A1 Lembretes/preliminares

A1.1 Indução

Princípio de Indução (fraca)
Seja $U \subseteq \mathbb{N}$ ([1]) com as propriedades:

- $1 \in U$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $k \in U$ então $k+1 \in U$".

Então $U = \mathbb{N}$.

Princípio de Indução (fraca) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Etapas de uma prova por indução (fraca):

- Provar o **caso base** p(1).
- Provar o **passo de indução**:
  - assumir a **Hipótese de indução** $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
  - provar $p(k+1)$ usando apenas $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
- Concluir pelo princípio de indução.

[1] Neste curso o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é entendeido como $\{1, 2, 3, 4, ...\}$: para incluír o 0 escreveremos $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Princípio de Indução (forte) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(1)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Variantes (outro ponto inicial)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(n_0)$ é verdade,
- $\forall\, k \geq n_0$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".
  (ou "se $p(n_0)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".).

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \geq n_0$.

Exemplo A1.1. Afirmação:

$$p(n) \;=\; \text{"} \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 \text{ "}$$

- caso base: vale pois $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = 1(1+1)/2$.
- passo de indução:
  - assumimos que para certo k vale $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$
  - calculemos

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = k+1+\sum_{i=1}^{k} i =!! = k+1+k(k+1)/2 = \tag{A1.1}$$

$$= (k+1)(k+1+1)/2 \tag{A1.2}$$

★

A1.2 Definição de inf, sup

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos

- **supremo de A**: $\boxed{S := \sup\, A}$ é o menor $S \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq a$ para todo $a \in A$;
  quando A não for limitado superiormente diremos $sup(A) = +\infty$
- **ínfimo de A**: $\boxed{I := \inf\, A}$ é o maior $I \in \mathbb{R}$ tal que $I \leq a$ para todo $a \in A$;
  quando A não for limitado inferiormente diremos $inf(A) = -\infty$

Para indicar inf e sup de imagens, se usa escrever $\boxed{\inf_{x\in D} f(x)}$ (para indicar $\inf\{f(x) : \ x \in D\}$)

Exemplo A1.2.

$$\inf(0,1) = \inf[0,1] = 0; \qquad \inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathbb{N} = \infty;$$
$$\inf\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} = 0;$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} x^2 - x = -1/4; \qquad \inf_{x\in\mathbb{Z}} x^2 - x = 0.$$

★ ★

A1.3 Definição de ponto de acumulação

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dizemos que
x_0 é ponto de acumulação de A se

$$\forall\, \delta > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ com } \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0} \text{ tal que } |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$$

Exemplo A1.3.

- 1 é p.d. acum de $(0,1)$ e também de $[0,1]$
- 0 é p.d. acum de $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação
- $(0,1/2)$ é ponto de acumulação do gráfico de $\sin(1/x)\,|_{x>0}$

★ ★

A2 Sequências numéricas

Sequências são funções de domínio $\mathbb{N}$ (ou subconjuntos de $\mathbb{N}$, ou de $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

Usamos diferentes notações:

$$a : N \to A : n \mapsto a(n) = a_n; \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo A2.1.

- $a_n = n$;
- $a_n = \frac{1}{n}$;
- $a_n = (-1)^n$;
- $a_n = \log(n-2)$;
- $a_n = 2^n$;
- $a_n = \ln(1+n)$;
- $a_n = (\cos(n), \sin(n))$;

Graficos em Geogebra

★

A2.1 Definições (análogas a funções)

- **Imagem** é o conjunto $\{a \in A : \exists n \in N : a_n = a\}$.
- **Gráfico** é o conjunto $\{(n, a) \in N \times A : a = a_n\}$.
- é **limitada** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\|a_n\| < L$ para todo $n \in N$.

Se o contradomínio é $\mathbb{R}$ dizemos que a seq. é

- **limitada superiormente** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < L$ para todo $n \in N$.
- **limitada inferiormente** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > L$ para todo $n \in N$.
- **limitada** se valem ambas.

