SMA 5826 - ANÁLISE I

Alexandre Nolasco de Carvalho

8 de outubro de 2007

Sumário

Capítulo 1

Preliminares (Exercícios)

Nota. Esta lista de exercícios tem como objetivo recordar fatos elementares que são necessários conhecer e serão assumidos. As soluções desses exercícios podem ser obtidas facilmente lendo as Seções 0.1 a 0.5 do Capítulo 0 de [1].

1.1 Teoria de Conjuntos

1. Se $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família enumerável de conjuntos definimos

$$\limsup E_n := \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \liminf E_n := \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

   Mostre que

   $\limsup E_n = \{x : x \in E_n$ para um número infinito de índices $n\}$ e
   $\liminf E_n = \{x : x \in E_n$ exceto para um número finito de índices $n\}$.

2. Mostre que, se A é um conjunto e $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma família de conjuntos indexada em A, então

$$(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in A} E_\alpha^c \quad \text{e} \quad (\cap_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in A} E_\alpha^c.$$

3. Sejam X, Y conjuntos e $X \times Y$ o seu produto cartesiano. Defina:

   (a) Uma relação de X em Y

(b) Relação de equivalência e classes de equivalência

(c) Relação de ordem parcial

(d) Função

4. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Se $D \subset X$ e $E \subset Y$ definimos
$$f(D) := \{f(x) : x \in D\}$$
$$f^{-1}(E) := \{x \in X : f(x) \in E\}.$$
Se $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{P}(Y)$ denotam o conjunto das partes de X e Y respectivamente, mostre que

(a) $f^{-1}(\cup_{\alpha\in A}E_\alpha) = \cup_{\alpha\in A}f^{-1}(E_\alpha)$, $f^{-1}(\cap_{\alpha\in A}E_\alpha) = \cap_{\alpha\in A}f^{-1}(E_\alpha)$ para qualquer coleção $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(Y)$ e $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$ e $E \subset Y$.

(b) $f(\cup_{\beta\in B}D_\beta) = \cup_{\beta\in B}f(D_\beta)$, para qualquer coleção $\{D_\beta\}_{\beta\in B} \subset \mathcal{P}(X)$.

(c) Não é verdade que $f(\cap_{\beta\in B}D_\beta) = \cap_{\beta\in B}f(D_\beta)$ ou que $f(D^c) = f(D)^c$ para qualquer coleção $\{D_\beta\}_{\beta\in B} \subset \mathcal{P}(X)$ e $D \subset X$.

5. Se $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família de conjuntos o seu produto cartesiano é definido por
$$\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha := \{f : A \to \cup_{\alpha\in A}X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha,\ \forall\alpha \in A\}$$
Se todos os X_α são iguais a um conjunto fixo Y denotamos $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ por Y^A. Reflita sobre as seguintes afirmativas

(a) Se A e Y são não vazios então $Y^A \neq \emptyset$.

(b) Se $A \neq \emptyset$ e $X_\alpha \neq \emptyset$, $\forall\alpha \in A$ então $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha \neq \emptyset$.

1.2 Relações de Ordem

1. Defina relação de ordem parcial e total e mostre que se E é um conjunto qualquer então $\mathcal{P}(E)$ é parcialmente ordenado pela inclusão. Mostre que $\mathcal{P}(E)$ somente é totalmente ordenado pela inclusão se E é vazio ou unitário.

2. Se X é parcialmente ordenado por $\leq$ um elemento maximal de X é um elemento $x \in X$ tal que o único $y \in X$ tal que $x \leq y$ é o próprio x. Defina:

   (a) elemento minimal

   (b) limitante superior e inferior para um conjunto $E \subset X$.

   Mostre que:

   (a) elementos maximais de X, caso existam, não são necessáriamente únicos. Dê um exemplo onde elementos maximais não existam.

   (b) Um subconjunto E de X não precisa ter limitande superior ou inferior.

   (c) Um elemento maximal de E não precisa ser um limitante superior de E a menos que E seja totalmente ordenado.

3. Se X é totalmente ordenado por $\leq$ e todo subconjunto não vazio E de X possui um elemento (necessariamente único) minimal então dizemos que X é *bem ordenado* por $\leq$ e $\leq$ é chamada uma *boa ordem*. Dê exemplos de conjuntos bem ordenados e ordens que não são boa ordem.

4. O Princípio Maximal de Hausdorff diz que

   - *"Todo conjunto parcialmente ordenado tem um subconjunto totalmente ordenado maximal."*

   e o Lemma de Zorn diz que

   - *"Se X é parcialmete ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior, então X tem um elemento maximal."*

   Mostre que o Princípio Maximal de Hausdorff e o Lema de Zorn são equivalentes.

