_x\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n=1}^{\infty}\partial_x[b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x), \quad (t,x)\in(t_0,\infty)\times[0,L]. \qquad (7.179)
\end{aligned}$$

Logo de (7.178) e (7.179) segue que $u\in C([0,\infty)\times[0,L])\cap C^1((0,\infty)\times[0,L])$ e que a série de funções (7.175) pode ser derivada em relação a $t$ ou a $x$, termo a termo, em $((0,\infty)\times[0,L]$.

De modo análogo mostra-se (exercício) que $u\in C([0,\infty)\times[0,L])\cap C^\infty((0,\infty)\times[0,L])$ e que a série de funções (7.175) pode ser derivada em relação a $t$ ou a $x$ (a qualquer ordem, termo a termo, em $((0,\infty)\times[0,L]$, isto é:

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k x^m}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k x^m}[b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}sen(\frac{n\pi}{L}x)],$$

para todo $(t,x)\in(0,\infty)\times[0,L]$ e $k$, $m\in\mathbb{N}$.

Finalmente temos, para $(t,x) \in (0,\infty) \times [0,L]$, que":

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 u(t,x) &= \partial_x^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_x^2 [b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \partial_x [b_n \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\frac{n\pi}{L})^2 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} [-sen(\frac{n\pi}{L}x)] \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) \qquad (7.180)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= \partial_t \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t [b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-\frac{n^2\pi^2}{L^2}) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x). \qquad (7.181)
\end{aligned}$$

Calculando-se (7.181)-(7.180) obtemos:

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) - [-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) = 0],$$

isto é, $u = u(t,x)$ satisfaz a EDP (7.169) em $(0,\infty) \times [0,L]$.

Além disso:

$$u(t,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}L) = u(t,L),\ t \geq 0,$$

isto é, $u = u(t,x)$ satisfaz (7.171).

Conclusão:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x),\ (t,x) \in (0,\infty) \times [0,L]$$

é solução do problema (7.169)-(7.171) e além disso $u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,L])$, onde $b_n$, $n \in \mathbb{N}$ são os coeficientes de Fourier da expensão ímpar, $2L$-periódica de $f$ a reta toda.

□

**Observação 7.8.1**

1. *Podemos mostrar (será omitida a prova) que a solução acima é única.*

2. *De modo semelhante podemos tratar do problema de encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito (de comprimento $L > 0$) os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo no instante inicial ($t = 0$), que está isolado*

*termicamente (imagine que o fio está dentro de um isopor) e cujas extremidades não trocam calor com o meio ambiente ao longo de todo o processo.*

*Se imaginarmos que o fio é o intervalo* $[0, L] \subseteq \mathbb{R}$ *e que* $u = u(t, x)$ *nos dá a temperatura no ponto* $x$ *do fio no instante* $t \geq 0$ *então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar* $u = u(t, x)$, $x \in [0, L]$ *e* $t \geq 0$ *que satisfaça:*

$$\partial_t u(t,x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t,x), t > 0,\ x \in [0, L] \tag{7.182}$$

$$u(0,x) = f(x), x \in [0, L] \text{ (temp. no ponto } x \in [0,L] \text{ do fio é } f(x).) \tag{7.183}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, t \geq 0, \text{(extremos do fio isolados termicamente)} \tag{7.184}$$

$$u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^1((0,\infty) \times (0,L)). \tag{7.185}$$

*No nosso caso, vamos supor que* $\alpha = 1$ *para facilitarmos as contas.*

*Aplicando o método da separação de variáveis podemos mostrar que uma candidata a solução do problema acima é:*

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos(\frac{n\pi}{L}x),\ t \geq 0,\ x \in [0, L], \tag{7.186}$$

*onde* $a_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *são os coeficientes da extensão par,* $2L$*-periódica de* $f$ *a reta toda.*

*Neste caso:*

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi}{L}x)\, dx,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{7.187}$$

*Com isto podemos provar o seguinte resultado, cuja demosntração é análoga ao caso tratado acima e será deixada como exercício para o leitor.*

**Teorema 7.8.2** *Suponhamos que* $f \in C([0, L)])$ *é diferenciável, exceto um número finito de pontos e* $f' \in SC([0, L])$.

*Então a série de funções (7.186) converge uniformemente em* $[0, \infty) \times [0, L]$ *para uma função* $u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,L])$ *que é solução de (7.182)-(7.184), onde os* $b_n$, $n \in \mathbb{N}$, *são dados por (7.187).*

**Observação 7.8.2** *Podemos mostrar (será omitida a prova) que, como no caso anterior, a solução acima é única.*

A seguir faremos um exemplo onde a temperatura inicial no fio, $f$, é dada.

**Exemplo 7.8.1**

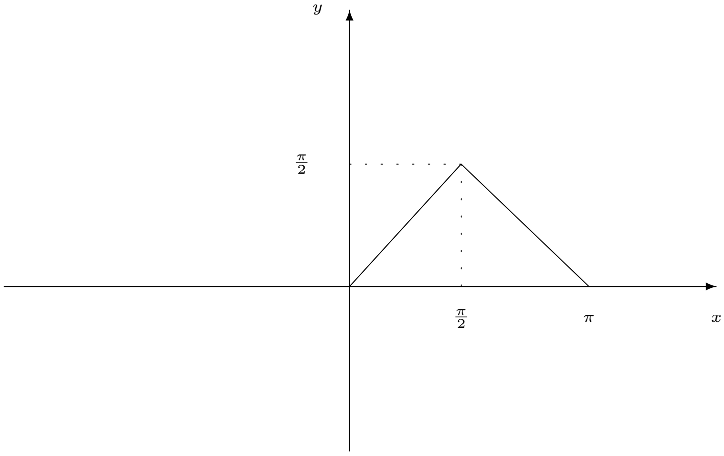
*1. Determine uma solução $u = u(t,x)$ do problema:*

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x),\ t > 0,\ x \in [0,\pi]\\
&u(0,x) = f(x),\ x \in [0,\pi]\\
&u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \geq 0.\\
&u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^1((0,\infty) \times (0,L)).
\end{aligned}$$

*onde* $f(x) = \begin{cases} x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x,\ \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

***Resolução:***

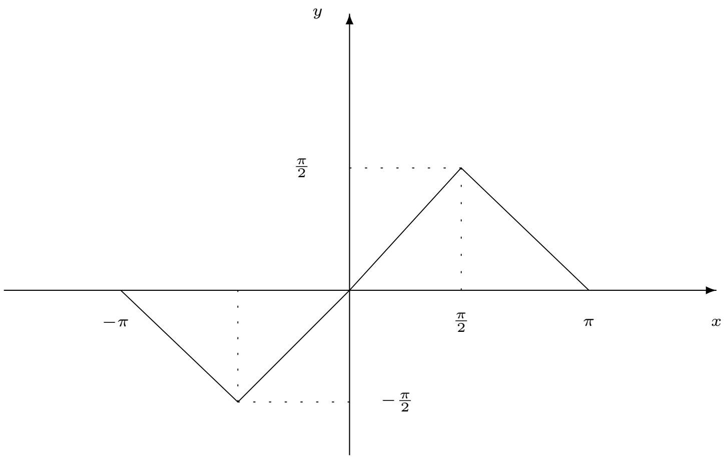
*Temos que o gráfico de $f$ é:*




*Logo considerando $F$ a extensão ímpar $2\pi$-periódica de $f$ a reta toda temos que $F$ será contínua em $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

*Observemos que $F$ será dada por:*

$$F(x) = \begin{cases} -x-\pi,\ -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ -x,\ -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x,\ \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} \quad e\ F(x+2\pi) = F(x),\ x \in \mathbb{R}.$$



*Como vimos anteriormente, uma candidata a solução será*

$$u(t,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} sen(\frac{n\pi}{L}x) \overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{\pi^2}t} sen(\frac{n\pi}{\pi}x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} sen(nx),$$

*onde* $(t,x) \in (0,\infty) \times [0,L]$, *onde*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(\frac{n\pi}{\pi}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x sen(nx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) sen(nx)\,dx] \\ &= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x sen(nx)\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(nx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x sen(nx)\,dx]. \end{aligned}$$

*Mas*

$$\begin{aligned} \int x sen(nx)\,dx &\overset{(int.\ por\ partes)}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen(nx)\,dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right\rangle \\ &= -x\frac{\cos(nx)}{n} - \int -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = -x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{sen(nx)}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

