3ª Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Séries numéricas 2

1. Use o **Teste de Leibnitz** para determinar se a série converge ou diverge.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

2. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas; se for falsa forneça um contraexemplo.
(a) toda série alternada é condicionalmente convergente.
(b) toda série absolutamente convergente é convergente.
(c) toda série convergente é absolutamente convergente.
(d) toda série alternada converge.
(e) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem então $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ diverge para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(f) se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmnente convergente.

3. Estime o número de termos que precisa somar para aproximar as seguintes séries com erro menor do ε dado.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,\ \varepsilon=10^{-3} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,,\ \varepsilon=10^{-10} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5+2\cos(n)}{10}\right)^{n}\,,\ \varepsilon=10^{-5}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin(25/n)\,,\ \varepsilon=10^{-2} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{10^n}\,,\ \varepsilon=10^{-10} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}\,,\ \varepsilon=10^{-2}$$

4. Quais das séries convergem **absolutamente**, quais convergem **condicionalmente**, quais divergem e quais são oscilantes?

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n}{n!}\right)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{(2n)^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{1}{n+5^n}$$

$$l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^3\sqrt{n}}$$

5. Quais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas recursivamente como abaixo convergem e quais divergem? **Justifique**.
a) $a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{11n^3+5n^2+1}{2n+9n^3}\, a_n$
b) $a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n$
c) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{\pi+\arctan n}{2n^2}\, a_n$

6. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma séries condicionalmente convergente e

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad a_n < 0, \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ a_n & \text{se} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Prove que ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergem.

7. Determine se a série converge ou diverge, justificando a resposta.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ln n}{n^3}$ $\quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos(n\pi)$ $\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}$ $\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$ $\quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt{n}}$ $\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^3}$

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ $\quad m)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5-\sin(n)}\right)^n$ $\quad n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3-\sin(n)}\right)^n$

$o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{n}$ $\quad p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$ $\quad q)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/2)}{n}$ $\quad r)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/n)}{n}$

$s)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ $\quad t)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ $\quad u)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi/15)}{n}$ $\quad v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$

8. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Prove que $\forall x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^2}$$

converge.

10. **(!)** Mostre que a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ converge, aplicando o critério de Leibnitz à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

Mostre que a série não é absolutamente convergente.

11. Diga (justificando) quando é possível definir a soma dos elementos dos conjuntos a seguir; no caso, calcule esta soma.
a) $\{n :\ n \in \mathbb{N}\}$ *b)* $\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\}$ *c)* $\{1/[n(n+1)] :\ n \in \mathbb{N}\}$
d) $\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1/n :\ n \in \mathbb{N}\}$ *e)* $\left\{1/n^2 :\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-1/n^2 :\ n \in \mathbb{N}\right\}$

12. Analise as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

nos casos
- $s_n = (-1)^n$
- $s_n = \cos(2\pi n/30)$,
- $s_n = \cos(n)$,
- $s_n = (\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$,
- s_n sequência limitada qualquer.