- **crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \leq a_k$.
- **estritamente crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n < a_k$.
- **decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \geq a_k$.
- **estritamente decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n > a_k$.
- **monótona** se vale uma das anteriores.

A2.2 Limites de sequências

Para sequências, apenas faz sentido a noção de limite para $n \to \infty$, definido como para funções:

Se $a : N \to \mathbb{R}$ (com $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ não limitado)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ significa[2]

$$\forall\, \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{a_n} - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{a_n} > \mathbf{M}$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ significa

$$\forall\, \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{a_n} < \mathbf{M}$$

Definições específicas para sequências:

- seq. **convergente**: se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ existe e é finito
- seq. **divergente**: se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ é infinito ($+\infty$ ou $-\infty$)
- seq. **oscilante**: se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ não existe nem é infinito
- seq. **não convergente**: se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ não existe ou é infinito

---

- dizemos que uma propriedade vale **definitivamente** em uma sequência se

$$\exists\, \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que se } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ então } \textbf{a propriedade vale}$$

- dada uma sequência a de domínio $\mathbb{N}$, seja $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : k \mapsto n_k$ uma seq. estritamente crescente, então a seq. composta

  $a \circ n : k \mapsto a_{n_k}$ é dita subsequência de a

[2]Se a seq. é a valores em $\mathbb{R}^k$ então a definição fica análoga com $L \in \mathbb{R}^k$ e a norma no lugar do módulo.

A2.2.1 Cálculo de limites

Propriedades: valem todas as propriedades dos limites a infinito de funções de variável real (limite da soma, do produto, da razão, da composta, teoremas de unicidade do limite, de conservação do sinal, de comparação e confronto).

Veja aqui e aqui.

CUIDADO: a regra de l'Hôpital não faz sentido para sequências!!

> Um exemplo:
>
> **Teorema A2.2 [de confronto].**
> Considere sequências $f, g, h : N \to \mathbb{R}$. Se $f_n \leq g_n \leq h_n$ definitivamente e
> $$\exists \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} h_n = L\,,$$
> **então** $\exists \lim_{n\to\infty} g_n = L$ $\triangleleft$

Exemplo A2.3 (Sequência geométrica).

$$q^n : \begin{cases} \to 0 & se\ q = 0, \\ \to 1 & se\ q = 1, \\ oscila & se\ q = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \to \infty & se\ q > 1, \\ \to 0 & se\ q \in (-1, 1), \\ oscila & se\ q \leq -1, \end{cases} \qquad \bigstar$$

Relação com funções: [3]

Teorema A2.4. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}^k$ com $\mathbb{N} \subseteq D_f$ e $a_n := f(n) : \ n \in \mathbb{N}$.*
Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ **então** $\exists \ \lim_{n\to\infty} a_n = L$ $\triangleleft$

> NOTA: não vale a volta: considere $f(x) = \cos(2\pi x)$ e $a_n = f(n)$: assim $\exists \ \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ enquanto $\nexists \ \lim_{x\to\infty} f(x)$

Porém vale

Teorema A2.5. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, então:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se e só se

para toda seq. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f \setminus \{x_0\}$ *tal que* $x_n \to x_0$ *vale* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

$\triangleleft$

Em particular

Teorema A2.6. *A sequência a_n converge a L* *se e só se* *toda sua subsequência converge a L*

$\triangleleft$

[3]Todas as afirmações aqui valem também se o limite é $\pm\infty$ no lugar de L.

A2.3 Propriedades novas

- Sequências convergentes são limitadas;
- o limite independe dos "primeiros termos": se mudarmos um número finito de termos o limite não muda.
- Se a_n é uma sequência crescente então ela converge ou diverge a $+\infty$ (não pode oscilar); *
  além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.
- Se a_n é uma sequência decrescente então ela converge ou diverge a $-\infty$ (não pode oscilar); *
  além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

  (* Vale também se for apenas definitivamente crescente / decrescente).
- Em particular, **sequências monótonas e limitadas são convergentes**.

