7ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Superfícies - Gauss e Stokes em $\mathbb{R}^3$.

1. Calcule o plano tangente às superfícies abaixo, no ponto indicado.
   a) $\sigma(u,v) = (u, u+v, u+2v)$, $P = (1,2,3)$;
   b) $\sigma(r,s) = (r\cos(s), r\sin(s), 1/r)$, $P = (1,1,\sqrt{2}/2)$;

2. Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 2$ que se encontra dentro do parabolóide $z = x^2+y^2$ e acima do plano xy. **Dica:** Escreva a integral de superfície e passe para coordenadas polares. **Resp.:** $\dfrac{4\pi}{2+\sqrt{2}}$.

3. Seja $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{j}$. Determine α para que $\vec{F}$ seja solenoidal ($\vec{F}$ é solenoidal se div $\vec{F} = 0$ em seu domínio). Desenhe o campo para o α determinado. **Resp.:** $\alpha = 1$.

4. Seja $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\vec{j} + \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\vec{k}$. Determine α para que $\vec{F}$ seja solenoidal. Desenhe o campo para o α determinado.

5. Calcule a área do parabolóide hiperbólico z = xy que fica dentro do cilindro $x^2+y^2 = 1$. Repita para $z = (x^2-y^2)/2$.

6. Calcule as seguintes integrais de superfície:
   (a) $\iint_S (x^2+y^2)dS$, em que S é a esfera de centro na origem e raio a.
   (b) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, em que S é a superfície lateral do cone $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \le z \le b$.
   (c) $\iint_S \sqrt{1+y^2}dS$, em que S é dada por $z = y^2/2$, $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$.

7. Calcule $\iint_S f(x,y,z)dS$, em que:
   (a) $f(x,y,z) = 1$, S é a porção do plano x+y+z-1 = 0 no primeiro octante
   (b) $f(x,y,z) = x^2$, S é a parte do plano z = x interior ao cilindro $x^2+y^2 = 1$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2$, S é o hemisfério superior $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$
   (d) $f(x,y,z) = x+y$, S é a porção do plano 2x+3y+z = 6 situada no primeiro octante.
   (e) $f(x,y,z) = x$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u, v, u^2+v)$, $0 \le u \le 1$ e $u^2 \le v \le 1$.
   (f) $f(x,y,z) = xy$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u-v, u+v, 2u+v+1)$, $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le u$.
   (g) $f(x,y,z) = y$ e S é dada na forma paramétrica $\sigma(u,v) = (u, v, 1-u^2)$, $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le \sqrt{u}$.

8. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$, nos seguintes casos (primeiro fixe a orientação de $\vec{n}$)
   (a) $\vec{F} = (x+1)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + z\vec{k}$ e S é o triângulo de vértices (1,0,0),(0,1,0) e (0,0,1).
   (b) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z^2 = x^2+y^2$, para z entre 1 e 2.
   (c) $\vec{F} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$ e S é a parte da superfície $y^2 = 2-x$ cortada pelas superfícies $y^2 = z$ e $y = z^3$.

9. Aplicando o teorema de Stokes, achar as integrais abaixo.
   (a) $\int_\gamma (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, em que γ é a circunferência $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$.
   (b) $\int_\gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, em que γ é a elipse $x^2+y^2 = 1$, $x+z = 0$.

(c) $\int_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, em que γ é o triângulo de vértices $(a,0,0),(0,a,0)$ e $(0,0,a)$, $a>0$.
(d) $\vec{F} = (3z - \sin x)\vec{i} + (x^2 + e^y)\vec{j} + (y^3 - \cos z)\vec{k}$, e C a curva $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ 0 \le t \le 2\pi$.
(e) $\vec{F} = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e C o quadrado de vértices (0,0,2),(1,0,2),(1,1,2) e (0,1,2).
(f) $\displaystyle\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, em que $\vec{F} = (2y,\ e^z,\ -\arctan x)$ e S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano z = 0 e $\vec{n}$ é a normal superior. Observação: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = rot\vec{F}$.

10. Calcule $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n} dS$, em que $\vec{n}$ é o vetor normal exterior a S. Quando achar conveniente, use o teorema de Stokes.

    a) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e S é a parte superior da esfera unitária centrada na origem.

    b) $\vec{F}(x,y,z) = (3z, 4x, 2y)$ e S é a porção do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 9$.

    c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^4, xy, z^4)$ e S é o triângulo de vértices $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,2)$.

    d) $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, com $z \ge 0$

    e) $\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$ e S é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$

11. Comprove o teorema de Stokes nos casos em que o $\vec{F}(x,y,z)$ e a superfície S são dados por:

    (a) $\vec{F} = (x,y,z)$ e S é a parte superior da esfera unitária centrada na origem.
    (b) $\vec{F} = (3z, 4x, 2y)$ e S é a porção do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ compreendida entre os planos z = 1 e z = 9.
    (c) $\vec{F} = (x^4, xy, z^4)$ e S é o triângulo de vértices (2,0,0),(0,2,0) e (0,0,2).
    (d) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, com $z \ge 0$.
    (e) $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$ e S é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.
    (f) $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{k}$ e S é a parte da superfície de equação (coord. cilíndricas) $\rho(\theta) = 2 + \cos\theta$, que está acima do plano xy e abaixo do cone $z^2 = x^2 + y^2$.

