1 Lembrete: Definição de integral em uma variável

Definição: chamamos **Partição de** $[a,b]$
um conjunto finito de pontos da forma

$$\mathfrak{P} = \{x_0, ..., x_k : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{k-1} < x_k = b\} \ ;$$

também denotamos por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta\mathfrak{P} = max\,\{\Delta x_i,\ i = 1, .., k\}$.

Dadas f (limitada) e $\mathfrak{P}$ definimos
Soma inferior associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathbf{s(f,\mathfrak{P}) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i}, \text{ onde } m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \,;$$

Soma superior associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathbf{S(f,\mathfrak{P}) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i}, \text{ onde } M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \,.$$

Uma soma de Riemann associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathcal{S}_\xi(\mathbf{f},\mathfrak{P}) = \mathbf{\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i}, \text{ onde cada } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \,.$$

OBS: *Vale $s(f,\mathfrak{P}) \le \mathcal{S}_\xi(f,\mathfrak{P}) \le S(f,\mathfrak{P})$ para qualquer $\mathfrak{P}$ e quaisquer ξ_i.*

Definição de integral:
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **limitada (com $[a,b]$ limitado);**

- se $I := \sup_{\forall\mathfrak{P}} s(f,\mathfrak{P}) = \inf_{\forall\mathfrak{P}} S(f,\mathfrak{P}) = \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f,\mathfrak{P})$ dizemos que
  - **f é Riemann integrável em $[a,b]$,**
  - I é a **integral definida (de Riemann) de f em $[a,b]$:** $\qquad I = \int_a^b f$;
- se $\sup_{\forall\mathfrak{P}} s(f,\mathfrak{P}) \neq \inf_{\forall\mathfrak{P}} S(f,\mathfrak{P})$ ou $\nexists \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f,\mathfrak{P})$ dizemos que
  - **f não é Riemann integrável em $[a,b]$.**

2 Definição de integral dupla em retângulos

Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ **limitada, onde** $Q = [a, b] \times [c, d]$**: retângulo limitado.**
(OBS: logo existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$)

Sejam
$\mathfrak{P}_\mathbf{x} = \{x_0, ..., x_k : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{k-1} < x_k = b\}$ partição de $[a, b]$,
$\mathfrak{P}_\mathbf{y} = \{y_0, ..., y_h : \ c = y_0 < y_1 < y_2 < .. < y_{h-1} < y_h = d\}$ partição de $[c.d]$.
também denotamos por $\boldsymbol{\Delta\mathfrak{P}} = max\,\{\Delta x_i, \Delta y_j : \ i = 1, .., k, \ i = 1, .., h\}$.

Dadas f, $\mathfrak{P}_x$ e $\mathfrak{P}_y$ definimos
Soma inferior associada a f, $\mathfrak{P}_x$ e $\mathfrak{P}_y$:

$$\mathbf{s(f, \mathfrak{P}_{x,y}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} m_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j}, \text{ onde } m_{i,j} = \inf\{f(x) : \ (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}\,;$$

Soma superior associada a f, $\mathfrak{P}_x$ e $\mathfrak{P}_y$:

$$\mathbf{S(f, \mathfrak{P}_{x,y}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} M_{i,j}\Delta x_i \Delta y_j}, \text{ onde } M_{i,j} = \sup\{f(x) : \ (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$$

Uma soma de Riemann associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathcal{S}_\xi\mathbf{(f, \mathfrak{P}_{x,y}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} f(\xi_{i,j})\Delta x_i \Delta y_j}, \text{ onde } \xi_{i.j} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Vale $s(f, \mathfrak{P}_{x,y}) \leq \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}_{x,y}) \leq S(f, \mathfrak{P}_{x,y})$ para quaisquer $\mathfrak{P}_{x,y}$ e $\xi_{i,j}$.

