

6ª Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Séries de Fourier

1. Estendendo as funções abaixo de maneira que sejam 2π -periódicas, calcule a série de Fourier de cada uma delas :

- a) $f(x) = \sin(|x|)$ para $x \in [-\pi, \pi]$ b) $f(x) = x$ para $x \in (-\pi, \pi]$
 c) $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$ d) $f(x) = \sin(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$
 e) $f(x) = x^2$ para $x \in [-\pi, \pi]$ f) $f(x) = \sin(x) + \cos(x) + 0.5 \sin(3x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$
 g) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 0 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 0 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$
 i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ x & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$ j) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$

2. Para cada função do exercício anterior diga para onde convergem as séries de Fourier encontradas, nos pontos $x = -\pi, 0, \pi/2, \pi$. Sugestão: esboce o gráfico de cada uma e busque os pontos de descontinuidade, se eles existirem).

3. Escreva a série de Fourier da função 2π -periódica e ímpar, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções a seguir:

- a) $f(x) = 25$, b) $f(x) = \sin(x)$, c) $f(x) = x$, d) $f(x) = \cos(x)$.

4. Escreva a série de Fourier da função 2π -periódica e par, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções do exercício 3. Compare os resultados.

5. Verifique através da série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

6. Utilize a série de Fourier do exercício anterior para encontrar a série de Fourier de

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} & \text{para } x \in (0, \pi] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} & \text{para } x \in (-\pi, 0] \end{cases}.$$

7. Resolva a equação do calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) & \text{para } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

sendo $f(x)$ cada uma das funções do exercício 3 (use os resultados do exercício).

8. Resolva a equação do calor nos casos do exercício anterior, substituindo a condição de extremos a temperatura constante $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$, pela condição de extremos isolados $u_x(0, t) = 0 = u_x(\pi, t)$ (use os resultados do exercício 4)

9. Para os problemas nos dois exercícios acima, para onde converge a solução quando $t \rightarrow \infty$? Compare os resultados.

discuta a convergência uniforme de $u(x, 0)$, $u(x, 1)$ e $u_x(x, 1)$.

10. a) Calcule a solução estacionária (isto é, com $w_t = 0$) de:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ w(0, t) = -1, \quad w(\pi, t) = 1 & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases} .$$

b) Use o resultado em a) para encontrar a solução dos problemas de Cauchy abaixo: (sugestão: escreva $u = w + v$ e escreva o problema para v)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = -1, \quad u(\pi, t) = 1 & \text{para } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = 1 & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases} \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = -1, \quad u(\pi, t) = 1 & \text{para } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = 1 - x & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases} .$$

c) Nestes dois problemas, para onde a solução vai quando $t \rightarrow \infty$?

Algumas séries de Fourier

a) $f(x) = |\sin(x)| \quad : \quad S_f = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$

b) $f(x) = |x| \quad \text{em } x \in [-\pi, \pi]: \quad S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases} \quad : \quad S_f = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$

d) $f(x) = \sin^2(x) \quad : \quad S_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

e) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \sin^2(x) \quad \text{em } [-\pi, \pi]: \quad S_f = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)}$

f) $f(x) = x \quad \text{em } x \in [-\pi, \pi]: \quad S_f = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$