12. Considere a superfície S obtida pela revolução do segmento de reta determinado pelos pontos $(1,0,1)$ e $(0,0,3)$ em torno do eixo z. Calcule $\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{n}$ é o campo de vetores normais exterior a S e $\vec{F}(x,y,z) = (-\frac{y^3}{3} + ze^x, \frac{x^3}{3} - \cos(yz), xy)$. **Resp.** $\pi/2$.

13. Calcule

    a) O fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(x,y,z)$ através da superfície do sólido W limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, com $a < b$, orientadas com sentidos opostos ($\vec{n}$ aponta para fora de W). **Resp.** $4\pi(b - a)$.

    b) O fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x,y,z)$ através das faces do cubo W definido por

    $$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1\}.$$

14. Usando o teorema de Gauss, calcule o fluxo dos campos abaixo que sai das respectivas regiões V, através da fronteira $S = \partial V$:

    (a) $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ e V é o cubo $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$.
    (b) $\vec{F} = (x,y,z)$ e V é a pirâmide limitada pelos planos x+y+z = a, x = 0, y = 0 e z = 0.
    (c) $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ e ∂V é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
    (d) $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ e V é o cone delimitado por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, com $0 \le z \le b$.
    (e) $\vec{F} = y\sin x\vec{i} + y^2z\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, S a superfície da região limitada pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$
    (f) $\vec{F} = y^3e^z\vec{i} - xy\vec{j} + x\arctan(y)\vec{k}$, S a superfície da região limitada pelos planos coordenados e pelo plano

x+y+z = 1.

(g) $\vec{F} = ye^z\vec{i} + (y - ze^x)\vec{j} + (xe^y - z)\vec{k}$, S o toro $(\sqrt{x^2+y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$, $0 < b < a$.

(h) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$, S é formada por $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$, $z = x + 2$.

15. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo do campo $F(x, y, z) = (2\,x, 5\,y, z)$ que atravessa a superfície S, sabendo-se que S é uma luva com volume de 15 e que sua abertura é a circunferência $\{(x, y, 0),\ x^2+y^2 = 8\}$.

16. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (z\cos y^7, z^3e^{x^2}, z)$ sobre o parabolóide (sem tampa) $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

17. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sendo γ a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com a superfície $z = y^2$, percorrida de modo que sua projeção no plano xy esteja no sentido anti-horário e $\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + z\vec{k}$.

18. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial tal que $\text{rot}\vec{F}(x, y, z) = (x, -2y, z)$. Calcule $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, em que C é o semifuso esférico $\{(a, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, sendo $a > 0$ uma constante, percorrido de modo que sua projeção no plano xy esteja no sentido anti-horário.

19. Calcule $\int_C (2xyz + \text{sen}x)dx + (x^2z + e^y)dy + (x^2y + \frac{1}{z})dz$, onde C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^2 t, (t+1)^2)$, $0 \leq t \leq \pi$. (Sugestão: calcule o rotacional do campo).

20. Calcule $\int_C 3x^2\text{sen}z dx + \frac{2zy}{1+y^2}dy + (x^3\cos z + \ln(1+y^2))dz$, onde C é a curva fechada qualquer em $\mathbb{R}^3$.

21. Calcule $\int_C (y+\text{sen}x)dx+(z^2+\cos y)dy+x^3dz$, onde C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = (\text{sen}t, \cos t, \text{sen}(2t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Sugestão: Use o Teorema de Stokes. Observe que esta curva está contida no plano $z = 2xy$).

22. Calcule $\int_C (z + y^2)dx + (y^2 + 1)dy + (y + \ln(z^2 + 1))dz$, onde C é a curva parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\text{sen}t, 10 - 2\text{sen}t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Sugestão: Use o Teorema de Stokes. Observe que esta curva é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o plano $z = 10 - y$).

23. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva interseção da calha $z = \text{sen}y + 10$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 16$, percorrida de modo que sua projeção no plano xy esteja no sentido anti-horário.

Gabarito

Exercício 1 a) $(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = 0$, b) $\pi(\tau, \rho) = (1 + \rho\sqrt{2}/2 - \tau, 1 + \rho\sqrt{2}/2 + \tau, \sqrt{2}/2 - \rho/2)$;
Exercício 6 b) $2\pi\frac{a^2b}{3}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$, c) 4/3.
Exercício 7 f) $\sqrt{14}/6$.
Exercício 8 a) 0.
Exercício 15 120.