*logo*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x sen(nx)\,dx + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(nx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x sen(nx)\,dx] \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{[-x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{sen(nx)}{n^2}]|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \pi\frac{\cos(nx)}{n}|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} + [-x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{sen(nx)}{n^2}]|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} + \frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{n^2} - (-0\frac{\cos(n0)}{n} + \frac{sen(n0)}{n^2})] - \pi[\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n}]\right. \\ &\qquad \left. +[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{sen(n\pi)}{n^2} - (-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} + \frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{n^2})]\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{-\pi[\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n}] - \pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right\} = \frac{2}{n}\left\{-2(-1)^n + \cos(n\frac{\pi}{2})]\right\},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Observemos que:* $\cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}},\ n\ par \\ 0,\ n\ ímpar \end{cases}$ *portanto*

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{n}\{-2 - (-1)^n\} \\ b_{2n+1} &= \frac{4}{n} \end{aligned} \tag{7.188}$$

*ou seja*

$$u(t,x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} sen(nx),\ (t,x) \in (0,\infty) \times [0,L],$$

*onde os coeficientes* $b_n$, $n \in \mathbb{N}$ *são dados acima.*

*Observemos que* $f \in C[0,\pi]$, *é diferenciável, exceto um número finito de pontos e* $f' \in SC([0,\pi])$ *e* $f(0) = f(\pi) = 0$.

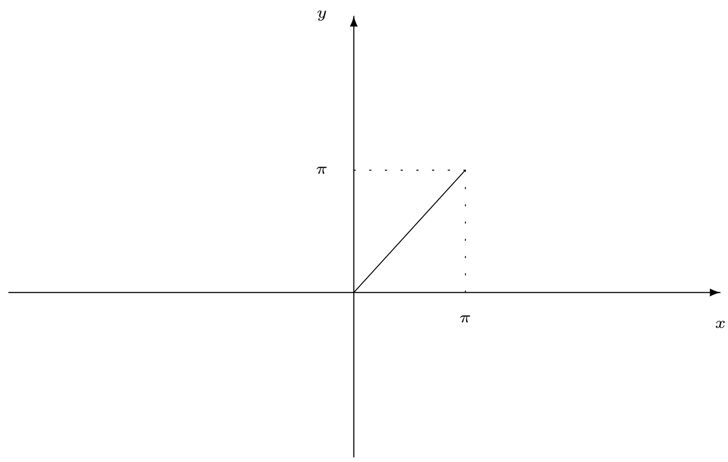
*Logo do Teorema (7.8.1) segue que a* $u = u(t,x)$ *acima é uma solução do nosso problema.*

2. *Determine uma solução* $u = u(t,x)$ *do problema:*

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x),\ t > 0,\ x \in [0,\pi] \\
&u(0,x) = x,\ x \in [0,\pi] \\
&u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,\ t \geq 0. \\
&u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^1((0,\infty) \times (0,L)).
\end{aligned}$$

***Resolução:***

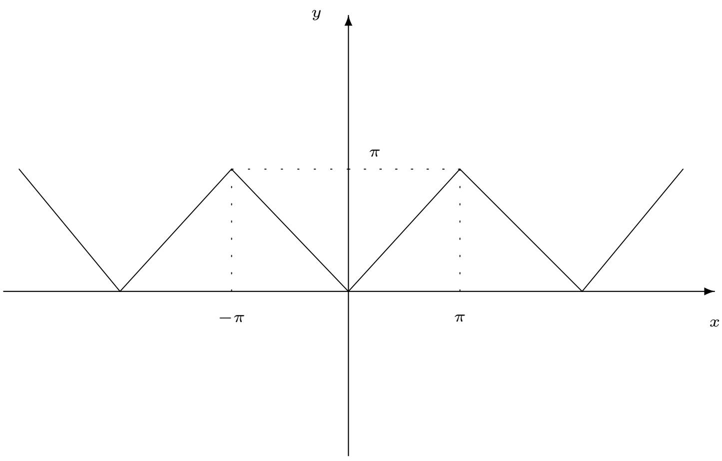
*Temos que o gráfico de* $f$ *é:*




*Logo considerando* $F$ *a extensão par* $2\pi$*-periódica de* $f$ *a reta toda temos que* $F$ *será contínua em* $\mathbb{R}$.

*Observemos que* $F$ *será dada por:*

$$F(x) = |x|,\ -\pi \leq x \leq \pi,\ F(x + 2\pi) = F(x),\ x \in \mathbb{R}.$$




*Neste caso*

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{\pi^2}t}\cos(\frac{n\pi}{\pi}x)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\cos(nx), \ (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L],$$

*onde* $a_n$, $n = 0,1,2,\cdots$ *são os coeficientes da extensão par,* $2L$*-periódica de* $f(x) = x$ *a reta toda, ou seja, para* $n = 0,1,2,\cdots$ *temos:*

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(\frac{n\pi}{\pi}x)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx.$$

*Mas,*

$$\int x\cos(nx)\,dx \overset{(int.\ por\ partes)}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(nx)\,dx \Rightarrow v = \frac{sen(nx)}{n} \end{array} \right\rangle$$
$$= x\frac{sen(nx)}{n} - \int \frac{sen(nx)}{n}\,dx = x\frac{sen(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2},$$

*logo*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{sen(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\frac{sen(n\pi)}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - (0\frac{sen(n0)}{n} + \frac{\cos(n0)}{n^2})\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$
$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}, \ n = 0,1,2,\cdots, \tag{7.189}$$

*ou seja*

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} e^{-n^2 t} \cos(nx)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} e^{-(2n+1)^2 t} \cos[(2n+1)x], \, (t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]. \quad (7.190)$$

*Observemos que $f \in C[0,\pi]$, é diferenciável e $f' \in SC([0,\pi])$.*

*Logo do Teorema (7.8.1) segue que a $u = u(t,x)$ acima é uma solução do nosso problema.*

**18.06 - 28.a**

### 7.8.2 O Problema da Corda Vibrante

Consideraremos dois problemas associados a vibrações de uma corda finita num plano, a saber:

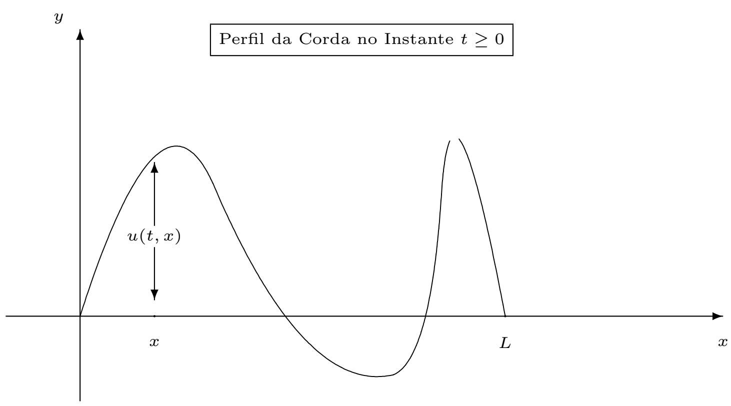
#### Corda Vibrante com as Extremidades Fixas

Trataremos a seguir do problema de encontrar a posição, em cada instante, de uma corda de comprimento $L$, que vibra num plano cujas extremidades estão presas.

Se denotarmos a amplitude da vibração em cada instante, em cada ponto da corda por $u = u(t,x)$, $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$ (vide figura) então um modelo matemático simples que está associado a esse problema é encontrar $u = u(t,x)$, $x \in [0,L]$ e $t \geq 0$ que satisfaça:

$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x), t > 0, \, x \in [0,L] \quad (7.191)$$
$$u(0,x) = f(x), x \in (0,L) \ \text{(perfil inicial da corda)} \quad (7.192)$$
$$u_t(0,x) = g(x), x \in (0,L) \ \text{(velocidade inicial da corda)} \quad (7.193)$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0, t \geq 0, \ \text{(extremidades da corda fixas,)} \quad (7.194)$$

onde $c^2$ é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.



A equação diferencial parcial (7.191) é conhecida como **Equação da Onda**.

Esta equação é um exemplo importante de uma classe de EDP's ditas **Hiperbólica**.

Para simplificarmos as contas consideraremos o caso em que $c = 1$.

O caso geral será deixado como exercício pra o leitor.

