5ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Campos conservativos

1. Determine todas as funções $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que:

   a) $\nabla f(x,y) = (9x^2y^2 - 10x,\ 6x^3y + 1)$ b) $\nabla f(x,y) = (y\cos xy + 3x^2 - y,\ x\cos xy - x + 3y^2)$
   c)$\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2+y^2},\ 2ye^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{1+y^2})$ d)$\nabla f(x,y,z) = (e^{x+y^2} + zy,\ 2ye^{x+y^2} + zx, xy + z)$
   e)$\nabla f(x,y,z,w) = (2xy^2 - z,\ 2yx^2 - w,\ 2zw^2 - x,\ 2wz^2 - y + w)$

2. Determine a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(1,2,1)$ e tal que

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1).$$

3. Determine a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0,0,2)$ e tal que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2} + ye^{y^2}\right).$$

4. Existe função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 + 1)$$

   para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$? Justifique.

5. (IMPORTANTE!!)
   a) Seja $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$: determine $\varphi_1 : A_1 \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi_1(1,1) = \dfrac{\pi}{4}$ e, para todo $(x,y) \in A_1$,

$$\nabla\varphi(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right). \tag{1}$$

   b) Seja $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$: determine $\varphi_2 : A_2 \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi_2(-1,1) = \varphi_1(-1,1)$ e, para todo $(x,y) \in A_2$, satisfaça a mesma equação (1).
   c) Sejam $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ e $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$: determine $\varphi_j : A_j \to \mathbb{R}$ $(j = 3,4)$ tais que $\varphi_3(-1,-1) = \varphi_2(-1,-1)$, $\varphi_4(1,-1) = \varphi_3(1,-1)$ e que também satisfaçam a equação (1).
   d) Seja $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Existe uma função $\varphi_A : A \to \mathbb{R}$ que, para todo $(x,y) \in A$, satisfaça a equação (1)?
   e) Seja $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ (isto é, $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Existe uma função $\varphi_B : B \to \mathbb{R}$ que, para todo $(x,y) \in B$, satisfaça a equação (1) (sugestão: calcule $\varphi_4(1,1)$).
   f) Repita o exercício substituindo a equação (1) pela

$$\nabla\varphi(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{2}$$

6. O campo de forças dado é conservativo? Justifique e quando for, calcule o potencial.
   a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, b) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, c) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x+2y)\vec{j}$
   d) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, e) $\vec{F}(x,y) = 4\vec{i} + x^2\vec{j}$, f) $\vec{F}(x,y) = e^{x^2+y^2}(2x\vec{i} - 2y\vec{j})$

7. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]$, uma curva de classe $C^1([a,b])$, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ é uma curva fechada). Suponha que, para todo $t \in [a,b],\ \gamma(t) \in A$. Prove que se $\overrightarrow{F}$ for conservativo então

$$\int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = 0.$$

8. (IMPORTANTE) Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}, (x,y) \neq (0,0)$.

   a) Verifique que, para todo $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
   onde $P(x,y) = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)}$ e $Q(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$.

   b) Calcule $\int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$.

   c) $\overrightarrow{F}$ é conservativo? Por quê?

   d) Responda às perguntas (a,b,c) no caso $P(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$ e $Q(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)}$.

9. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de forças com P e Q definidas e contínuas no aberto A de $\mathbb{R}^2$. Se $\overrightarrow{F}$ for conservativo então existirá uma função escalar $U(x,y)$ definida em A tal que $\overrightarrow{F} = -\nabla U$ em A. Uma tal função denomina-se função energia potencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$. Determine, caso exista, a função energia potencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

   a) $\overrightarrow{F}(x,y) = -6x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 0$.

   b) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 0$.

   c) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 1.000$.

10. (a) Demonstre que $\displaystyle\int_\gamma (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2\ y - 3xy^2)dy$, onde γ vai do ponto (1,2) até (3,4), é independente do caminho.

    (b) Calcule a integral do ítem anterior.

11. a) Provar que $\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\vec{i} + (6x - 2yz)\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$ é um campo conservativo, isto é, $\vec{F}$ provém de um potencial.

    b) Calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot dr$ em que γ é um caminho entre (1,-1,1) e (2,1,-1).

12. Mostre que $\int_\gamma \vec{F}$ independe do caminho e determine uma função potencial ϕ para $\vec{F}$:

    (a) $\vec{F}(x,y) = (3x^2y + 2)\vec{i} + (x^3 + 4y^3)\vec{j}$

    (b) $\vec{F}(x,y) = (2x\sin\ y + 4e^z)\vec{i} + (x^2\cos\ y + 2)\vec{j}$

    (c) $\vec{F}(x,y) = (2y^3\sin\ x)\vec{i} + (6y^2\cos\ x + 5)\vec{j}$

13. Verifique se o campo $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ é o gradiente de alguma função escalar no paralelepípedo $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$, $2 \leq z \leq 4$.

Gabarito

Exercício 1 c) $e^{x^2+y^2} + \arctan(y) + C :\quad C \in \mathbb{R}$