Definição de integral:
Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ **limitada;**

- se $I := \sup_{\forall \mathfrak{P}_{x,y}} s(f, \mathfrak{P}_{x,y}) = \inf_{\forall \mathfrak{P}_{x,y}} S(f, \mathfrak{P}_{x,y}) = \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}_{x,y})$ dizemos que
  - f **é Riemann integrável em** Q**,**
  - I é a **integral definida (de Riemann) de f em Q**: $\quad I = \iint_Q f$;
- se $\sup_{\forall \mathfrak{P}_{x,y}}(s(f, \mathfrak{P}_{x,y})) \neq \inf_{\forall \mathfrak{P}_{x,y}}(S(f, \mathfrak{P}_{x,y}))$ ou $\nexists \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}_{x,y})$ dizemos que
  - f **não é Riemann integrável em** Q**.**

Outras notações: $\iint_Q f = \int_Q f = \iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \iint_Q f(\mathbf{x})\, dQ = \iint_Q f(\mathbf{x})\, dA$

Seja $Q = [a,b] \times [c,d]$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1. *Se $f : Q \to \mathbb{R}$* **é contínua então é integrável***.*

Teorema 2.2 (Teorema de Redução - Fubini)**.** *Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em Q.*

- *se $\forall y \in [c,d]\ \exists G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ então G é integrável em $[c,d]$ e*

$$\iint_Q f = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

- *se $\forall x \in [a,b]\ \exists H(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ então H é integrável em $[a,b]$ e*

$$\iint_Q f = \int_a^b H(x)\,dx \ = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Corolário 2.3. *Se $f : Q \to \mathbb{R}$* **é contínua ambas as fórmulas valem.**

Aplicação:

Se $f \geq 0$ então

$$\iint_Q f$$

é o volume do sólido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in Q,\ 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}$$

3 Integrais múltiplas

Podemos fazer o mesmo em $\mathbb{R}^n$.
Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ **limitada, onde** $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$**: multi-retângulo (em** $\mathbb{R}^n$**) limitado.**
(OBS: logo existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$.)

Sejam
$\mathfrak{P}_1, .., \mathfrak{P}_n$ partições de $[a_1, b_1], .., [a_n, b_n]$ contendo $k_1 + 1, .., k_n + 1$ pontos
$\Delta\mathfrak{P}$ o tamanho do maior intervalinho entre todas as $\mathfrak{P}_1, .., \mathfrak{P}_n$

Dadas f, $\mathfrak{P}_1, .., \mathfrak{P}_n$ definimos
Uma soma de Riemann associada a f e $\mathfrak{P}_1, .., \mathfrak{P}_n$:

$$\mathcal{S}_\xi(\mathbf{f}, \mathfrak{P}_{\mathbf{1},..,\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{i_1=1}}^{\mathbf{k_1}} ... \sum_{\mathbf{i_n=1}}^{\mathbf{k_n}} \mathbf{f}(\xi_{\mathbf{i_1},..,\mathbf{i_n}}) \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_{\mathbf{i_1}} ... \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_{\mathbf{i_n}}$$

onde $\xi_{i_1,..,i_n} \in [x_{i_1 - 1}, x_{i_1}] \times ... \times [x_{i_n - 1}, x_{i_n}]$.

Definição de integral:
Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ **limitada;**

- se existe $I := \lim_{\Delta\mathfrak{P} \to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}_{1,..,n})$ dizemos que
  - **f é Riemann integrável em Q,**
  - I é a **integral definida (de Riemann) de f em Q**: $I = \int_Q f$ ($n = 3$ **usa** $\iiint_Q f$);
- se $\nexists \lim_{\Delta\mathfrak{P} \to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}_{1,..,n})$ dizemos que
  - **f não é Riemann integrável em Q.**

Outras notações:

(n=3) $\int_Q f = \iiint_Q f = \iiint_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_Q f(\mathbf{x})\, dQ = \iiint_Q f(\mathbf{x})\, dV$

(geral) $\int_Q f = \int \cdots \int_Q f = \int \cdots \int_Q f(x_1, .., x_n)\, dx_1 .. dx_n = \int_Q f(\mathbf{x})\, dQ = \int_Q f(\mathbf{x})\, dV = ... = \int_Q f(\mathbf{x})\, dV_n = \int_Q f(\mathbf{x})\, dx^n$

Seja $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$ um multi-retângulo em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1. *Se $f : Q \to \mathbb{R}$* **é contínua então é integrável***.*

Teorema 3.2 (Teorema de Redução - Fubini)**.** *Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ limitada e integrável em Q.*

- *Se a formula abaixo faz sentido, então é verdadeira:*

$$\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left[\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ \ldots \ \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, .., x_n) dx_n \right) \right]$$

- *O mesmo vale mudando a ordem das integrais à direita (sempre que tudo faça sentido!)*

Corolário 3.3. *Se $f : Q \to \mathbb{R}$* **é contínua então a fórmula acima vale (com qualquer ordem das integrais à direita).**

