3ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Integrais múltiplas - 2 (com mud. de var.)

1. Encontre a integral dupla $\iint\limits_A e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde A é a região que está no primeiro quadrante e é limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$ e pelos eixos coordenados. **Resp.** $-\dfrac{(e^{-a^2}-1)}{4}\pi$.

2. Calcule por coordenadas polares a integral dupla $\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,dA$, onde R é a região limitada pelas circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$. **Resp.** $\pi\, e(e^8-1)$.

3. Calcule a integral dupla $\iint\limits_R \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, onde R é a região no primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2+y^2=1$ e pelos eixos coordenados. **Resp.** $\dfrac{1}{2}$.

4. Encontre o volume da região acima do parabolóide $z=x^2+y^2$ e abaixo do plano $z=4$.

5. Determinar a área no quarto quadrante, limitada pela parábola $x-y=(x+y)^2+1$ e pela reta $x-y=4$. Sugestão: Faça $u=x-y$ e $v=x+y$.

6. Calcular $\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy$, onde D é o paralelogramo de vértices: $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ e $(0,\pi)$. Sugestão: Usar a transformação: $u=x-y$ e $v=x+y$.

7. Calcule a área da região, no primeiro quadrante, que está entre as parábolas $y=x^2$ e $y=2x^2$ e entre as parábolas $x=y^2$ e $x=2y^2$. Sugestão: Usar a transformação: $u=x^2/y$ e $v=y^2/x$.

8. Determinar a área do anel dado por dois círculos concêntricos de raios a e b, $b>a$.

9. Achar o volume do sólido S, limitado pelo parabolóide $x^2+y^2=4z$ e pelo cilindro $x^2+y^2=8y$ e pelo plano $z=0$.

10. Determinar o volume V do sólido constituído pelo cone $(z-3)^2\geq x^2+y^2$, $0\leq z\leq 2$ e pelo cilindro $x^2+y^2\leq 1$, $2\leq z\leq 5$.

11. Escreva a integral iterada que fornece o volume das regiões a seguir:

    (a) uma esfera de raio $2a$, furada ao longo de um diâmetro por um cilindro de raio a;

    (b) região limitada pelos cilindros: $x^2+y^2=16$ e $x^2+z^2=16$;

    (c) região limitada pelo parabolóide $x^2+y^2=9-z$ e pelo plano $z=0$.

12. Determinar o volume interno ao cilindro $x^2+y^2=9$, $0\leq z\leq 6$ e externo ao cone $x^2+y^2=\dfrac{1}{9}z^2$, $z\geq 0$.

13. Dada a integral $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ onde D é o sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2\leq z^2$, $x^2+y^2+z^2\leq 2$, $z\geq 0$. Determine os extremos de integração, e escreva as integrais iteradas usando:

    a) coordenadas cartesianas; b) coordenadas cilíndricas; c) coordenadas esféricas.

    Calcule esta integral usando o sistema de coordenadas que achar mais conveniente.

14. Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2\leq 9$, $3\leq z\leq 6$; $x^2+y^2\leq z^2$, $0\leq z\leq 3$ e $x^2+y^2\geq 1$. Sugestão: usar coordenadas cilíndricas.

15. Calcular o volume do sólido constituído pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$ e pelo cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $2 \leq z \leq 5$.

16. Seja R a região limitada pelo parabolóide $z = 2x^2+y^2+1$, pelo plano $x+y = 1$ e pelos planos coordenados. Calcule o volume de R.

17. Calcule as integrais abaixo usando o sistema de coordenadas mais conveniente:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx\, dz$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz\, dx\, dy$

(c) Seja S a região limitada pelo tetraedro formado pelo plano $12\,x + 20\,y + 15\,z = 60$ e os planos coordenados. Calcule:
a) $\displaystyle\iiint_S y\, dV$ b) $\displaystyle\iiint_S (x^2 + y^2)\, dV$

18. Seja $\mu : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua sobre B. Se $\mu(x, y)$ indicar a densidade de massa superficial no ponto (x, y) então define-se:

a) **Massa de** B: $M = \displaystyle\iint_B \mu(x, y)\, dx\, dy$

b) **Centro de massa de** B é o ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in B$ com $\overline{x} = \dfrac{M_y}{M}$, $\overline{y} = \dfrac{M_x}{M}$, onde

$M_x = \displaystyle\iint_B y\, \mu(x, y)\, dx\, dy =$ momento de B em relação ao eixo x

$M_y = \displaystyle\iint_B x\, \mu(x, y)\, dx\, dy =$ momento de B em relação ao eixo y

Observação: Se $\mu(x, y) =$ constante $\Rightarrow (\overline{x}, \overline{y})$ é chamado **centróide**.

c) **momento de inércia** com relação ao eixo x: $I_x = \displaystyle\iint_B y^2\, \mu(x, y)\, dx\, dy$; momento de inércia com relação ao eixo y: $I_y = \displaystyle\iint_B x^2\, \mu(x, y)\, dx\, dy$; momento de inércia polar ou em relação à origem: $I_0 = \displaystyle\iint_B (x^2 + y^2)\, \mu(x, y)\, dx\, dy$.

Baseado nas definições acima resolver:

(a) Uma lâmina plana é limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $x = 4$, Ache o centro de massa, sabendo-se que a densidade no ponto $P = (x, y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao eixo y.

(b) Seja a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a forma de uma placa. Seccionando-se a placa segundo o segmento que liga o ponto $(0, b)$ ao ponto $(a, 0)$, pede-se o centróide de cada porção seccionada da placa.

(c) Encontre o momento de inércia com relação à origem de uma placa semi-circular de raio a, sabendo-se que a densidade em $P = (x, y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao diâmetro da placa.

(d) Calcule I_x, I_y e I_0 para a lâmina que tem a forma da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$ cuja densidade é $\mu(x, y) = y^2$.

(e) Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado a. Determine o momento de inércia em relação a:

a) um lado; b) uma diagonal; c) o centro de massa.

19. Seja $\mu : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua sobre B. Se $\mu(x,y,z)$ indicar a densidade de massa no ponto (x,y,z) então define-se:

a) **Massa de** B: $M = \iiint_B \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

b) **Centro de massa de** B é o ponto $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in B$ com $\overline{x} = \dfrac{M_1}{M}$, $\overline{y} = \dfrac{M_2}{M}$, $\overline{z} = \dfrac{M_3}{M}$, onde

$M_1 = \iiint_B x\,\mu\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$M_2 = \iiint_B y\,\mu\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$M_3 = \iiint_B z\,\mu\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

Observação: Se $\mu(x,y,z) =$ constante $\Rightarrow (\overline{x},\overline{y})$ é chamado **centróide**.

c) **momento de inércia** com relação ao eixo x: $I_x = \iint_B (y^2+z^2)\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; momento de inércia com relação ao eixo y: $I_y = \iint_B (x^2+z^2)\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; momento de inércia com relação ao eixo z: $I_z = \iint_B (x^2+y^2)\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Baseado nas definições acima resolver:

(a) Calcule volume, centro de massa e momentos de inércia com relação aos eixos do tetraedro de vértices (0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).

(b) Calcule massa, centro de massa e momentos de inércia com relação aos eixos do tetraedro de vértices (0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) no caso em que a densidade seja $\mu(x,y,z) = x$.

(c) Calcule volume, centro de massa e momentos de inércia com relação aos eixos da bola de centro a origem e raio R.

20. Calcule a massa do cone $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$, sendo a densidade no ponto (x,y,z) proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo z. **Dica:** Use coordenadas polares. **Resp.:** $\dfrac{k\pi}{10}$, onde k é a constante de proporcionalidade.