5. Usando o Lema de Zorn, mostre o Princípio da Boa Ordenação (Teorema de Zermello)

    - *"Todo conjunto não vazio X possui uma boa ordem."*

6. Se $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma coleção não vazia de conjuntos não vazios o Axioma da Escolha diz que $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha \neq \emptyset$. Mostre o axioma da escolha a partir do Teorema de Zermello.

1.3 Cardinalidade

Se X e Y são conjuntos não vazios dizemos que

$$\begin{aligned}
&\text{card(X)} \leq \text{card(Y), se existe } f: X \to Y \text{ injetora}\\
&\text{card(X)} \geq \text{card(Y), se existe } f: X \to Y \text{ sobrejetora}\\
&\text{card(X)} = \text{card(Y), se existe } f: X \to Y \text{ bijetora}
\end{aligned}$$

ainda

$$\begin{aligned}
&\text{card(X)} < \text{card(Y), se } \exists\ f: X \to Y \text{ injetora e } \nexists\ f: X \to Y \text{ bijetora}\\
&\text{card(X)} > \text{card(Y), se } \exists\ f: X \to Y \text{ sobrejetora e } \nexists\ f: X \to Y \text{ bijetora}
\end{aligned}$$

e declaramos

$$\text{card}(\emptyset) < \text{card(X) e card(X)} > \text{card}(\emptyset)$$

para todo $X \neq \emptyset$.

1. Mostre que card(X)$\leq$ card(Y) se e somente se card(Y)$\geq$ card(X).

2. Se X e Y são conjuntos quaisquer mostre que ou card(X)$\leq$ card(Y) ou card(Y)$\leq$ card(X).

3. Mostre o Teorema de Schröder-Bernstein

    - *"Se* card(X)$\leq$ card(Y)*e*card(Y)$\leq$ card(X) *então* card(X)$=$ card(Y).

4. Mostre que card(X) $<$ card($\mathcal{P}$(X)).

5. Mostre que:
   (a) Defina conjunto enumerável
   (b) Se X e Y são enumeráveis então $X \times Y$ é enumerável.
   (c) Se A é enumerável e X_α é enumerável para cada $\alpha \in A$ então $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ é enumerável.
   (d) Se X é enumerável e infinito então card(X)=card($\mathbb{N}$).
   (e) $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis
   (f) card($\mathcal{P}(\mathbb{N})$) = card($\mathbb{R}$)=c
   (g) Se card(X)$\geq$ c então X não é enumerável
   (h) Se card(X)$\leq$ c e card(Y)$\leq$ c então card($X \times Y$)$\leq$ c
   (i) Se card(A)$\leq$ c e card(X_α)$\leq$ c $\forall\ \alpha \in A$, então card($\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$)$\leq$ c.
6. Prove o Princípio da Indução Transfinita
7. Mostre que existe um conjunto não enumerável Ω com $I_x = \{y \in \Omega : y < x\}$ enumerável $\forall\ x \in \Omega$. Mostre que se $I \subset \Omega$ é enumerável então, I tem um limitante superior.

1.4 O Conjunto dos Números Reais Estendido

Recorde que se $\{x_n\}$ é um sequência de números reais estendidos e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ então, em $\mathbb{R}^-$, existem os limites

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{k\geq 1}\{\sup_{n\geq k} x_n\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{k\geq 1}\{\inf_{n\geq k} x_n\}$$
$$\limsup_{x\to a} f(x) := \inf_{\delta>0}\left\{\sup_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right\}$$
$$\liminf_{x\to a} f(x) := \sup_{\delta>0}\left\{\inf_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right\}$$

1. Se X é um conjunto arbitrário e $f : X \to [0, \infty]$ definimos
$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup\{\sum_{x \in F} f(x) : F \subset X,\ F \text{ finito}\}.$$
Mostre que se $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$ não é enumerável então $\sum_{x \in A} f(x) = \infty$.

2. Mostre que todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é união enumerável de abertos disjuntos.

Capítulo 2

Espaços Métricos

Primeira Aula (100 minutos) $\downarrow$

2.1 Definições e Propriedades Elementares

Seja X um conjunto. Uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$,
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

é chamada uma *métrica* em X. Um *espaço métrico* consiste de um conjunto X e uma métrica ρ em X. Escreveremos (X, ρ) para indicar o espaço métrico consistindo do conjunto X e da métrica ρ.

