B1 Séries numéricas

Dada uma sequência a_n, chamamos **série** associada à a_n a soma dos termos da sequência:

- $S_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ é dita **sequências das somas parciais** da série
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} S_k$ é dita **Série** associada à a_n

Classificamos o **caráter** da série em:

- **convergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ existe e é finito
- **divergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ é infinito ($=\infty$ ou $-\infty$)
- **oscilante**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ não existe nem é infinito
- **não convergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ não existe ou é infinito

---

Exemplo B1.1.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

★

Exemplo B1.2 (Série geométrica).

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} \to 1\ ^{1} & se\ q=0, \\ div\ a +\infty & se\ q=1, \\ oscila & se\ q=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ a +\infty & se\ q>1, \\ \to \frac{1}{1-q} & se\ q\in(-1,1), \\ oscila & se\ q\le -1. \end{cases}$$

★

Exercício B1.3 (Teorema da contração). Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é continua e satisfaz $|f(x)-f(y)| \le \lambda|x-y|$ para um $\lambda\in(0,1)$ e todo $x,y\in\mathbb{R}$, então existe um ponto fixo $z\in\mathbb{R}$ tal que $f(z)=z$.
Em particular, uma sequência definida por $a_{n+1}=f(a_n)$ com qualquer $a_0\in\mathbb{R}$ converge a z. ★

[1] Por comodidade, faremos sempre a definição $0^0 := 1$. A motivação é que desta forma a função x^0 torna-se bem definida e contínua em $\mathbb{R}$.

B1.1 Algumas propriedades simples

Usando propriedade dos limites, quando não for uma indeterminação, vale

- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right)$
- $\displaystyle\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$
- CUIDADO: não vale $\displaystyle\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n)$

O caráter da série não muda

- multiplicando por $\lambda \neq 0$
- modificando um número FINITO de termos

Teorema B1.4 [Cond necessária para convergência].

- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \textit{ converge}}$ *se e só se*

  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \textit{ existe } H > 0\text{: } p > q > H \implies \left|\displaystyle\sum_{n=q+1}^{p} a_n\right| < \varepsilon}$

- *em particular,* *se* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge então* $a_n \to 0$

  (se $a_n \not\to 0$ *então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *não converge)*

◁

B2 Séries a termos positivos

Nesta seção consideraremos sempre **séries a termos positivos**, ou seja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ com $a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \geq 0$.

Observação B2.1. Se $a_n \geq 0$ então $S_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ é crescente, logo $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **converge ou diverge a** $+\infty$ (não pode oscilar). ★

Teorema B2.2 [Confronto]. *Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq n_0$, vale:*

- *se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge e*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

- *se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.* ◁

Corolário B2.3 [Confronto assintótico]. *Sejam $a_n, b_n \geq 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ têm o mesmo caráter.*

Além disso:

– se $L = 0$ então $a_n \leq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema B2.2;

– se $L = \infty$ então $a_n \geq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema B2.2. ◁

Exercício B2.4. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, usando a convergência da série (telescópica) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. ★

Exemplo B2.5.

- Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge deduzimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge se $\alpha \leq 1$.
- Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge deduzimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha \geq 2$.
- ...por enquanto não podemos dizer nada para $\alpha \in (1, 2)$... ★

B2.1 Critérios da razão e da raiz

Observação B2.6.

- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. ★

Exercício B2.7. Discuta a convergência das sequências $\frac{3^n}{n!}$ e $\frac{n^n}{n!}$. ★

Teorema B2.8 [Critério da razão].

- *Se* $a_n > 0$ *e* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ *(definitivamente) então* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge.*
- *Se* $a_n > 0$ *e* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$ *(definitivamente) então* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *diverge.* ◁

Teorema B2.9 [Critério da raiz].

- *Se* $a_n \geq 0$ *e* $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ *(definitivamente) então* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge*
- *Se* $a_n \geq 0$ *e* $\sqrt[n]{a_n} \geq Q > 1$ *(definitivamente) então* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *diverge* ◁

CUIDADO: no caso $q = 1$ não temos conclusão

Corolário B2.10. *Sejam* $a_n \geq 0$.

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ *ou* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ *então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge*

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Q > 1$ *ou* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = Q > 1$ *então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *diverge* ◁

Exercício B2.11. Discuta a convergência das séries

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$,

onde $r > 0$ e $p > 0$. ★

Exercício B2.12. Discuta a convergência das séries

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2e^n}{(2n)!}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+3\cos(n)}{15}\right)^{n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+3\cos(n)}{12}\right)^{n}$

★

B2.2 Critério do confronto integral

Observação B2.13 (confronto integral). Dada uma sequência a_n, seja $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto a_{[[x]]}$; [2] $\boxed{\text{então } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx}$

Isso permite discutir o caráter de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ usando os critérios para integráis impróprios. ★

Corolário B2.14. *Seja $f : [n_0, \infty] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$, f é contínua e decrescente.*

Se $a_n := f(n)$, então $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \textit{ tem o mesmo caráter de } \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx}$ ◁

Exercício B2.15. Sabendo que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge quando $\alpha \in (1, 2)$, deduzimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $a \in (1, 2)$.

