

2ª Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Séries numéricas 1

1. Verifique, através de uma mudança de índices, que as duas somas são idênticas.

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{k}{k^2 + 1}, \quad \sum_{k=-1}^7 \frac{n+3}{n^2 + 6n + 10}.$$

2. Calcule os primeiros 3 termos da série dada e os 3 primeiros termos da sequência $\{S_k\}$ das somas parciais da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

3. (**Teorema da contração**) Mostre que a sequência definida por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$ converge, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para um $\lambda \in (0, 1)$ e todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre também que se $z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ então $f(z) = z$.

4. Seja

$$b_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

- a) Determine se a sequência $\{b_n\}$ é convergente.
b) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.
5. Usando a teoria das séries geométricas, expresse os números abaixo listados como uma razão de inteiros:

$$0, \overline{14} \quad \text{e} \quad 1, 24\overline{333}.$$

6. Componha uma série infinita cuja soma seja 5.
7. Determine se a série converge, diverge ou oscila, justificando a resposta. Se a série for convergente, calcule a soma.

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{4^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{4^n}\right) \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{(n-1)}}{(-2)^{(n-1)}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}} \end{array}$$

8. Determine os valores de x para os quais a série converge:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n & c) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \\ d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} & e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} & f) \sum_{n=0}^{\infty} (\tan x)^n \end{array}$$

9. Diga se a série é convergente ou não. Se for convergente, calcule a sua soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

10. Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries. Dizer se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas (**caso a afirmação seja falsa, dê um contra-exemplo**).

- a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então certamente a série $\sum_n a_n$ converge.
 b) Se a série $\sum_n a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 c) Se ambas as séries convergem, a série $\sum_n (a_n - b_n)$ converge.
 d) Se ambas as séries divergem, a série $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge.
 e) Se a série $\sum_n a_n$ diverge e c é uma constante não nula, então a série $\sum_n (c a_n)$ diverge.

11. Use o **confronto** ou o **confronto assintótico** para determinar quais das séries convergem e quais divergem.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2(5n^3 + n - 4)} & b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n} \ln n} & c) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(n^2+1)}{n^2(5n^3+n-4)} \\
 e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt{n^8-n+1}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n(n^2+7n-1)} & g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(\ln n)^2}{n(\ln n)^2} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \\
 i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} & j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n+1} & k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+2\cos(n)}{A} \right)^n : & A = 2, 6, 9.
 \end{array}$$

Dica: lembrar que $\ln n < n$ e que se $n > e$ então $\ln n > 1$.

12. a) Usando o Princípio de indução matemática, prove que

$$n! < n^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

b) Use o resultado do item a) para provar que a seguinte série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$$

13. Use o **Teste da raiz** ou o **Teste da razão** para determinar se a série converge ou diverge.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^5} \right)^n & \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} & e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{n/3}} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} & \\
 g) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln n} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{5^n} & i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! n^3} & j) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}
 \end{array}$$

14. a) Provar que se a série $\sum_k a_k$ ($a_k \neq 0$) converge, então a série $\sum_k \frac{1}{a_k}$ não converge.

b) Suponha que $a_k > 0$ para todo k e que $\sum_k a_k$ diverge. Mostre, através de exemplos, que $\sum_k (1/a_k)$ pode convergir ou divergir.

15. Suponha que a série $\sum_n a_n$ tenha termos positivos e que a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ seja tal que $s_n \leq 2007$ para todo n . Explique por que podemos concluir que a série deve ser convergente.

16. Use o **Teste da integral** para determinar se a série converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^p} : \quad \alpha, p \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Sugestão: considere a parte o caso $\alpha = 1$.

17. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} 6n^{-1,01} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \right) & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^{\pi}} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \arctan n}{n^{1.001}} \\ e) 3 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} & + \frac{3}{4\sqrt{4}} + \dots & & \end{array}$$

18. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, o que podemos dizer sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$? Justifique.

19. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, então $\sum a_n^2$ converge.