Exemplos:

- Se X é um conjunto não vazio qualquer definimos $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ por
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$
A função ρ é uma métrica chamada *métrica discreta* e (X, ρ) é um espaço métrico.

- Se $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$, com $\rho_p(x,y) := \|x-y\|_p$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, e

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ 1 \le p < \infty,$$

$$\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi_i| : 1 \le i \le n\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

  Então $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ é um espaço métrico, $1 \le p \le \infty$.

- Seja

$$\ell_p = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}(\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad 1 \le p < \infty, \text{ e}$$

$$\ell_\infty = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}(\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

  Em ℓ_p, definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \le p < \infty \text{ e } \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

  Se $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \to [0, \infty)$ é definida por $\rho_p(x,y) = \|x-y\|_p$, $1 \le p \le \infty$, então (ℓ_p, ρ_p) é um espaço métrico.

- $C[a,b]$ com a *métrica da convergência uniforme* $\rho(x,y) = \|x-y\|_\infty$, $x, y \in C[a,b]$, e $\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi(t)| : t \in [a,b]\}$ para todo $\xi \in C[a,b]$.

Se (X, ρ) é um espaço métrico temos que:

- $B_r(x) := \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$ é chamado bola aberta de centro em x e raio r.

- Um conjunto $E \subset X$ é dito aberto em (X, ρ) se para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E$.

- Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado em (X, ρ) se F^c (complementar de F) é aberto em (X, ρ).

É fácil provar que

- A união (interseção) qualquer de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).
- A interseção (união) finita de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).

Definimos então

- O *interior* E^o de um conjunto $E \subset X$ é a união de todos os abertos de (X, ρ) contidos em E.
- O *fecho* E^- de um conjunto $E \subset X$ é a interseção de todos os fechados de (X, ρ) contendo E. É claro que E é fechado se e somente se $E = E^-$.
- Um conjunto $E \subset X$ é dito *denso* em X se $E^- = X$ e *nunca denso* se $E^o = \emptyset$.
- Uma seqüência $\{x_n\}$ em (X, ρ) converge para $x \in X$ se $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Proposição 2.1.1. *Se $E \subset X$ temos que, $x \in E^-$ se e somente se qualquer bola aberta centrada em x intersepta E se e somente se existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x.*

Prova: Se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^c$ então $x \in E^{co}$ e como E^{coc} é fechado e contém E temos que $x \notin E^-$. Segue que, se $x \in E^-$, então $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$ então, ou $x \in E$ e podemos tomar $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x \notin E$ e tomamos $x_n \in B_{1/n}(x) \cap E$, $x_n \neq x$, em ambos os casos $\{x_n\}$ converge para x. Se existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x e $x \notin E^-$ então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c}$ e portanto $x_n \in E^{-c}$ para n suficientemente grande o que é um absurdo. Segue que $x \in E^-$. $\square$

Se (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) são espaços métricos, uma função $f : X_1 \to X_2$ é contínua em $x \in X_1$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho_2(f(y), f(x)) < \epsilon$

sempre que $\rho_1(y,x) < \delta$. Dito de outra forma f é contínua em $x \in X_1$ se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$. Diremos simplesmente que f é contínua quando f é contínua para todo $x \in X_1$ e uniformemente contínua se a escolha de δ depende somente de ϵ e não de $x \in X_1$.

Proposição 2.1.2. *Sejam (X_1,ρ_1), (X_2,ρ_2) espaços métricos. Uma função $f : X_1 \to X_2$ é contínua se e somente se imagem inversa $f^{-1}(U)$ de qualquer conjunto aberto U de (X_2,ρ_2) é um conjunto aberto de (X_1,ρ_1).*

Prova: Se f é contínua, U é um aberto de X_2, $y \in f^{-1}(U)$ e $\epsilon > 0$ é tal que $B_\epsilon(f(y)) \subset U$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(y)) \supset B_\delta(y)$. Logo y é interior a $f^{-1}(U)$. Isto mostra que $f^{-1}(U)$ é aberto. Por outro lado, se $f^{-1}(U)$ é aberto em (X_1,ρ_1) sempre que U é aberto em (X_2,ρ_2), $x \in X_1$ e $\epsilon > 0$, temos que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ é aberto e contém x. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ e f é contínua em x. Logo f é contínua para todo $x \in X_1$. $\square$

2.2 Espaços Métricos Completos

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Uma seqüência $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ é dita uma *seqüência de Cauchy* se $\rho(x_n,x_m) \to 0$ quando $m,n \to \infty$. Um conjunto $E \subset X$ é dito *completo* se toda seqüência de Cauchy em E é convergente e seu limite pertence a E

Exemplos:

- (X,ρ) onde X é um conjunto não vazio e ρ é a métrica discreta em X.
- Em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $\mathbb{R}^n$ é completo enquanto que $\mathbb{Q}^n$ não é completo.
- $X = (0,1)$ com a métrica usual não é completo.
- A proposição a seguir mostra que $X = [0,1]$ com a métrica usual é completo.