O número e

Considere $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ e $\boxed{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$:
Vale:

- $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- a_n é crescente, b_n é decrescente (parte difícil!);
- logo ambas são limitadas e convergem;
- $b_n - a_n = a_n/n \to 0$, logo o limite é o mesmo.

O limite obtido é o $\boxed{\text{número de Nepero } e}$.

A2.4 Sequências definidas por recorrência

Dizemos que um sequência é **definida por recorrência** quando são dados alguns termos iniciais e uma regra para gerar os seguintes.

Exemplo A2.7.
$a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$
$a_1 = 1, \qquad a_n = 2na_{n-1} + n^2$ para $n \geq 2$
$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$ ★

Possíveis métodos de resolução

- **Método de iteração**: calcular alguns ternos $-->$ chutar uma formula fechada $-->$ verificar a fórmula por indução.
- Para as "lineares a coef. constantes":

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + ... + C_r a_{n-r} + g(n)$$

  existe uma teoria, (veja aqui, pp5-7; compare com a teoria das EDOs lineares a coef. constantes!).
- Recorrência do tipo $a_n = f(a_{n-1})$ podem ser estudadas através do gráfico de $f(x)$: veja Recorrências em Geogebra.

A2.5 Limite superior e inferior

Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definimos:

- $\boxed{\overline{a_n}} := \sup_{k \geq n} a_k$;
- $\boxed{\underline{a_n}} := \inf_{k \geq n} a_k$.

Então $\underline{a_n} \leq \overline{a_n}$, $\overline{a_n}$ é decrescente, $\underline{a_n}$ é crescente, em particular

$$\underline{a_1} \leq \underline{a_2} \leq \underline{a_3} \ldots \leq \ldots \overline{a_3} \leq \overline{a_2} \leq \overline{a_1} \,.$$

Definimos

- $\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$: **limite superior** (Ls) de a_n .
- $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$: **limite inferior** (Li) de a_n .
- Se a seq. ainda é limitada por cima podemos definir igualmente o $\limsup$ (resp, o $\liminf$ se é limitada por baixo);
  se a sequência não é limitada por cima dizemos $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
  se a sequência não é limitada por baixo dizemos $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Valem as seguintes afirmações (se Li, Ls finitos):

- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies a_n \leq Ls + \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies Li - \varepsilon \leq a_n$.

Teorema A2.8. *Dada uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, temos que*

- $\boxed{\textit{existe } \lim_{n\to\infty} a_n = L}$ *se e só se* $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L}$
- *Se a_{n_k} é uma subsequência de a_n então*

$$Li = \liminf a_n \leq \liminf a_{n_k} \leq \limsup a_{n_k} \leq \limsup a_n = Ls \,.$$

  Logo se uma subsequências é convergente, seu limite L satisfaz $L \in [Li, Ls]$.

- *Existe uma subsequência que converge a Ls e uma que converge a Li.* $\triangleleft$

APLICAÇÃO

Teorema A2.9 [Teorema de Bolzano-Weiestrass].

v1 Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, sempre existe uma sub-sequência convergente.

v2 Todo conjunto infinito e limitado em $\mathbb{R}^k$ possui um ponto de acumulação.

$\triangleleft$

A2.6 Sequências de Cauchy

Dada uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, dizemos que é uma **sequência de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0\text{: } p, m > H \implies |a_p - a_m| < \varepsilon$$

Teorema A2.10.

- *Toda seq. de Cauchy é limitada;*
- *uma sequência é convergente se e só se é de Cauchy.*

$\triangleleft$

Exercício A2.11. Considere a sequência $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\displaystyle\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

Conclua que a_n diverge. ★

Conteúdo

Lista dos teoremas