Aplicando o método da separação de variáveis a (7.191)-(7.194), isto é, tentaremos soluções de (7.191)-(7.194) do tipo

$$u(t,x) = \psi(t)\phi(x), \; t \geq 0, \; x \in [0,L]. \tag{7.195}$$

Substituindo em (7.191) obtemos:

$$0 = \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \psi''(t)\phi(x) - \psi(t)\phi''(x), \; t > 0, \; x \in (0,L).$$

Supondo que $u(t,x) \neq 0$ (a solução trivial não nos interessa) deveremos ter $\psi(t), \phi(x) \neq 0$, $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$, então:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(t)}{\phi(t)}, \; t > 0, \; x \in (0,L).$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},, \, t > 0, \, x \in (0,L),$$

ou seja, teremos:

$$\psi''(t) = -\lambda\, \psi(t), \, t > 0 \tag{7.196}$$
$$\phi''(x) = -\lambda\, \phi(x), \, x \in (0,L). \tag{7.197}$$

Impondo (7.194) temos:

$$\psi(t)\phi(0) = u(t,0) = 0 = u(t,L) = \psi(t)\phi(L), \, t \geq 0$$

Como $\psi(t) \neq 0$ (pois caso contrário, teríamos $u(t,x) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$) dividindo ambos os membros da igualdade por $\psi(t)$ teremos

$$\phi(0) = 0 = \phi(L),$$

ou seja, $\phi$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda\, \phi(x), \, x \in (0,L) \tag{7.198}$$
$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \tag{7.199}$$
$$\phi \in C^2((0,L)) \cap C([0,L]) \tag{7.200}$$

que já foi tratado no caso da distribuição de calor no fio finito (ver (7.9), (7.10) e (7.11)) cuja solução será

$$\phi(x) = \phi_n(x) = sen(\frac{n\pi}{L}x), \, x \in [0,L], \, n \in \mathbb{N}.$$

A solução geral da EDO (7.196) é ($\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$) :

$$\psi_n(t) = A\cos(\frac{n\pi}{L}t) + Bsen(\frac{n\pi}{L}t),\ t \geq 0.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$u_n(t,x) = \psi_n(t)\phi_n(x) = a_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L],$$

será solução de (7.191) e (7.194).

Logo, formalmente,

$$\begin{aligned} u(t,x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)\phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L] \end{aligned} \tag{7.201}$$

será possível solução para o nosso problema.

Para que $u = u(t,x)$ acima seja solução deverá satisfazer (7.192), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) = u(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\frac{n\pi}{L}0)sen(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}0)sen(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0,L], \end{aligned}$$

isto é, $f$ (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$-periódica) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso em senos), ou seja:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Para $u = u(t,x)$ acima satisfazer (7.193) deveremos ter (derivando a série termo a termo):

$$\begin{aligned} g(x) = u_t(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -A_n sen(\frac{n\pi}{L}0)\frac{n\pi}{L}sen(\frac{n\pi}{L}x) + B_n\cos(\frac{n\pi}{L}0)\frac{n\pi}{L}sen(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi}{L}sen(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0,L], \end{aligned}$$

isto é, $g$ (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$-periódica) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso em senos), ou seja:

$$B_n\frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$B_n = \frac{2L}{Ln\pi}\int_0^L g(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^L g(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto uma candidata a solução do problema será:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}t)sen(\frac{n\pi}{L}x)\right], \qquad (7.202)$$

$t \geq 0$, $x \in [0,L]$ ,onde $a_n$ e $b_n$ são dados por:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \qquad (7.203)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^L g(x)sen(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}. \qquad (7.204)$$

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demostração será deixada para o leitor:

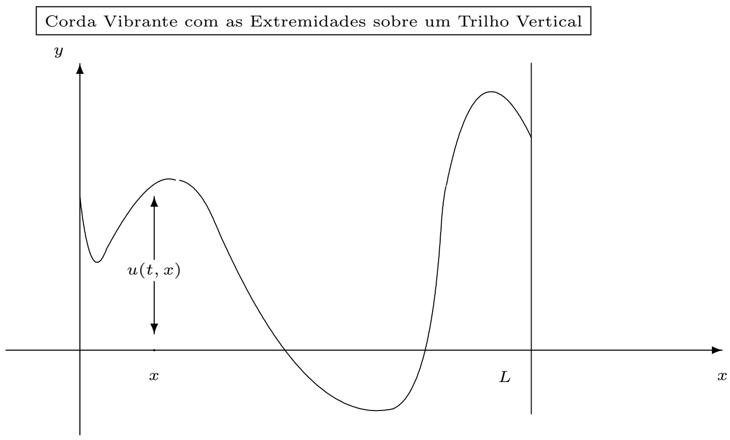
**Teorema 7.8.3** *Suponhamos que $f \in C^2([0,L])$ e $g \in C^1([0,L])$, $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$.*

*Então a série de funções (7.202) converge uniformemente em $[0,\infty) \times [0,L]$ para uma função $u \in C^2([0,\infty) \times [0,L])$ que é solução de (7.191)-(7.194), onde os $A_n, B_n$, $n \in \mathbb{N}$, são dados por (7.203) e (7.204), respectivamente .*

**Observação 7.8.3** *Pode-se mostrar que a solução acima é única.*

### Corda Vibrante com as Extremidades num Trilho Vertical

Podemos tratar de modo semelhante o problema de encontrar a posição, em cada instante, de uma corda de comprimento $L$, que vibra num plano cujas extremidades estão variando em um trilho vertical.



Se denotarmos a amplitude da vibração em cada instante, em cada ponto da corda por $u = u(t,x)$, $t \geq 0$e $0 \leq x \leq L$ (vide figura) então um modelo matemático simples que está associado a esse problema é: $u = u(t,x)$, $x \in [0,L]$ e $t \geq 0$ que satisfaça:

$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x), t > 0,\ x \in [0,L] \tag{7.205}$$

$$u(0,x) = f(x), x \in (0,L) \ \text{(perfil inicial da corda)} \tag{7.206}$$

$$u_t(0,x) = g(x), x \in (0,L) \ \text{(velocidade inicial da corda)} \tag{7.207}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, t \geq 0,\ \text{(extremidades da corda num trilho vertical,)} \tag{7.208}$$

onde $c^2$ é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.

Trataremos, como anteriormente, o caso em que $c = 1$.

O caso geral será deixado como exercício pra o leitor.

Aplicando o método da separação de variáveis a (7.205)-(7.208), isto é, tentaremos soluções de (7.205)-(7.208) do tipo

$$u(t,x) = \psi(t)\phi(x),\ t \geq 0,\ x \in [0,L]. \tag{7.209}$$

Substituindo em (7.205) obtemos:

$$0 = \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \psi''(t)\phi(x) - \psi(t)\phi''(x),\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Supondo que $u(t,x) \neq 0$ (a solução trivial não nos interessa) deveremos ter $\psi(t), \phi(x) \neq 0$, $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$, então:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(t)}{\phi(t)},\ t > 0,\ x \in (0,L).$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)},,\ t > 0,\ x \in (0,L),$$

ou seja, teremos:

$$\psi''(t) = -\lambda\,\psi(t),\ t > 0 \tag{7.210}$$

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0,L). \tag{7.211}$$

Impondo (7.208) temos:

$$\psi(t)\phi'(0) = u(t,0) = 0 = u(t,L) = \psi(t)\phi'(L),\ t \geq 0$$

Como $\psi(t) \neq 0$ (pois caso contrário, teríamos $u(t,x) = 0$, para todo $t \geq 0$ e $x \in [0,L]$) dividindo ambos os membros da igualdade por $\psi(t)$ teremos

$$\phi'(0) = 0 = \phi'(L),$$

ou seja, $\phi$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda\,\phi(x),\ x \in (0,L) \tag{7.212}$$

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0 \tag{7.213}$$

$$\phi \in C^2((0,L)) \cap C([0,L]) \tag{7.214}$$

cuja solução será (exercício)

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0, L],\ n \in \mathbb{N}.$$

Como no caso anterior, a solução geral da EDO (7.210) é ($\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$) :

$$\psi_n(t) = A\cos(\frac{n\pi}{L}t) + Bsen(\frac{n\pi}{L}t),\ \ t \geq 0.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$u_n(t,x) = \psi_n(t)\phi_n(x) = a_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x),\ \ t \geq 0,\ x \in [0, L],$$

será solução de (7.205) e (7.208).

Logo, formalmente,

$$\begin{aligned} u(t,x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t)\phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sen(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x),\ \ t \geq 0,\ x \in [0, L] \end{aligned} \tag{7.215}$$

será possível solução para o nosso problema.