O que podemos dizer da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ com $\alpha, \beta > 0$? ★

[2] Denotamos por $[[x]]$ a parte inteira de x.

B3 Séries a termos gerais

Nesta seção consideraremos séries mais gerais, sendo os elementos a_n em $\mathbb{R}$, ou até em $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$, ...

Definição B3.1. Dado um real x definimos

$$x^+ = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} \qquad\qquad x^- = \begin{cases} 0 & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Assim $x^+, x^- \geq 0$ e vale

$$x = x^+ - x^- \,, \qquad\qquad |x| = x^+ + x^- \,. \qquad \bigstar$$

Teorema B3.2 [Conv. absoluta].
Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ também converge, além disso vale

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \qquad \triangleleft$$

Dizemos que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é

- absolutamente convergente quando ela converge e $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ também converge (neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ convergem)
- condicionalmente convergente quando ela converge mas $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ diverge (neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ divergem)

Exemplo B3.3. Analise, com o critério acima, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

nos cinco casos

- $s_n = (-1)^n$
- $s_n = \cos(2\pi n/30)$,
- $s_n = \cos(n)$,
- $s_n = (\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$,
- s_n sequência limitada qualquer. $\bigstar$

Teorema B3.4 [Critério de Leibnitz]. *Seja* $a_n = (-1)^n b_n$ *onde*

- $b_n \geq 0$, • b_n *decrescente*, • $b_n \to 0$.

Então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge.*

Além disso, a sequencia das somas parciais S_k *e a série* S *satisfazem*

$$|S - S_k| \leq b_{k+1} \qquad S - S_k \begin{cases} \geq 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \leq 0 & \text{se } k \text{ é par} \end{cases} \qquad \triangleleft$$

Exemplo B3.5. Reveja as séries do exemplo B3.3.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge para todo $a > 0$ ★

Teorema B3.6 [Critério de Dirichlet]. *Seja* $a_n = s_n b_n$ *onde*

- $b_n \geq 0$, • b_n *decrescente*, • $b_n \to 0$,
- *Existe* $M > 0$: $\displaystyle\left|\sum_{n=n_0}^{k} s_n\right| \leq M$ *para todo* $k \geq n_0$.

Então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge.*

Além disso, a sequencia das somas parciais T_k *e a série* T *satisfazem* $|T - T_k| \leq 2M\, b_{k+1}$ $\triangleleft$

Exemplo B3.7. Reveja as séries do exemplo B3.3.

Note que como $\cos(2\pi n/30) = -\cos(2\pi(n+15)/30)$, temos que $\sum_{n=1}^{30} \cos(2\pi n/30) = 0$ e logo $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{k} \cos(2\pi n/30)\right| \leq 30$

Note que $\cos(n) = Re(e^{in})$ e $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{k} e^{in}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(k+1)}}{1 - e^{i}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i}|}$

★

B3.1 Comutação dos termos de uma série

Teorema B3.8. *Toda série* $\boxed{\textit{a termos positivos}}$ *ou* $\boxed{\textit{absolutamente convergente}}$ *mantém o caráter e a soma mesmo reordenando seus termos.*

Reordenando os termos de uma série $\boxed{\textit{condicionalmente convergente}}$ *podemos obter qualquer soma, e qualquer caráter*. $\triangleleft$

Exemplo B3.9. Podemos definir a soma dos conjuntos de reais a seguir (sem que seja definida uma ordem para somar)?

- $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\pm\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ★

B4 Algo sobre complexos

Um **número complexo** pode ser associado a uma dupla de reais, usaremos a seguinte notação:

$$z \in \mathbb{C}: \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Definimos:

$$\textbf{soma}: \qquad (x+iy) +_{\mathbb{C}} (X+iY) := (x+X) + i(y+Y)$$

$$\textbf{produto}: \qquad (x+iy) \cdot_{\mathbb{C}} (X+iY) := (xX - yY) + i(Xy + xY)$$

Desta forma o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um **corpo**.

Podemos identificar os complexos $x + i0$ com os reais.
Os complexos $\pm i$ são raízes do real -1.

Frequentemente é útil representar um complexo na forma polar:

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = arg(z) = (2k\pi +) \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Produto na forma polar:

$$[\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))] \cdot [\sigma(\cos(\phi) + i\sin(\phi))] = [\rho\sigma(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))]$$

Potência na forma polar

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Também podemos definir $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$: esta função exponencial possui as mesmas propriedades da sua versão real!

desta forma $z = \rho e^{i\theta}$ e $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Conteúdo

Lista dos teoremas