- $C[a,b]$ com a métrica da convergência uniforme é completo.
- ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço métrico completo.

Mostramos apenas que ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, é completo deixamos a verificação dos demais fatos como exercício.

Se $\{x^n\}$ é uma seqüência de Cauchy em ℓ_p, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^p < \epsilon^p, \quad \forall m,n > N.$$

Segue que $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e portanto convergente. Seja $x_i := \lim_{n\to\infty} x_i^n$. A seqüência $x = \{x_i\}$ é o candidato a limite da seqüência $\{x^n\}$. Mostremos que isto de fato ocorre. Se $n > N$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon + \|x^n\|_p.$$

Isto nos permite concluir que $x = \{x_i\} \in \ell_p$. Além disso, como para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n > N$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

temos que $\|x^n - x\|_p \leq \epsilon$ para todo $n > N$. Segue que $x^n \to x$ em ℓ_p.

Proposição 2.2.1. *Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.*

Proof: Se (X,ρ) é um espaço métrico completo, $E \subset X$ é fechado e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em E temos que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in X$. Pela Proposição 2.1.1 segue que $x \in E$ e E é completo.

Se por outro lado E é um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer (X, ρ) e $x \in E^-$ temos pela Proposição 2.1.1 que existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E que converge para x. Segue do fato que toda seqüência convergente é de Cauchy que $x \in E$. Isto mostra que E é fechado. □

2.3 Contrações e Aplicações

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração em X se existe κ, $0 < \kappa < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leq \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 2.3.1 (Princípio da Contração de Banach)**.** *Se X é um espaço métrico completo e T é uma contração em X então T tem um único ponto fixo.*

Prova: Vamos primeiramente provar que T tem no máximo um ponto fixo. Se x e y são pontos fixos de T, temos que

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \kappa\rho(x, y)$$

e portanto $x = y$.

Vamos agora mostrar a existência. Seja $x \in X$ e considere a *órbita* de x

$$\{x, Tx, T^2x, \cdots\}.$$

Mostremos que $\{T^nx\}$ é uma seqüência de Cauchy. De fato:

$$\begin{aligned}\rho(T^{n+p}x, T^nx) &\leq \kappa\rho(T^{n+p-1}x, T^{n-1}x) \leq \cdots \leq \kappa^n\rho(T^px, x)\\ &\leq \kappa^n[\rho(T^px, T^{p-1}x) + \cdots + \rho(Tx, x)]\\ &\leq \kappa^n[\kappa^{p-1}\rho(Tx, x) + \cdots + \rho(Tx, x)]\\ &\leq \kappa^n[\kappa^{p-1} + \cdots + 1]\rho(Tx, x) \leq \tfrac{\kappa^n}{1-\kappa}\rho(Tx, x)\end{aligned}$$

e como $\kappa < 1$ temos que $\{T^nx\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente para algum $x_0 \in X$. Mostremos que x_0 é um ponto fixo de T. De fato:

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} T^nx = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = x_0.$$

□

Primeira Aula (100 minutos) ↑

Segunda Aula (100 minutos) $\downarrow$

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_i) \in D,\ i = 1, 2.$$

Assuma ainda que f é contínua.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.1}$$

Se $(t_0, x_0) \in D$, uma solução local de (2.1) passando por (t_0, x_0) é uma função contínuamente diferenciável φ definida em um intervalo I, contendo t_0 em seu interior, tal que $\varphi(t_0) = x_0$, $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Teorema 2.3.2 (Picard)**.** *Se f é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial* (2.1) *possui uma única solução local por* (t_0, x_0).

Prova: É fácil ver que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (2.1) por (t_0, x_0) se e somente se φ é uma função contínua definida em um intervalo I contendo t_0 em seu interior satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2.2}$$

Seja $D' \subset D$ um aberto contendo (t_0, x_0) tal que f é limitada em D'; isto é, $|f(t, x)| \leq A$, $\forall (t, x) \in D'$.

Seja $d > 0$ tal que

- $R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^- \subset D'$
- $Md < 1$.