Para que $u = u(t,x)$ acima seja solução deverá satisfazer (7.206), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) = u(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\frac{n\pi}{L}0)\cos(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}0)\cos(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\frac{n\pi}{L}x),\ \ x \in [0, L] \end{aligned}$$

, isto é, $f$ (ou melhor, sua extensão par e $2L$-periódica) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso em senos), ou seja:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{7.216}$$

Para $u = u(t,x)$ acima satisfazer (7.207) deveremos ter (derivando a série termo a termo):

$$\begin{aligned} g(x) = u_t(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} -A_n sen(\frac{n\pi}{L}0)\frac{n\pi}{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x) + B_n\cos(\frac{n\pi}{L}0)\frac{n\pi}{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi}{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x),\ x \in [0, L], \end{aligned}$$

isto é, $g$ (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$-periódica) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso em senos), ou seja:

$$B_n\frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$B_n = \frac{2L}{Ln\pi}\int_0^L g(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^L g(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n\in\mathbb{N}. \tag{7.217}$$

Portanto uma candidata a solução do problema será:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\Big] \tag{7.218}$$

$t\geq 0$, $x\in[0,L]$ onde $A_n$ e $B_n$ são dados por (7.216) e (7.217), respectivamente.

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada para o leitor:

**Teorema 7.8.4** *Suponhamos que $f\in C^2([0,L])$ e $g\in C^1([0,L])$, $f'(0)=f'(L)=g'(0)=g'(L)=0$.*

*Então a série de funções (7.218) converge uniformemente em $[0,\infty)\times[0,L]$ para uma função $u\in C^2([0,\infty)\times[0,L])$ que é solução de (7.205)-(7.208), onde os $A_n, B_n$, $n\in\mathbb{N}$, são dados por (7.216) e (7.217), respectivamente .*

**Observação 7.8.4** *Pode-se mostrar que a solução acima é única.*

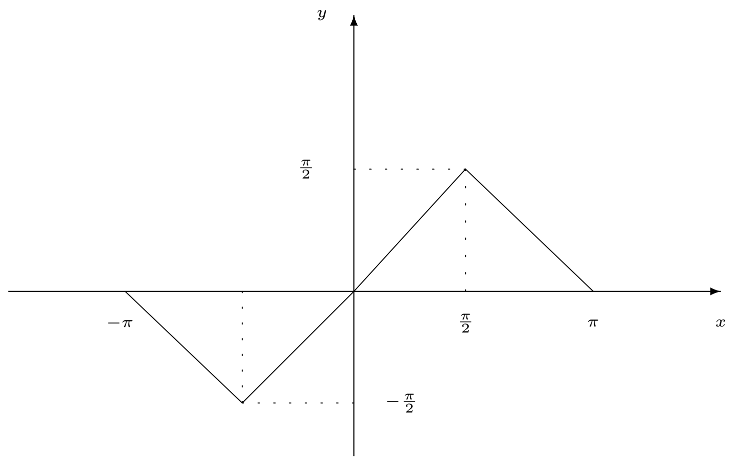
1. Determine uma solução $u=u(t,x)$ do problema:

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x),\ t>0,\ x\in[0,\pi]\\
&u(0,x) = f(x),\ x\in[0,\pi]\\
&u_t(0,x) = g(x),\ x\in[0,\pi]\\
&u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t\geq 0.\\
&u\in C([0,\infty)\times[0,L])\cap C^1((0,\infty)\times(0,L)).
\end{aligned}$$

onde $f(x) = \begin{cases} x,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ \pi-x,\ \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\end{cases}$ e $g(x) = 2sen(3x) - 9sen(5x)$, $0\leq x\leq\pi$.

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que $L=\pi$ e a extensão ímpar, $2\pi$-periódica da função $f$ é a função $F$ obtida no exemplo (7.8.1) item 1., que é uma função que está em $C_{per}(2\pi)\cap SC^2_{per}(2\pi)$ (na verdade tem derivada de qualquer ordem, exceto nos pontos da forma $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$).




De modo análogo, $g$ possui uma (única) extensão ímpar, $2\pi$-periódica dada por $G(x) = 2sen(3x) - 9sen(5x)$, $x \in \mathbb{R}$, portanto de classe $C^{\infty}_{per}(2\pi)$.

A candidata a solução do problema é dada por (7.202), a saber:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\frac{n\pi}{L}t) sen(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}t) sen(\frac{n\pi}{L}x) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(\frac{n\pi}{\pi}t) sen(\frac{n\pi}{\pi}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{\pi}t) sen(\frac{n\pi}{\pi}x) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nt) sen(nx) + B_n sen(nt) sen(nx)] \end{aligned} \tag{7.219}$$

$t \geq 0$, $x \in [0, \pi]$, onde $A_n$ e $B_n$ são dados por (7.203) e (7.204), respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen(\frac{n\pi}{L}x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(\frac{n\pi}{\pi}x)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx \overset{(7.188)}{=} \begin{cases} A_{2n} = \frac{1}{n}\left[-2 - (-1)^n\right] \\ A_{2n+1} = \frac{4}{n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ B_n &= \begin{cases} 2, & n = 3 \\ -9, & n = 5 \\ 0, & n \neq 3, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

pois a extensão ímpar, $2\pi$-periódica da função $g$ já está representada por sua série de Fourier.

Portanto, a candidata a solução do problema será dada por:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nt) sen(nx) + B_n sen(nt) sen(nx)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \cos(2nt) sen(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} \cos[(2n+1)t] sen[(2n+1)x] \\
&\quad + B_3 sen(3t) sen(3x) + B_5 sen(5t) sen(5x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [-2 - (-1)^n] \cos(2nt) sen(2nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \cos[(2n+1)t] sen[(2n+1)x] \\
&\quad + 2 sen(3t) sen(3x) - 9 sen(5t) sen(5x)
\end{aligned}
$$

$t \geq 0,\ x \in [0,\pi]$.

Pode-se mostrar que satisfaz nosso problema exceto sobre os segmentos de retas $x + t = \frac{\pi}{2}$ e $x - t = \frac{\pi}{2}$.

Ao longo desses segmentos de retas a $u$ não será diferenciável. Isto será deixada como exercíçio para o leitor.

Vale observar que não podemos aplicar o teorema (7.8.3) pois a função $f$ não satisfaz as hipótese (ela não é duas vezes continuamente diferenciável em $[0,\pi]$).

2. Determine uma solução $u = u(t,x)$ do problema:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x),\ t > 0,\ x \in [0,\pi] \\
&u(0,x) = x,\ \ x \in [0,\pi] \\
&u_t(0,x) = \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(6x),\ \ x \in [0,\pi] \\
&u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,\ \ t \geq 0. \\
&u \in C([0,\infty) \times [0,L]) \cap C^1((0,\infty) \times (0,L)).
\end{aligned}
$$

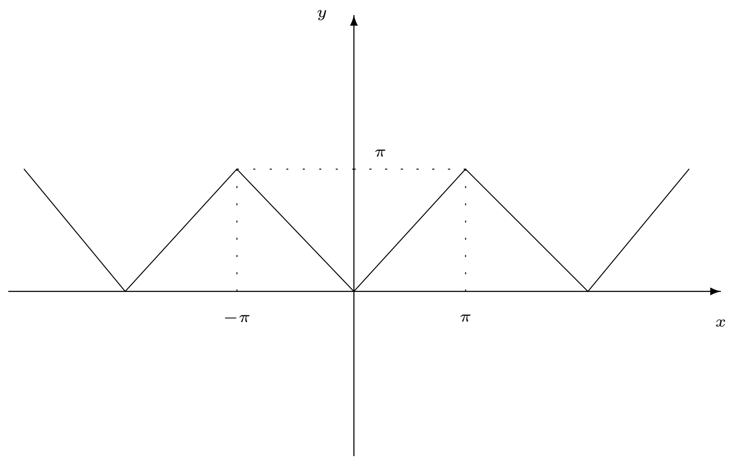
**Resolução:**

Neste caso $f(x) = x$, e $g(x) = \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(6x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

Como no exemplo (7.8.1) item 2., considerando $F$ a extensão par $2\pi$-periódica de $f$ a reta toda temos que $F$ será contínua em $\mathbb{R}$ (mas não será diferenciável nos pontos $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

Como vimos anteriormente,$F(x) = |x|,\ -\pi \leq x \leq \pi,\ \ F(x + 2k\pi) = F(x),\ \ x \in \mathbb{R}$..