4 Definição de integral múltipla em outros conjuntos

Dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, definimos a **integral de f em B** como

$$\int_B f := \int_Q \widetilde{f}$$

onde $B \subseteq Q$, Q é um (multi-)retângulo em $\mathbb{R}^n$ e

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & se\ \mathbf{x} \in B \\ 0 & se\ \mathbf{x} \notin B \end{cases}$$

4.1 Medida de Peano-Jordan

Definição: Dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado,

- dizemos que **B é mensurável*** **(segundo Peano-Jordan)** se

$$\int_{\mathbf{B}} \mathbf{1} \qquad \text{existe.}$$

- chamamos **medida*** **(de Peano-Jordan) de B** (notação $|B|$),

$$|\mathbf{B}| := \int_{\mathbf{B}} \mathbf{1}$$

* **Cuidado:** Estas definições fazem sentido fixado n!!

---

se $n = 2$ se fala de **área**,
se $n = 3$ se fala de **volume**.
em geral, se fala de **medida n−dimensional** $|B|_n$.

• *se $Q = [a, b] \times [c, d]$ é um retângulo (em $\mathbb{R}^2$) então $|Q| = (b - a)(d - c)$.*
• *se $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_n, b_n]$ é um multi-retângulo (em $\mathbb{R}^n$) então $|Q| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$.*

Conjuntos de medida zero:

- Dado $B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, $|B|_n = 0$ é equivalente a

  $\forall \varepsilon > 0$ existe um número finito de (multi-)retângulos $Q_1, .., Q_k$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

  $$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Q_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{k} |Q_i|_n < \varepsilon$$

- **A reunião de um número finito de conjuntos (limitados) de medida* zero, tem medida* zero.**

- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^2$ têm área zero:**
  - gráfico de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com f integrável.
  - traço de curva regular $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$
- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^3$ têm volume zero:**
  - gráfico de $f : C \to \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado e mensurável.
  - imágem de $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ com σ "regular"e $D \subseteq \mathbb{R}^{1\, ou\, 2}$ limitado fechado e mensurável (curvas e superfícies).
- **Estes conjuntos (limitados) em $\mathbb{R}^n$ têm medida zero:**
  - gráfico de $f : C \to \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ limitado e mensurável.
  - imágem de $\sigma : D \to \mathbb{R}^n$ com σ "regular"e $D \subseteq \mathbb{R}^{k\ (k<n)}$ limitado fechado e mensurável.

Teorema 4.1. *Um conjunto* $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ *limitado* **é mensurável se e só se** ∂B **é mensurável e** $|\partial B|_n = 0$.

Definição: dizemos que $f : B \to \mathbb{R}$ é **geralmente contínua** se o conjunto $D_f = \{\mathbf{x} \in B : \ f$ **é descontínua em x**$\}$ **tem medida zero**.

Teorema 4.2. *Se* B **é limitado e mensurável e** $f : B \to \mathbb{R}$ **é limitada e geralmente contínua então** f **é integrável em** B.

Se $g : B \to \mathbb{R}$ *é tal que o conjunto* $\{x \in B : \ f(x) \neq g(x)\}$ *tem medida zero então* g *é integrável em* B *e* $\int_B f = \int_B g$

Teorema 4.3 (Redução em $\mathbb{R}^2$)**.**

- *Seja* $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\big\}$ **onde** $g_{1,2} : [a, b] \to \mathbb{R}$ **saõ limitadas e integráveis.**

  Seja $f : B \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

  Então f **é integrável em** B **e vale**

$$\iint_B f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

- *Seja* $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \leq y \leq d, \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\big\}$ **onde** $h_{1,2} : [c, d] \to \mathbb{R}$ **saõ limitadas e integráveis.**

  Seja $f : B \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

  então f **é integrável em** B **e vale**

$$\iint_B f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

(link simular regiões de integração)

5 Propriedades da integral múltipla

Valem a maioria das propriedades da integral em uma variável:
Sejam $f, g : B \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em B, com $B \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e mensurável. Então

