

D1 Séries de potências

Chamamos **Série de potências (SDP) de centro x_0** uma série da forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (\text{D1.1})$$

onde a_n é uma sequência de reais ou complexos.

OBS Por convenção (deixa as fórmulas mais simples) consideramos $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$; também definimos $0! = 1$

Observação D1.1. A série (D1.1)

- sempre converge em x_0 , ao valor a_0
- se converge em $\bar{x} \neq x_0$ então converge (absolutamente) para todo x t.q. $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$
- se não converge em $\bar{x} \neq x_0$ então não converge para todo x t.q. $|x - x_0| > |\bar{x} - x_0|$ ★

Teorema D1.2. Para a série de potências (D1.1) vale uma das três possibilidades:

- (1) a série converge apenas em x_0
- (2) a série converge (absolutamente) em todo \mathbb{R} (ou em todo \mathbb{C})
- (3) $\exists R > 0$ tal que a série
 - converge (absolutamente) se $|x - x_0| < R$
 - não converge se $|x - x_0| > R$ ◁

- R é dito **raio de convergência** da série de potências, (pondo $R = 0$ no caso (1) e $R = \infty$ no caso (2))
- Para séries a valores em \mathbb{R} , o conjunto de convergência é sempre um intervalo (**intervalo de convergência, IC**), que pode ser
 - (1) um ponto,
 - (2) todo \mathbb{R} ,
 - (3) um intervalo centrado em x_0 de raio R , que pode incluir ou não os extremos

- Para séries a valores em \mathbb{C} , o conjunto de convergência é sempre um círculo (**círculo de convergência, CC**), que pode ser
 - (1) um ponto,
 - (2) todo \mathbb{C} ,
 - (3) um círculo centrado em x_0 de raio R , que pode incluir ou não os pontos na fronteira

Exemplo D1.3.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $R = \infty$, $C = \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, $R = 0$, $C = \{0\}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, $R = 1$, $C = [-1, 1)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $R = 1$, $C = [-1, 1]$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, $R = 1$, $C = (-1, 1)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$, $C = (-1, 1)$. ★

Cálculo do raio de convergência

Teorema D1.4 [Critério da raiz].

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \triangleleft$$

Teorema D1.5 [Critério da razão].

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (\text{se existir}) \quad \triangleleft$$

D1.1 Convergência uniforme - continuidade

Teorema D1.6. A série de potências (D1.1) converge uniformemente em todo conjunto fechado e limitado contido em $\{x : |x - x_0| < R\}$. △

Teorema D1.7 [de Abel]. Se a série de potências (D1.1) converge em \bar{z} com $|\bar{z} - x_0| = R$ então converge uniformemente em todo o segmento $\{x_0 + \tau(\bar{z} - x_0) : \tau \in [0, 1]\}$. △

Corolário D1.8. Uma Série de potências é sempre contínua onde converge △

D1.2 Integração e derivação de SDP

Teorema D1.9. A série de potências (D1.1) é integrável em todo $[a, b] \subseteq IC$ e valem

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}),$$

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

esta última é uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC maior!)

◁

Teorema D1.10. A série de potências (D1.1) é derivável em todo $\{x : |x - x_0| < R\}$ e vale

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!)

◁

Corolário D1.11. A série de potências (D1.1) é infinitas vezes derivável em todo $\{x : |x - x_0| < R\}$ e vale

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!)

◁

Observação D1.12. Valem resultados análogos em \mathbb{C} , mas precisaria definir derivada e integral em \mathbb{C} ... ★

D1.3 Unicidade de SDP

Teorema D1.13. *Se a série de potências (D1.1) tem $R > 0$ e vale $S \equiv 0$ em uma vizinhança de x_0 , então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Se duas séries de potências têm $R > 0$ e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \quad (\text{D1.2})$$

em uma vizinhança de x_0 , então $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ◁

Exemplo D1.14. Manipulando a partir de séries conhecidas, podemos escrever várias funções conhecidas como SDP:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad em \mathbb{R} \quad (D1.3)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em \mathbb{R} \quad (D1.4)$$

$$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em \mathbb{R} \quad (D1.5)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em \mathbb{R} \quad (D1.6)$$

$$Ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em \mathbb{R} \quad (D1.7)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad em (-1, 1) \quad (D1.8)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad em (-1, 1] \quad (D1.9)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad em (-1, 1) \quad (D1.10)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad em [-1, 1] \quad (D1.11)$$

★

Graficos em Geogebra

outros:

$\sin(x)$ com $T^1, T^3, T^5, T^7, T^{13}$

$\ln(x)$ com T^1, T^4, T^7, T^{10}

zoom $\ln(x)$ com $T^1, T^4, T^7, T^{10}, T^{13}$

Exemplo D1.15. As séries acima podem ser usadas para aproximar valores transcendententes:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$\pi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} \right]$$



D2 Funções analíticas

Notação: para um $\delta > 0$, denotamos por $V_\delta(x_0)$ a vizinhança de raio δ do ponto x_0 .

Note: em \mathbb{R} isto seria o intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; em \mathbb{C} seria o círculo aberto centrado em x_0 de raio δ .

Teorema D2.1 [P.d.T. com resto de Lagrange].