Observemos que a extensão par $2\pi$-periódica de $g$ a reta toda será dada por $G(x) = \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(6x)$, $x \in \mathbb{R}$.




Uma candidata a solução do problema será dada por (7.218), ou seja:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{L}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(\frac{n\pi}{\pi}t)\cos(\frac{n\pi}{\pi}x) + B_n sen(\frac{n\pi}{\pi}t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(nt)\cos(nx) + B_n sen(nt)\cos(nx)\right]
\end{aligned}
$$

$t \geq 0$, $x \in [0, L]$, onde $A_n$ e $B_n$ são dados por (7.216) e (7.217), respectivamente, ou seja:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(\frac{n\pi}{\pi}x)\,dx \\
&\overset{(7.189)}{=} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi} \\
B_n &= \begin{cases} 1, & n = 3 \\ -1, & n = 5 \\ 1, & n = 6 \\ 0, & n \neq 3, 5, 6. \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Portanto, a candidata a solução do problema será dada por:

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nt)\cos(nx) + B_n sen(nt)\cos(nx)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi} \cos(nt)\cos(nx) \\
&\quad + sen(3t)\cos(3x) - sen(5t)\cos(5x) + sen(6t)\cos(6x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} \cos[(2n+1)nt]\cos[(2n+1)nx] \\
&\quad + sen(3t)\cos(3x) - sen(5t)\cos(5x) + sen(6t)\cos(6x)
\end{aligned}$$

$t \geq 0$, $x \in [0, \pi]$.

Pode-se mostrar que satisfaz nosso problema exceto sobre os segmentos de retas $x + t = 0$ e $x - t = \pi$. Ao longo desses segmentos de retas a $u$ não será diferenciável. Isto será deixada como exercíçio para o leitor.

Vale observar que não podemos aplicar o teorema (7.8.5) pois a função $f$ não satisfaz as hipótese (ela não é duas vezes continuamente diferenciável em $[0, \pi]$).

### 7.8.3 A Equação de Laplace

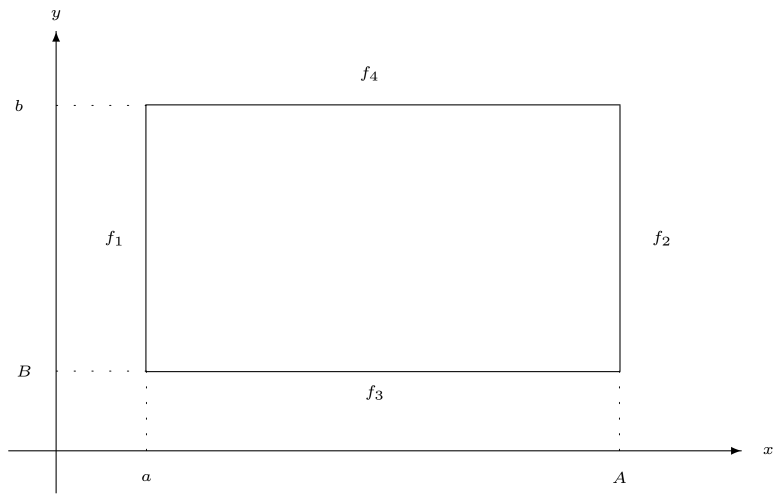
O último problema que trataremos associado estará associado a uma EDP importante denominada **Equação de Laplace**. Esta EDP é um exemplo importante de uma classe de EDP's denominadas **Elípticas**.

Trataremos de dois problemas relacionados a Equação de Laplace, a saber: o problema de Dirichlet num retângulo e num círculo.

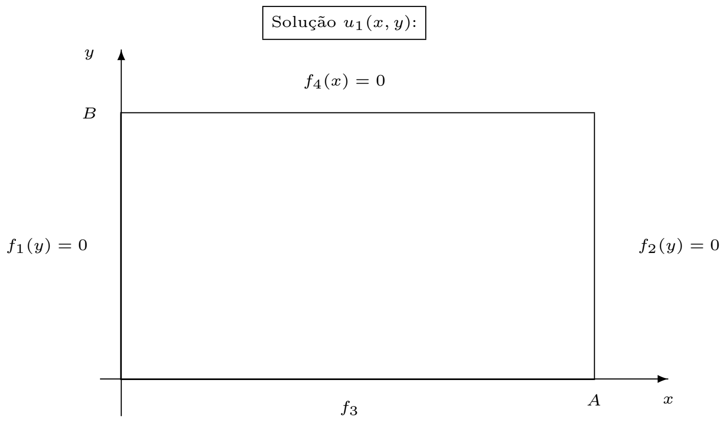
#### O Problema de Dirichlet num Retângulo

Esse problema consiste em encontrar $u = u(x, y)$, $(x, y) \in [a, A] \times [b, B]$ que satisfaz

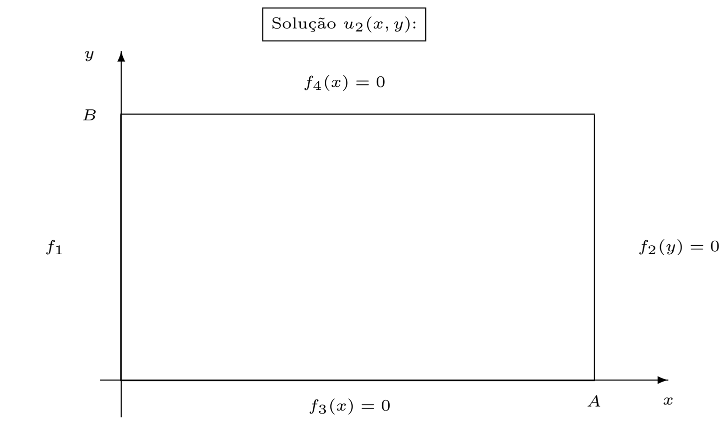
$$\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in (a,A) \times (b,B) \tag{7.220}$$
$$u(A,y) = f_1(y),\ b \leq y \leq B \tag{7.221}$$
$$u(a,y) = f_2(y),\ b \leq y \leq B \tag{7.222}$$
$$u(x,B) = f_3(x),\ a \leq x \leq A \tag{7.223}$$
$$u(x,b) = f_4(x),\ a \leq x \leq A \tag{7.224}$$
$$u \in C([a,A] \times [b,B]) \cap C^2((a,A) \times (b,B)).$$

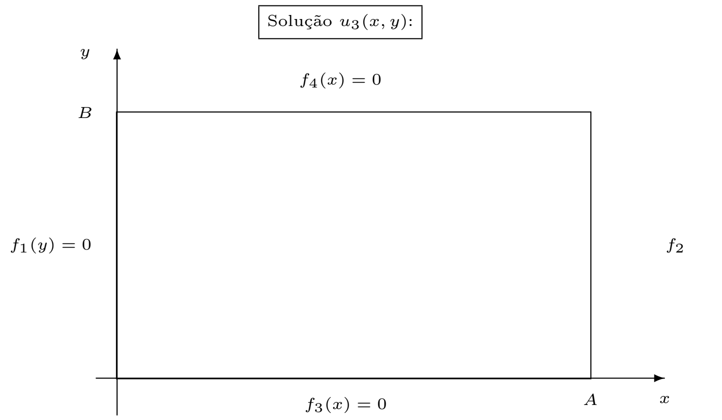


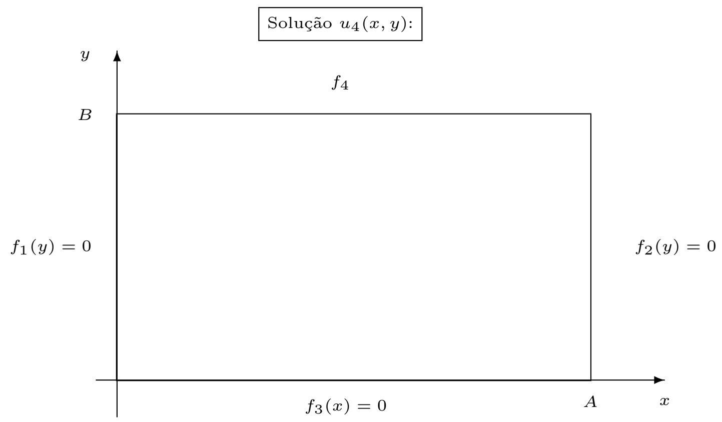

O operador $\Delta \doteq \partial_x^2 + \partial_y^2$ é conhecido por **Operador Laplaciano**.
Vamos considerar o caso em que $a = b = 0$.
O caso geral será deixado como exercício (bsata fazermos translações).
Além disso, faremos $f_1(y) = f_2(y) = 0$, $0 \leq y \leq B$ e $f_4(x) = 0$, $0 \leq x \leq A$, isto é:




Sabendo o caso que resolveremos podemos obter a solução do caso geral (com $a = b = 0$) somando-se as soluções de cada um dos problemas abaixo.






ou seja, a solução $u(x,y) = u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y)+u_4(x,y)$, $(x,y) \in [0,A]\times[0,B]$.