Se $J =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi : J \to \mathbb{R}^n : \psi \text{ é contínua},\ \psi(t_0) = x_0 \text{ e } |\psi(t) - x_0| \leq dA,\ \forall t \in J\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(J, \mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo. Seja $T : \mathcal{B} \to C(J, \mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad t \in J, \ \psi \in \mathcal{B}. \tag{2.3}$$

Mostremos que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e que T é uma contração. De fato: Se $\psi \in \mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0) = (x_0)$ e

$$|(T\psi)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s))|dt \right| \leq dA, \quad \forall t \in J,$$

mostrando que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Ainda, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ temos que, $\forall t \in J$,

$$\begin{aligned} |(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))|ds \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^{t} |\psi_1(s) - \psi_2(s)|ds \right| \leq Md\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty, \end{aligned}$$

mostrando que T é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach, Teorema (2.3.1), que T tem um único ponto fixo e que (2.1) tem uma única solução por (t_0, x_0). □

2.4 Completamento

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) dois espaços métricos. Uma transformação $T : X \to Y$ é dita uma isometria se para todo $x, x' \in X$ temos que

$$\sigma(Tx, Tx') = \rho(x, x').$$

Neste caso dizemos que (X, ρ) pode ser imerso em (Y, σ). Os espaços métricos (X, ρ) e (Y, σ) são ditos isomorfos se T é sobrejetora.

Seja (X, ρ) um espaço métrico qualquer. Vamos construir um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ a partir de (X, ρ), tal que (X, ρ) pode ser densamente imerso em $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$. Assumiremos que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Seja $\mathcal{X}$ o conjunto das seqüências de Cauchy em X e seja $\sim$ a seguinte relação de em $\mathcal{X}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \rho(x_n, y_n) \to 0.$$

Lema 2.4.1. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência*

Prova: Para provar que $\sim$ é uma relação de equivalência, primeiramente observamos que claramente

i) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ para todo $\{x_n\}$ em $\mathcal{X}$ e

ii) $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ implica $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$.

Resta apenas verificar que se

iii) Se $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in \mathcal{X}$, $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{z_n\}$ então $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Isto segue do fato que $\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$. □

Se $\tilde{x} \subset \mathcal{X}$ denota a classe de equivalência de $x = \{x_n\} \in \mathcal{X}$ temos que $\mathcal{X}$ é união disjunta dessas classes de equivalência. O conjunto das classes de equivalência de elementos de $\mathcal{X}$ é denotado por $\tilde{\mathcal{X}}$.

Note que, se $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$, então, $\{\rho(x_n, y_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais pois

$$\begin{aligned} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| &\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| + |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, x_m). \end{aligned}$$

Segue do fato que $\mathbb{R}$ é completo que $\{\rho(x_n, y_n)\}$ é convergente.

Definimos $\tilde{\rho} : \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}} \to [0, \infty)$ por

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n),$$

onde $\{x_n\} \in \tilde{x}$ e $\{y_n\} \in \tilde{y}$. Antes de seguirmos em frente é preciso verificar que este limite não muda quando $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são substituídos outros elementos de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, respectivamente. Basta notar que $\rho(x'_n, y'_n) \leq \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y'_n)$ e $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n)$ garantem que o limite independe do representante escolhido em $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$.

É fácil verificar que $\tilde{\rho}$ é uma métrica em $\tilde{\mathcal{X}}$.

Lema 2.4.2. *O espaço métrico* $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\rho})$ *é completo.*

Prova: Se $\{\tilde{x}^k\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\tilde{\mathcal{X}}$ e $\mathcal{X} \ni x^k = \{x_n^k\} \in \tilde{x}^k$ temos que

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n^k, x_n^l).$$

Do fato que $x^k = \{x_n^k\}$ é uma seqüência de Cauchy para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $k < n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_n^k, x_{n_k}^k) < \frac{1}{k}, \quad n \geq n_k.$$

Escolhemos $x = \{x_{n_k}^k\}$. Então x é uma seqüência de Cauchy: De fato, se y^k denota a seqüência constante $\{x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, x_{n_k}^k, \ldots\}$ e $\tilde{y}^k = [y^k]$ temos que

$$\begin{aligned} \rho(x_{n_k}^k, x_{n_l}^l) &= \tilde{\rho}(\tilde{y}^k, \tilde{y}^l) \leq \tilde{\rho}(y^k, \tilde{x}^k) + \tilde{\rho}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) + \tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{y}^l) \\ &\leq \tfrac{1}{k} + \rho(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) + \tfrac{1}{l} \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Seja $\tilde{x}$ a classe de equivalência de x.