- $(\inf_B f)\ |B|_n \leq \int_B f \leq (\sup_B f)\ |B|_n$
- $\alpha f + \beta g$ **é integrável em** B e $\int_B (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_B f\right) + \beta \left(\int_B g\right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|f|$ **é integrável** e $\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f|$,
- fg **é integrável**
- $f \geq 0$ **em** B **implica** $\int_B f \geq 0$.
- $f \geq g$ **em** B **implica** $\int_B f \geq \int_B g$.
- $f = 0$ **em** B **implica** $\int_B f = 0$.
- **se** $|B|_n = 0$ **então** $\int_B f = 0$.
- (tipo media) Se B **conexo por caminhos e** f **contínua então existe** $\mathbf{x} \in B$ **tal que**
$$f(\mathbf{x}) = \frac{\int_B f}{|B|_n}$$

Sejam $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ **limitados e mensuráveis** $\boxed{\textbf{com } |B \cap C|_n = 0}$

- Se f é limitada e integrável em B e em C então é integrável em $B \cup C$ e
$$\int_{B \cup C} f = \int_B f + \int_C f \tag{5.1}$$
- Se f é limitada e integrável em $B \cup C$ então é integrável em B e em C e vale (5.1)

Teorema 5.1 (Redução em $\mathbb{R}^3$).

- *Seja* $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \le x \le b, \ (y, z) \in C(x)\}$ **onde** $C(x) \subseteq \mathbb{R}^2$ **é um conjunto limitado e mensurável que varia com continuidade.**

  Seja $f : B \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

  Então f **é integrável em** B **e vale**

  $$\iiint_B f = \int_a^b \left(\iint_{C(x)} f(x, y, z)\, dydz \right) dx$$

- *Seja* $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in C, \ h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\}$ **onde** $h_{1,2} : C \to \mathbb{R}$ **saõ limitadas e integráveis e** $C \subseteq \mathbb{R}^2$ **é imitado e mensurável.**

  Seja $f : B \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

  então f **é integrável em** B **e vale**

  $$\iiint_B f = \iint_C \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy$$

- *Analogamente trocando o papél das variáveis*

Teorema 5.2 (Redução em $\mathbb{R}^n$).

- *Seja* $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ (x_1, .., x_k) \in C, \ (x_{k+1}, .., x_n) \in D((x_1, .., x_k))\}$ **onde** $D((x_1, .., x_k)) \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ **é um conjunto limitado e mensurável que varia com continuidade.**

  Seja $f : B \to \mathbb{R}$ **limitada e contínua**.

  Então f **é integrável em** B **e vale**

  $$\int_B f = \int_C \left(\int_{D((x_1,..,x_k))} f(\mathbf{x})\, dx_{k+1}..dx_n \right) dx_1..dx_k$$

6 Algumas aplicações

- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável do plano, então $|B|_2 = \iint_B 1$ é a **área de** B.
- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto mensurável do espaço, então $|B|_3 = \iiint_B 1$ é o **volume de** B.
- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável e $f : B \to \mathbb{R}$ geralmente contínua, com $f \geq 0$.
  Então o **volume da região** $R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in B \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}$ é dado por
  $$\mathbf{V_R} = \iint_{\mathbf{B}} \mathbf{f}$$
- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável e $f, g : B \to \mathbb{R}$ geralmente contínuas, com $f \leq g$.
  Então o **volume da região**
  $R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in B \quad f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\right\}$ é dado por
  $$\mathbf{V_R} = \iint_{\mathbf{B}} \mathbf{g} - \mathbf{f}$$
- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto mensurável que representa um corpo e $\rho : B \to \mathbb{R}$ geralmente contínua represente a sua densidade.
  Então a **massa do corpo** é dada por
  $$\mathbf{M_B} = \iiint_{\mathbf{B}} \rho$$

7 Cálculo das propriedades inerciais de um corpo

Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto mensurável que representa um corpo e $\rho : B \to \mathbb{R}$ geralmente contínua represente a sua densidade.

- a **massa do corpo** é dada por $\mathbf{M_B} = \iiint_{\mathbf{B}} \rho$
- cada coordenada x_i^G do **centro de gravidade** do corpo é dada por

$$x_i^G = \frac{1}{M_B} \iiint x_i\, \rho(x_1, x_2, x_3)\, dV, \qquad i = 1, 2, 3.$$

- o **momento di inércia com respeito a um eixo** ψ é dado por

$$I_\psi = \iiint d_\psi(\mathbf{x})^2\, \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

  onde $d_\psi(\mathbf{x})$ é a distancia do ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ do eixo ψ:

$$I_{\widehat{x}} = \iiint (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dV,$$
$$I_{\widehat{y}} = \iiint (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dV,$$
$$I_{\widehat{z}} = \iiint (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dV.$$