Trataremos do problema de encontrar $u = u(x,y)$, definida em $[0,A] \times [0,B]$ que satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in (0,A) \times (0,B)\\
&u(0,y) = 0,\ 0 \le y \le A\\
&u(a,y) = 0,\ 0 \le y \le B\\
&u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le A\\
&u(x,b) = 0,\ 0 \le x \le A\\
&u \in C([0,A] \times [0,B]) \cap C^2((0,A) \times (0,B)),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in (0,A) \times (0,B) \tag{7.225}$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0,\ 0 \le y \le B \tag{7.226}$$
$$u(x,b) = 0,\ 0 \le x \le A \tag{7.227}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le A \tag{7.228}$$
$$u \in C([0,A] \times [0,B]) \cap C^2((0,A) \times (0,B)),$$

Observemos que de (7.226) (com $y = 0$ e $y = B$) e (7.228) (com $x = 0$ e $x = A$) temos que $f$ deve satisfazer a seguintes restrições $f(0) = f(A) = 0$ (condições de compatibilidade).

Tentaremos soluções de (7.225), (7.226) e (7.227) do tipo variáveis separadas, ou seja:

$$u(x,y) \doteq \psi(x)\phi(y), \; (x,y) \in [0,A] \times [0,B].$$

Estamos procurando soluções não nulas, isto é, $u(x,y) \neq 0$.

Substituindo na EDP (7.225) obtemos que , para $(x,y) \in (0,A) \times (0,B)$ temos:

$$\begin{aligned}
&\psi''(x)\phi(y) + \psi(x)\phi''(y) = 0 \Leftrightarrow \psi''(x)\phi(y) = -\psi(x)\phi''(y) \\
&\overset{\phi(y),\psi(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = constante \doteq \lambda,
\end{aligned}$$

ou seja temos as duas EDO's:

$$\phi''(x) = \lambda\phi(x), \; x \in (0,A) \tag{7.229}$$

$$\psi''(y) = -\lambda\phi(y), \; y \in (0,B) \tag{7.230}$$

Mas

$$0 = u(0,y) = \phi(0)\psi(y) \overset{\psi(y)\neq 0}{\Rightarrow} \phi(0) = 0 \tag{7.231}$$

$$0 = u(A,y) = \phi(A)\psi(y) \overset{\psi(y)\neq 0}{\Rightarrow} \phi(A) = 0 \tag{7.232}$$

$$0 = u(x,B) = \phi(x)\psi(B) \overset{\phi(x)\neq 0}{\Rightarrow} \psi(B) = 0. \tag{7.233}$$

Juntando-se (7.229), (7.230), (7.231), (7.232), (7.233) obteremos os seguintes problemas:

$$\phi''(x) = \lambda\phi(x), \; x \in (0,A) \tag{7.234}$$

$$\phi(0) = \phi(A) = 0 \tag{7.235}$$

$$\phi \in C([0,A]) \cap C^2((0,A)) \tag{7.236}$$

e

$$\psi''(y) = -\lambda\psi(y), \; y \in (0,B) \tag{7.237}$$

$$\psi(B) = 0 \tag{7.238}$$

$$\psi \in C([0,B]) \cap C^2((0,B)). \tag{7.239}$$

O problema (7.234)-(7.236) já foi tratado anteriormente (ver (7.9)-(7.11)) e a solução será:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{A} \\
&\phi(x) = \phi_n(x) = sen(\frac{n\pi}{A}x), \; x \in [0,A]
\end{aligned} \tag{7.240}$$

e o problema (7.237)-(7.239) tornar-se-a

$$\psi''(y) = -\frac{n\pi}{A}\psi(y),\ y \in (0, B)$$
$$\psi(B) = 0$$
$$\psi \in C([0, B]) \cap C^2((0, B)).$$

A solução geral da EDO acima será:

$$\psi_n(y) = Ce^{\frac{n\pi}{A}y} + De^{-\frac{n\pi}{A}y},\ y \in (0, b). \tag{7.241}$$

Como

$$0 = \psi(B) = Ce^{\frac{n\pi}{A}B} + De^{-\frac{n\pi}{A}B} \Leftrightarrow Ce^{\frac{n\pi}{A}B} = -De^{-\frac{n\pi}{A}B}$$
$$\Leftrightarrow C = -De^{-\frac{2n\pi}{A}B},\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.242}$$

Substituindo em (7.241) obteremos

$$\psi_n(y) = -De^{-\frac{2n\pi}{A}B}e^{\frac{n\pi}{A}y} + De^{-\frac{n\pi}{A}y}$$
$$= -Ce^{-\frac{n\pi}{A}B}\left(e^{\frac{n\pi}{A}y-B} - e^{-\frac{n\pi}{A}(y-B)}\right) = -2De^{-\frac{n\pi}{A}B}senh(\frac{n\pi}{A}(y-B)),\ y \in [0, B],$$

ou seja, podemos tomar

$$\psi_n(y) \doteq e^{-\frac{n\pi}{A}B}senh(\frac{n\pi}{A}(y-B)),\ y \in [0, B]. \tag{7.243}$$

Logo, de (7.240) e (7.243), segue que

$$u_n(x, y) = \phi_n(x)\psi_n(y) = e^{-\frac{n\pi}{A}B}\,sen(\frac{n\pi}{A}x)\,senh(\frac{n\pi}{A}(y-B)),$$

$(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Tomando-se, formalmente, a solução do nosso problema como sendo

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x)\psi_n(y)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi}{A}B}sen(\frac{n\pi}{A}x)senh(\frac{n\pi}{A}(y-B)) \tag{7.244}$$

$(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$ e impondo a condição (7.228) obtemos:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi}{A}B}sen(\frac{n\pi}{A}x)senh(\frac{n\pi}{A}(0-B)) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n senh(\frac{n\pi}{A}B))sen(\frac{n\pi}{A}x)$$

$x \in [0, a]$, ou seja a extensão, $F$, ímpar e $2a$-periódica de $f$ deve possuir uma representação em série de Fourier ( no caso uma série em senos), logo:

$$-b_n senh(\frac{n\pi}{A}B)) = \frac{2}{A}\int_0^A f(x)sen(\frac{n\pi}{A}x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$b_n = -\frac{2}{Asenh(\frac{n\pi}{A}B))}\int_0^A f(x)sen(\frac{n\pi}{A}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}, \tag{7.245}$$

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada para o leitor:

**Teorema 7.8.5** *Suponhamos que $f \in C^2([0,A])$, $f(0) = f(A) = f''(0) = f''(A) = 0$. Então a série de funções (7.244) converge uniformemente em $[0,A] \times [0,B]$ para uma função $u \in C^2([0,A] \times [0,B])$ que é solução de (7.225)-(7.228), onde os $b_n$, $n \in \mathbb{N}$, são dados por (7.245).*

**Observação 7.8.5** *Pode-se mostrar que a solução acima é única.*

**21.06 - 29.a**

### O Problema de Dirichlet num Círculo

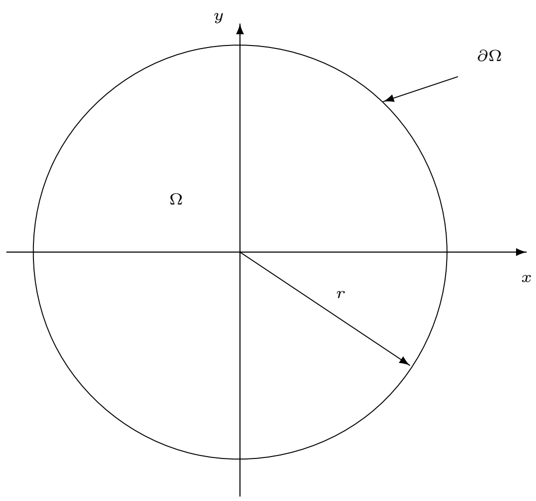
Esse problema consiste em encontrar $u = u(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\Omega}$ que satisfaz

$$\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega \tag{7.246}$$

$$u_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega) \tag{7.247}$$

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \tag{7.248}$$

onde $\Omega \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$, $R > 0$ fixado (isto é, o interior de uma circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $R > 0$) e $\partial\Omega \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ (a fronteira de $\Omega$, isto é, a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $R > 0$).