Se, para um $\delta > 0$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(V_\delta(x_0))$, **então dado $x \in V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ existe $c_x \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ (resp. $c_x \in (x, x_0)$ se $x < x_0$) tal que**

$$f(x) - T_{f,x_0}^k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

onde

$$T_{f,x_0}^k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem k , da função f , no ponto x_0 .**

Veja a teoria sobre polinômios de Taylor [Aqui: p7...](#)

◁

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$ posso escrever a **Série de Taylor** de f em volta de x_0

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Teorema D2.2. *Se a série de potências $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge em $(x_0 - R, x_0 + R)$, então $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$*

Ou seja, se uma f pode ser escrita como SDP centrada em x_0 com raio de convergência positivo, então esta SDP é a T_{f,x_0} .

◁

Observação D2.3. Nem sempre f coincide com sua série de Taylor:

- vimos que $e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ em \mathbb{R} .
- $\frac{1}{1+x} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ em $(-1, 1)$,
mas $\frac{1}{1+x}$ faz sentido em toda a semirreta $(-1, \infty)$.
- $\arctan(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ em $(-1, 1)$,
mas $\arctan(x)$ tem domínio \mathbb{R} .

- $U(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
mas $U = T_{U,0} = 0$ apenas em 0!

★

Definição D2.4. $f \in C^\infty(V_\delta(x_0))$ é dita

- analítica em x_0 se $\exists r$ tal que $f \equiv T_{f,x_0}$ em $V_r(x_0)$.
- analítica, se for analítica em todo ponto do seu domínio.

★

Exemplo D2.5. e^x , $\sin(x)$, $\ln(x)$ ecc.. são analíticas
 $U(x)$ não é analítica em 0.

★

Teorema D2.6 [Cond.suf. para analiticidade]. *Seja $f \in C^\infty(V_\delta(x_0))$: se existem $M, r > 0$ tais que*

$$\sup_{x \in (x_0-r, x_0+r)} |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{r^n}$$

então f é analítica em x_0

◁

Corolário D2.7. *Se $\exists M, \alpha > 0$ tais que a estimativa $|f^{(n)}(x)| \leq M\alpha^n$*

- *vale em vizinhança de x_0 , então f é analítica em x_0*
- *vale em \mathbb{R} então f é analítica em \mathbb{R} e suas T_{f,x_0} convergem em todo \mathbb{R}*

◁

D2.1 Extensão analítica

Dada uma função analítica f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$, suas séries de Taylor T_{f,x_0} ($x_0 \in D$) definem funções de variável complexa no círculos complexos de raio R_{x_0} .

Juntando estas definições podemos estender f a uma vizinhança em \mathbb{C} de D .

Exemplo D2.8. Exponencial complexa:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad em \mathbb{C}$$

logaritmo complexo:

$$\ln(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad em V_1(0)$$

note

$$e^{iy} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i \sin(y)$$

logo

$$e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$



D2.2 Série binomial

A solução do P. de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é $y(x) = (1+x)^\alpha$.

Resolvendo por séries obtemos $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ onde $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ então

$$a_n = \begin{cases} \binom{\alpha}{n} & n \leq \alpha, \\ 0 & n > \alpha, \end{cases}$$

logo a série converge em todo \mathbb{R} pois é apenas um polinômio de ordem α : o conhecido **Binômio de Newton**:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n$$

No caso geral definimos os coeficientes binômiais generalizados como

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

e logo podemos escrever

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{em } (-1, 1),$$

de fato $\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| \rightarrow 1 = R.d.C.$

Exemplo D2.9.

- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ em $(-1, 1)$, onde podemos calcular os primeiros coeficientes: $\binom{1/2}{n} = 1, 1/2, -1/8, 1/16, -5/64, \dots$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$ em $(-1, 1)$, onde podemos calcular os primeiros coeficientes: $\binom{-1/2}{n} = 1, -1/2, -3/8, -5/16, \dots$
- note que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.

- Obtemos também

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \text{ em } (-1, 1)$$

e logo

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ em } (-1, 1).$$



Conteúdo

D1	Séries de potências	D1
D1.1	Convergência uniforme - continuidade	D2
D1.2	Integração e derivação de SDP	D3
D1.3	Unicidade de SDP	D4
D2	Funções analíticas	D7
D2.1	Extensão analítica	D8
D2.2	Série binomial	D10

Lista dos teoremas

D1.1	Observação	D1
D1.2	Teorema (Raio de conv,)	D1
D1.3	Exemplo	D2
D1.4	Teorema (Critério da raiz)	D2
D1.5	Teorema (Critério da razão)	D2
D1.6	Teorema (Conv unif.)	D2
D1.7	Teorema (de Abel)	D2
D1.8	Corolário (Continuidade SDP)	D2
D1.9	Teorema (Integral SDP)	D3
D1.10	Teorema (Derivada SDP)	D3
D1.11	Corolário (Derivadas SDP)	D3
D1.12	Observação	D3
D1.13	Teorema (Unicidade SDP)	D4
D1.14	Exemplo (Várias SDP)	D5
D1.15	Exemplo	D5
D2.1	Teorema (P.d.T. com resto de Lagrange)	D7
D2.2	Teorema (Série de Taylor)	D7
D2.3	Observação	D7
D2.4	Definição (Funç. analítica.)	D8
D2.5	Exemplo	D8
D2.6	Teorema (Cond.suf. para analiticidade)	D8
D2.7	Corolário	D8
D2.8	Exemplo (Exponencial complexa)	D9

D2.9 Exemplo (Séries binomiais) D10