Mostremos que $\tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{x}) \to 0$ quando $k \to \infty$. Note que

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{x}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k^l, x_{n_k}^k)$$

e que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$ e $\rho(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k) < \frac{\epsilon}{2}$, para $k, l > N$. Segue que, para $l > N$ e $k > \max\{N, n_l\}$,

$$\rho(x_k^l, x_{n_k}^k) \leq \rho(x_k^l, x_{n_l}^l) + \rho(x_{n_l}^l, x_{n_k}^k) < \frac{1}{l} + \epsilon < \epsilon.$$

Logo, $\tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{x}) < \epsilon$ para $l > N$ e $\lim_{l\to\infty} \tilde{\rho}(\tilde{x}^l, \tilde{x}) = 0$. □

Teorema 2.4.1. *Se* (X, ρ) *é um espaço métrico ele pode ser imerso, como um subespaço denso, em um espaço métrico completo* $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$*. Dois espaços nos quais* (X, ρ) *pode ser imerso, como subespaço denso, são isomorfos.*

Prova: Se $\tilde{\mathcal{X}}_0 := \{\, [\{x\}\,], x \in X\} \subset \tilde{\mathcal{X}}$ definimos $T : X \to \tilde{\mathcal{X}}$ por $Tx = [\{x\}]$. É claro que T é uma isometria de X sobre $\tilde{\mathcal{X}}_0$. Mostremos que $\tilde{\mathcal{X}}_0$ é denso em $\tilde{\mathcal{X}}$. De fato, se $\tilde{x} = [\{x_n\}] \in \tilde{\mathcal{X}}$ seja $\tilde{x}_n = [\{x_n, x_n, \ldots\}] \in \tilde{\mathcal{X}}_0$. Como $\{x_n\}$

é um seqüência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $m, n > N$. Segue que

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

para todo $n > N$. Logo $\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = 0$.

Resta apenas mostrar que $\tilde{\mathcal{X}}$ é único a menos de isometria. Se existem $\tilde{\mathcal{X}}$, $\check{\mathcal{X}}$ espaços métricos completos e isometrias $T : X \to \tilde{\mathcal{X}}$, $S : X \to \check{\mathcal{X}}$ com imagens densas, definimos a isometria $\tilde{V} : \tilde{\mathcal{X}} \to \check{\mathcal{X}}$ como a única extensão contínua da isometria

$$V = S \circ T^{-1} : T(X) \to S(X)$$

a $\tilde{\mathcal{X}}$. $\square$

Segunda Aula (100 minutos) ↑

Terceira Aula (100 minutos) ↓

2.5 Conjuntos Totalmente Limitados

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $x \in X$ e $E, F \subset X$ definimos a distância $\rho(x, E)$ de x a E, a distância $\rho(E, F)$ de E a F e o diâmetro $\mathrm{diam}E$ de E por

$$\begin{aligned} &\rho(x, E) := \inf\{\rho(x, y) : y \in E\} \\ &\rho(E, F) := \inf\{\rho(z, y) : z \in E,\ y \in F\} \\ &\mathrm{diam}E := \sup\{\rho(z, y) : z, y \in E\}. \end{aligned}$$

Já vimos que $x \in E^-$ se e somente se $\rho(x, E) = 0$ (Proposição 2.1.1). Diremos que $E \subset X$ é limitado se $\mathrm{diam}E < \infty$.

Se $E \subset X$ e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de conjuntos tal que $E \subset \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ dizemos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E. Se (X, ρ) é um espaço métrico, dizemos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. É claro que todo conjunto totalmete E limitado é limitado, mas não é verdade, em geral, que todo conjunto limitado é totalmente limitado. Também é claro que se E é totalmente limitado então E^- é totalmente limitado.

Teorema 2.5.1. *Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ), as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) *E é completo e totalmente limitado*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda seqüência em E tem uma subseqüência que converge para um ponto de E*

c) **(A propriedade de Heine-Borel)** *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ cobre E.*

Proof: Mostraremos que a) e b) são equivalentes, que a) e b) juntos implicam c) e que c) implica b).

a) implica b): Suponha que a) vale e que $\{x_n\}$ é uma seqüência em E. E pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e pelo menos uma dessas bolas deve conter x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_1$ para $n \in N_1$. $E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e portanto uma dessas bolas contém x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_2$ para $n \in N_2$. Continuando indutivamente obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$. Escolha $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, ... tal que $n_1 < n_2 < \dots$. Então $\{x_{n_j}\}$ é uma seqüência de Cauchy pois $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ se $k > j$, como E é completo o limite dessa subseqüência pertence a E.