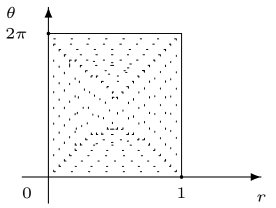

Vamos considerar o caso em que $R = 1$.

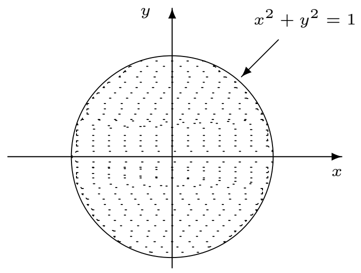
O caso geral ($R \neq 1$) pode ser obtido de modo semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Neste caso podemos descrever o círculo acima em coordenadas polares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta) = r\cos(\theta)\\ y &= y(r,\theta) = rsen(\theta), \end{aligned}$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in [0, 1)$.




Neste caso temos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}\\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x},\ x \neq 0,\\ \theta &= \frac{\pi}{2},\ x = 0. \end{aligned}$$

Considerando $v(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$, $(r,\theta) \in [0,1) \times [0,2\pi)$ segue, da regra da cadeia que:

$$\begin{aligned} \partial_r v(r,\theta) &= \partial_x u\,\partial_r x + \partial_y u\,\partial_r y = \cos(\theta)\,\partial_x u + sen(\theta)\,\partial_y u\\ \partial_\theta v(r,\theta) &= \partial_x u\,\partial_\theta x + \partial_y u\,\partial_\theta y = -rsen(\theta)\,\partial_x u + r\cos(\theta)\,\partial_y u\\ \partial_r^2 v(r,\theta) &= \partial_r[\cos(\theta)\,\partial_x u + sen(\theta)\,\partial_y u]\\ &= \cos(\theta)[\partial_x^2 u\,\partial_r x + \partial_{yx}^2 u\,\partial_r y] + sen(\theta)[\partial_{yx} u\,\partial_r x + \partial_y^2 u\,\partial_r y]\\ &= \cos(\theta)[\partial_x^2 u\ \cos(\theta) + \partial_{yx}^2 u\,sen(\theta)] + sen(\theta)[\partial_{yx} u\ \cos(\theta) + \partial_y^2 u\,sen(\theta)]\\ &\overset{(\text{Teor. Schwarz } \partial_{yx}^2 u = \partial_{xy}^2 u)}{=} \cos^2(\theta)\,\partial_x^2 u + 2sen(\theta)\cos(\theta)\,\partial_{yx} u + sen^2(\theta)\,\partial_y^2 u \qquad (7.249)\\ \partial_\theta^2 v(r,\theta) &= \partial_\theta[-rsen(\theta)\,\partial_x u + r\cos(\theta)\,\partial_y u]\\ &= r\,\{-[\cos(\theta)\,\partial_x u + sen(\theta)(\partial_{xx} u\,\partial_\theta x + \partial_{yx} u\,\partial_\theta y)]\\ &\qquad +[-sen(\theta)\,\partial_y u + \cos(\theta)(\partial_{xy} u\,\partial_\theta x + \partial_{yy} u\,\partial_\theta y)]\}\\ &= r\,\{-[\cos(\theta)\,\partial_x u + sen(\theta)(-rsen(\theta)\,\partial_{xx} u + r\cos(\theta)\,\partial_{yx} u)]\\ &\qquad +[-sen(\theta)\,\partial_y u + \cos(\theta)(-rsen(\theta)\,\partial_{xy} u + r\cos(\theta)\,\partial_{yy} u)]\}\\ &= -r\cos(\theta)\,\partial_x u - rsen(\theta)\,\partial_y u + r^2 sen^2(\theta)\,\partial_x^2 u - r^2 sen(\theta)\cos(\theta)\,\partial_{yx} u\\ &\qquad - r^2\cos(\theta)sen(\theta)\,\partial_{xy} u + r^2\cos^2(\theta)\,\partial_{yy} u\\ &= -r\cos(\theta)\,\partial_x u - rsen(\theta)\,\partial_y u + r^2 sen^2(\theta)\,\partial_x^2 u\\ &\qquad - 2r^2 sen(\theta)\cos(\theta)\,\partial_{yx} u + r^2\cos^2(\theta)\,\partial_{yy} u. \qquad (7.250) \end{aligned}$$

Logo $u = u(x,y)$ é solução da equação de Laplace (7.246) em $\Omega$ se, e somente se, $v = v(r,\theta)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 v = \cos^2(\theta)\,\partial_x^2 u + 2sen(\theta)\cos(\theta)\,\partial_{yx} u + sen^2(\theta)\,\partial_y^2 u \\
+ \frac{1}{r}[\cos(\theta)\,\partial_x u + sen(\theta)\,\partial_y u] \\
+ \frac{1}{r^2}[-r\cos(\theta)\,\partial_x u - r sen(\theta)\,\partial_y u + r^2 sen^2(\theta)\,\partial_x^2 u \\
- 2r^2 sen(\theta)\cos(\theta)\,\partial_{yx} u + r^2\cos^2(\theta)\,\partial_{yy} u] \\
= \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0.
\end{aligned}$$

Além disso a condição (7.247) tornar-se-a:

$$v(1,\theta) = g(\theta),\ \ \theta \in \mathbb{R},$$

onde $g(\theta) \doteq f(\cos(\theta), sen(\theta)),\ \ \theta \in \mathbb{R}$.

Observemos que

$$v(r,\theta + 2\pi) = v(r,\theta),\ \ (r,\theta) \in [0,1) \times \mathbb{R}.$$

Portanto $v = v(r,\theta)$ será é solução de:

$$r^2\partial_r^2 v + r\partial_r v + \partial_\theta^2 v = 0,\ \ (r,\theta) \in [0,1) \times \mathbb{R} \tag{7.251}$$

$$v(r,\theta + 2\pi) = v(r,\theta),\ \ (r,\theta) \in [0,1) \times \mathbb{R} \tag{7.252}$$

$$v(1,\theta) = g(\theta),\ \ \theta \in \mathbb{R} \tag{7.253}$$

$$v \in C[0,1] \times \mathbb{R}) \cap C^2([0,1) \times \mathbb{R}) \tag{7.254}$$

Tentaremos solução não triviais (isto é, $v(r,\theta) \neq 0,\ \ (r,\theta) \in [0,1) \times \mathbb{R}$.

Aplicaremos o método da separação de variáveis para obter uma candidata a solução envolevendo, inicialmente, (7.251), (7.252) e (7.254), $v(r,\theta) = \phi(r)\psi(\theta)$, $(r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Sustituindo em (7.251) obtemos:

$$r^2\phi''(r)\psi(\theta) + r\phi'(r)\psi(\theta) + \phi(r)\psi''(\theta) = 0 \overset{\phi(r)\psi(\theta)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{r^2\phi''(r)\psi(\theta) + r\phi'(r)\psi(\theta) + \phi(r)\psi''(\theta)}{\phi(r)\psi(\theta)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2\phi''(r) + r\phi'(r)}{\phi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = constante = \lambda,$$

isto é,

$$\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0,\ \ \theta \in \mathbb{R} \tag{7.255}$$

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta),\ \ \theta \in \mathbb{R} \tag{7.256}$$

$$\psi \in C^2(\mathbb{R})$$

e

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) - \lambda\phi(r) = 0,\ \ r \in [0,1) \tag{7.257}$$

$$\phi \in C([0,1]) \cap C^2([0,1)).$$

Observemos que se $\psi = \psi(\theta)$ for solução (eventualmente complexa) de (7.255) então:

$$\lambda \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^2\, dt = \lambda \int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{\psi(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \lambda\psi(t)\overline{\psi(t)}\, dt \stackrel{(7.255)}{=} \int_0^{2\pi} -\psi''(t)\overline{\psi(t)}\, dt$$

$$\stackrel{\left\langle \begin{array}{l} u = \overline{\psi(t)} \Rightarrow du = \overline{\psi'(t)} \\ dv = \psi''(t) \Rightarrow v = \psi'(t) \end{array} \right\rangle}{=} -\psi'(t)\overline{\psi(t)}|_{t=0}^{t=2\pi} + \int_0^{2\pi} \psi'(t)\overline{\psi'(t)}\, dt$$

$$= -[\psi'(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \psi'(0)\overline{\psi(0)}] + \int_0^{2\pi} \psi'(t)\overline{\psi'(t)}\, dt$$

$$\stackrel{\psi,\psi' \text{ são } 2\pi\text{-periódoca}}{=} \int_0^{2\pi} \psi'(t)\overline{\psi'(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2\, dt, \tag{7.258}$$

logo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou melhor $\lambda \geq 0$.

