1 Mudança da variável em integrais múltiplas

Sejam

- $T : A \to \mathbb{R}^n$ com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto,
  T **contínua com derivadas contínuas, injetora e tal que** $det(J_T) \neq 0$ em A,
- B **limitado** tal que $\overline{B} \subseteq A$,
- $f : T(B) \to \mathbb{R}$ **contínua**.

Então

- B **é mensurável se e só se** $T(B)$ **é mensurável**,
- $\displaystyle\int_{T(B)} f = \int_B f \circ T \ |det(J_T)|$

  isto é,

  $$\int_{\mathbf{T(B)}} \mathbf{f(x_1, .., x_n) dx_1 ... dx_n} = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f(T(u_1, .., u_n))\,|det(J_T(u_1, .., u_n))| du_1 ... du_n}.$$

NOTA:
Se $\widetilde{A} = A \setminus C$ onde $|C|_n = 0$ e $T|_{\widetilde{A}}$ é injetora e tal que $det(J_T)|_{\widetilde{A}} \neq 0$, então as afirmações acima continuam verdadeiras.

1.1 Exemplos importantes

Calcular
$$\iint_C e^{x^2+y^2}\,dxdy \quad \text{onde } C = \left\{x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Se $T(\rho,\theta) = (\ \rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\ )$ e $Q = [0,1]\times[0,2\pi]$ então $T(Q) = C$.

NOTA:
- T não é injetora pois $T(\cdot,0) = T(\cdot,2\pi)$ e $T(0,\cdot) = (0,0)$,
- $det(J_T) = 0$ para $\rho = 0$,

porém
- **em** $R = (0,1]\times[0,2\pi)$ **é injetora e** $det(J_T) \neq 0$,
- vale $|Q \setminus R| = 0$.

Logo podemos aplicar a fórmula:
$$\iint_C e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_Q e^{\rho^2}\rho\,d\rho d\theta = ... = \pi(e-1).$$

Calcular
$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz \quad \text{onde } B = \left\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

Se $T(\rho,\theta,\varphi) = (\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\cos(\varphi)\ )$
e $P = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ então $T(P) = B$.

NOTA:
- T não é injetora pois

$T(\rho,0,\varphi) = T(\rho,2\pi,\varphi)$,
$T(\rho,\theta_1,0) = T(\rho,\theta_2,0)$
$T(\rho,\theta_1,\pi) = T(\rho,\theta_2,\pi)$ e
$T(0,\cdot,\cdot) = (0,0,0)$,
- $det(J_T) = 0$ para $\rho = 0$ e para $\varphi = 0,\pi$,

porém
- **em** $R = (0,1]\times[0,2\pi)\times(0,\pi)$ **é injetora e** $det(J_T) \neq 0$,
- vale $|P \setminus R| = 0$.

Logo podemos aplicar a fórmula:
$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz = \iiint_P e^{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi = ... = \frac{4}{3}\pi(e-1).$$

Fórmula geral coordenadas polares

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f[\,\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\,]\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. polares

---

Fórmula geral coordenadas cilíndricas

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f[\,\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \tau\,]\,\rho\,d\rho\,d\theta\,d\tau$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. cilíndricas

---

Fórmula geral coordenadas esféricas

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_D f[\,\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\varphi)\,]\,\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. esféricas

Teorema (Derivada da inversa (Cálculo 1)).
Seja $f : A \to B$ contínua e bijetora onde A é um intervalo.
Se f derivável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$
então f^{-1} é derivável em $y_0 := f(x_0)$ e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Teorema (Teorema da função inversa).
Seja $T : A \to B$ contínua, com derivadas contínuas e bijetora, sendo A aberto ($A, B \subseteq \mathbb{R}^n$).
Se $\mathbf{x}_0 \in A$, e $det(J_T(x_0)) \neq 0$
então T^{-1} é derivável em $\mathbf{y}_0 := T(\mathbf{x}_0)$ e vale

$$J_{T^{-1}}(\mathbf{y}_0) = [J_T(\mathbf{x}_0)]^{-1} = \left[J_T(T^{-1}(\mathbf{y}_0))\right]^{-1}\,.$$

Com isso, a formula

$$\iint_{\mathbf{T(B)}} \mathbf{f(x,y)dxdy} = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f(T(u,v))\,|det\,J_T(u,v)|dudv}.$$

pode ser reescrita como

$$\iint_{\mathbf{T(B)}} \mathbf{f(x,y)dxdy} = \int_{\mathbf{B}} \frac{\mathbf{f(T(u,v))}}{\mathbf{|det\,J_{T^{-1}}(T(u,v))|}}\mathbf{dudv}.$$