b) implica a): Mostraremos que se qualquer das condições em a) falha então b) falha. Se E não é completo, existe uma seqüência de Cauchy $\{x_n\}$ em E que não tem limite em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E pois caso contrário a seqüência seria convergente com o mesmo limite. Por outro lado, se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $x_n \in E$ indutivamente da seguinte maneira. Comece com qualquer $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \dots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \setminus \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todo m, n e portanto $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) implicam c): É suficiente mostrar que se b) vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, pois E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a). Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \emptyset$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$. Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$. Mas se n é suficientemente grande tal que $\rho(x_n, x) < \epsilon/3$ e $2^{-n} < \epsilon/3$, então $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$ contradizendo a hipótese sobre B_n.

c) implica b): Se $\{x_n\}$ é uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existe uma bola B_x centrada em x que contém x_n no máximo para um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x). Então $\{B_x\}_{x \in E}$ é uma cobertura de E por abertos sem subcobertura finita. □

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito *compacto* se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito *relativamente compacto* se E^- é compacto. Todo conjunto compacto é fechado pela Proposição 2.2.1 e limitado, a recíproca em geral é falsa mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como mostra a proposição abaixo.

Proposição 2.5.1. *Todo subconjunto fechado e limitado de* $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2)$ *é compacto*

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos, é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados. Como cada subconjunto limitado está contido em algum cubo da forma

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq R\},$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado. Dado $\epsilon > 0$, escolha um inteiro $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expresse Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo o intevalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais. O lado desses subcubos e $2R/k$ e portanto o seu diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$ e portanto cada um desses subcubos está contido na bola de raio ϵ com centro coincidente com o centro do cubo. □

Duas métricas ρ_1 e ρ_2 em um conjunto X são ditas equivalentes se existem $c, \bar{c} > 0$ tais que

$$c\rho_1 \leq \rho_2 \leq \bar{c}\rho_1.$$

É fácil ver que métricas equivalentes definem os mesmos abertos, fechados e compactos, as mesmas seqüências de Cauchy, e as mesmas funções contínuas e uniformemente contínuas. Consequentemente, a maioria dos resultados relativos a espaços métricos depende não de uma particular métrica mas somente de sua classe de equivalência.

2.6 O Teorema de Arzelá-Ascoli e Aplicações

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X)$.

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções é dita *uniformemente limitada* se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Uma família $\mathcal{F}$ de funções em $C(X)$ é chamada *equicontínua* se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, $\forall x, x' \in X$ com $\rho(x', x) < \delta$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.6.1 (Arzelá-Ascoli)**.** *Se (X, ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X)$ é relativamente compacto se e somente se é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Prova: Suponha que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto. Então $\mathcal{F}$ é totalmente limitado e portanto uniformemente limitado. Seja $\epsilon > 0$ e $f_1, \dots, f_n$ tais que $\mathcal{F} \subset \cup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i)$. Seja $f \in \mathcal{F}$ e $x, x' \in X$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|.$$

Escolha $1 \leq j \leq n$ tal que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|.$$

Como X é compacto, $f_1, \dots, f_n$ são uniformemente contínuas. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica

$$|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Segue que se $\rho(x, x') < \delta$ então

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo. Seja M é um inteiro tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\epsilon > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{4}$ $\forall f \in \mathcal{F}$. Como X é compacto existem $x_1, \ldots, x_n$ tais que $X \subset \cup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$. Escolha um número inteiro positivo m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4}$ e divida $[-M, M]$ em $2Mm$ intevalos comprimento $\frac{1}{m}$ pelos pontos

$$y_0 = -M < y_1 < \cdots < y_{2Mm} = M.$$

Considere as n uplas $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$ de números $y_i, 1 \leq i \leq 2Mm$, tais que para algum $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n$$

e escolha um tal $f \in \mathcal{F}$ para cada $n-$upla. Se $\mathcal{E}$ é o conjunto resultante dessa escolha, $\mathcal{E}$ é finito, e é tal que $\mathcal{F} \subset \cup_{f \in \mathcal{E}} B_\epsilon(f)$. De fato, se $f \in \mathcal{F}$ escolhemos $y_{i_1}, \ldots, y_{in}$ tal que

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n$$

e seja $e \in \mathcal{E}$ tal que

$$|e(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Seja $x \in X$ e j tal que $\rho(x, x_j) < \delta$. Então

$$|f(x) - e(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - y_{i_j}| + |y_{i_j} - e(x_j)| + |e(x_j) - e(x)| < \epsilon.$$

Logo

$$\sup_{x \in X} |f(x) - e(x)| < \epsilon.$$

$\square$

Terceira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Quarta Aula (100 minutos) ↓

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua.