Se $\lambda = 0$ então, da identidade acima, temos que $0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2\, dt$ e como $\psi'$ é contínua em $\mathbb{R}$ segue que $\psi'(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, logo $\psi$ deverá ser constante.

Se $\lambda > 0$ então a solução geral da EDO (7.255) será

$$\psi(\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}\theta). \tag{7.259}$$

Mas, de (7.256), devemos ter

$$A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}\theta) = \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi) = A_\lambda \cos[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)] + B_\lambda sen[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)]$$

isto é:

$$\begin{aligned} &A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}\theta) = A_\lambda \cos[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)] + B_\lambda sen[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)] \\ &= A_\lambda[\cos(\sqrt{\lambda}\theta)\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - sen(\sqrt{\lambda}\theta)sen(\sqrt{\lambda}2\pi)] \\ &\qquad + B_\lambda[sen(\sqrt{\lambda}\theta)\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + \cos(\sqrt{\lambda}\theta)sen(\sqrt{\lambda}2\pi)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + Bsen(\sqrt{\lambda}\theta) = [A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}2\pi)]\cos(\sqrt{\lambda}\theta) \\ &\qquad + [B_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - A_\lambda sen(\sqrt{\lambda}2\pi)]sen(\sqrt{\lambda}\theta). \end{aligned}$$

Logo, fazendo:

$$\theta = 0 \Rightarrow A_\lambda = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}2\pi) \tag{7.260}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \Rightarrow B_\lambda = B_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - A_\lambda sen(\sqrt{\lambda}2\pi). \tag{7.261}$$

Multiplicando a (7.260) por $A_\lambda$ e (7.261) por $B_\lambda$ e somando-se obteremos:

$$\begin{aligned} &A_\lambda^2 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + A_\lambda B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda^2 \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - BAsen(\sqrt{\lambda}2\pi) = A_\lambda^2 + B_\lambda^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}2\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda} = k,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda = k^2,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo (7.259) tornar-se-a:

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda sen(\sqrt{\lambda}\theta) \\ &= A_k \cos(k\theta) + B_k sen(k\theta) \doteq \psi_k(\theta),\ k = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{7.262}$$

Vale observar que não precisaremos dos valores de $k$ negativos pois neste caso $\psi_k(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k sen(k\theta) = A\cos(-(-k)\theta) + Bsen(-(-k)\theta) = A_k \cos(k\theta) - B_k sen(k\theta) = \tilde{A}_{-k}\cos(k\theta) + \tilde{B}_{-k} sen(k\theta)$, onde $\tilde{A}_{-k} \doteq A_k$ e $\tilde{B}_{-k} \doteq -B_k$, $k = -1, -2, -3, \cdots$, ou seja, basta considerarmos $k = 1, 2, 3, \cdots$.

O caso $k = 0$ dará origam a solução constante que já foi tratada no caso $\lambda = 0$.

Por outro lado, se $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, então (7.257) tornar-se-a:

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) - k^2\phi(r) = 0, \ r \in [0, 1), \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

que é a **equação de Euler** de 2.$^a$ ordem.

Para resolvê-la procuraremos soluções da forma

$$\phi(r) \doteq r^\alpha$$

Substituindo na equação de Euler obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= r^2[\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}] + r[\alpha r^{\alpha-1}] - k^2 r^\alpha = [\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2]r^\alpha \\ &= [\alpha^2 - k^2]r^\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm k, \ k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Portanto para cada $k \in \mathbb{N}$ uma solução da geral da equação de Euler será:

$$\phi_k(r) \doteq C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Se $k = 0$ tomando-se $w(r) \doteq \phi_0'(r)$, a equação de Euler tornar-se-a $rw'(r) + w(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dr}(rw)(r) = 0 \Leftrightarrow (rw)(r) = constante \doteq D_0$.

Logo $\phi_0'(r) = w(r) = \dfrac{D_0}{r} \Leftrightarrow \phi_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r)$.

Portanto a solução geral da equação de Euler será dada por

$$\begin{aligned} \phi_k(r) &= C_k r^k + D_k r^{-k}, \ k \in \mathbb{N} \\ \phi_0(r) &= C_0 + D_0 \ln(r). \end{aligned}$$

Como estamos procurando soluções contínuas em $[0, 1] \times \mathbb{R}$, as soluções da equação de Euler deverão ser contínuas, em particular, em $r = 0$, ou seja, $D_k = 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \cdots$

Logo as soluções que nos interessarão são

$$\phi_k(r) = C_k r^k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$v_k(r, \theta) = \phi_k(r)\psi_k(\theta) = r^k[A_k \cos(k\theta) + B_k sen(k\theta)], \ (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Logo tentaremos uma solução (formal) de (7.251)-(7.254) da forma:

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(r)\psi_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k[A_k \cos(k\theta) + B_k sen(k\theta)], \ (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

ou ainda, na forma complexa

$$v(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ik\theta} k^{|k|}, \ (r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

onde

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{A_0}{2} \\ C_k &= \frac{A_k - iB_k}{2} \\ C_{-k} &= \frac{A_k + iB_k}{2}, \ k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{7.263}$$

(lembremos que $\cos(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$ e $sen(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$).

Impodo a condição inicial, isto é, (7.253), obtemos:

$$g(\theta) = v(1,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ik\theta}, \ (r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Logo os $C_k$ deverão ser os coeficientes de Fourier de $g$ (na forma complexa), ou seja

$$C_k = \hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{7.264}$$

Utilizando (7.264) podemos obter, formalmente, uma solução para (7.251)-(7.254), a saber:

$$v(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ik\theta} r^{|k|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} e^{ik\theta} r^{|k|}\, dt, \ (r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}. \tag{7.265}$$

Pode-se mostrar que a série acima converge uniformemente em $[0,1] \times \mathbb{R}$, que a série pode ser derivada, termo a termo, duas vezes em relação a $r$ e $\theta$ em $[0,1) \times \mathbb{R}$ e portanto satisfaz (7.251)-(7.254).

A demostração desse fato será deixada a cargo do leitor.

Com isto podemos obter $u(x,y) = v(r,\theta)$ solução de (7.246), (7.247) e (7.248) para $(x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e provar o seguinte resultado:

**Teorema 7.8.6** *Sejam $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $f \in C(\partial\Omega)$. Se $v = v(r,\theta)$, $(r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ é dada por (7.265) então $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$u(x,y) = \begin{cases} v(r,\theta), & x = r\cos(\theta),\ y = r sen(\theta),\ (r,\theta) \in [0,1) \times \mathbb{R} \\ f(x,y), & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

*é solução de (7.246)-(7.248).*

**Observação 7.8.6** *Pode-se mostrar que a solução acima é única (exercício para o leitor).*

**F I M**

# References

**[F.** ] Figueiredo, D.G. - *Análise Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1975.

**[F-1.** ] Figueiredo, D.G. - *Análise I*, IMPA, CNPq, 1977.

**[I.** ] Iório, V.M - *EDP - Um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, 1991.

**[Le.** ] Leithold , G. - *O Cálculo com Geometria Analíica, Vol. 2*, Editora Harbra, São Paulo, 19868.

**[Li.** ] Lima, E.L. - *Curso de Análise - Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1976.

**[R** ] Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

**[Si.** ] Simmons, G.F. - *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2 , McGraw-Hill do Brasil, Rio de Janeiro, 1987.

**[St.** ] Stewart, J. - *Cálculo* , Vol. 2, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2004.

**[Sw.** ] Swokowski, E.W. - *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2, Makron-Books do Brasil Editora Ltda., Rio de Janeiro, 1945

**[Th.** ] Thomas, G.B. - *Cálculo* - Vol. 2, Addison Wesley, 2003