Teorema 2.6.2 (Peano). *Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tem uma solução local passando por (t_0, x_0).*

Prova: Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $|f(t, x)| \leq A$ para todo $(t, x) \in D'$. Seja $a > 0$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{aA}(x_0)^- \subset D'$.

Como f é uniformemente contínua em R, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $(t, x), (t', x') \in R$, $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon$. Seja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A})$, $1 \leq i \leq n$ e $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \to R$ definida por:

- ϕ_ϵ é contínua.
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e se , em $[t_0, t_1]$ seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_0, x_0)$, então $\phi_\epsilon(t_1) \in R$.
- Em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$.
- Prosseguindo desta forma construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-$, $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Como a direção de ϕ_ϵ é $f(t_i, \phi_\epsilon(t_i))$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t')| \leq A|t - t'|.$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leq 1\} \subset C[t_0, t_0 + a]$ é uma família equicontínua. Fixemos $\epsilon > 0$, se $t \in [t_0, t_0 + a]$, $t \neq t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, então $t_{j-1} < t < t_j$ para algum j e

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_{j-1})| < A|t - t_{j-1}| < A\frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$|f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t_{j-1} < t < t_j.$$

Mas $\frac{d}{dt}\phi_\epsilon$ existe exceto para um número finito de pontos e portanto

$$\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) = f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})).$$

Segue que

$$|\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + a], \ t \neq t_i, \ 0 \leq i \leq n.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \{f(s, \phi_\epsilon(s)) + [\dot{\phi}_\epsilon(s) - f(s, \phi_\epsilon(s))]\} ds. \tag{2.4}$$

Se $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para zero, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ é limitada e equicontínua. Do Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 2.6.1) esta seqüência tem uma subseqüência uniformemente convergente com limite ϕ. Segue de (2.4) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, a]$. $\square$

2.7 Espaços Métricos Separáveis

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dizemos que (X, ρ) é um espaço métrico *separável* se X possui um subconjunto enumerável denso.

Exemplos:

- Todo espaço métrico totalmente limitado.
- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são espaços métricos separáveis.
- $\mathbb{R}^n$ com a métrica discreta não é separável.

- ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, é separável e ℓ_∞ não é separável.

- $C[a,b]$ com a métrica da convergência uniforme é separável.

Vamos mostrar que ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, e $C[a,b]$ são separáveis e que ℓ_∞ não é separável.

Começamos com os espaços ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Seja $e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ com 1 na $k-$ésima posição e mostremos que o conjunto enumerável $\mathcal{E}$ das combinações lineares finitas com coeficientes racionais de $\{e_1, e_2, \ldots\}$ é denso em ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. De fato: Se $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in \ell_p$ e $\epsilon > 0$ são dados seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$$

e sejam $r_1, \ldots, r_k$ racionais tais que

$$|x_i - r_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2k}.$$

Então para $r = \{r_1, \ldots, r_k, 0, 0, \ldots\} \in \mathcal{E}$ temos que

$$\rho_p(x,r)^p = \sum_{i=1}^{k} |x_i - r_i|^p + \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon^p.$$

Para ver que ℓ_∞ não é separável considere o conjunto $\mathcal{S}$ das seqüências constituídas apenas por zeros e uns. A cada subconjunto A de $\mathbb{N}$ associamos a seqüência $\{x_n\}$ de $\mathcal{S}$ tal que $x_n = 1$ se $n \in A$ e $x_n = 0$ caso contrário. Desta forma $\mathcal{S}$ está em correspondência biunívoca com as partes de $\mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{S}$ é um conjunto não enumerável. Como cada elemento de $\mathcal{S}$ dista, em ℓ_∞, exatamente "um"de qualquer outro elemento de $\mathcal{S}$, não pode haver um subconjunto enumerável denso em ℓ_∞.

A prova que $C[a,b]$ é separável depende do Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema 2.7.1 (Weierstrass)**.** *Se $f \in C[a,b]$ e $\epsilon > 0$ existe p um polinômio real em uma variável real tal que $\|p - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.*

Prova: Faremos apenas a prova para $a = 0$ e $b = 1$. Seja $f \in C[0,1]$ e

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

os polinômios de Bernstein associados a f. Note que se $f \equiv 1$ então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1 \tag{2.5}$$

cuja derivada nos dá

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} & [kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k - nx) = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k - nx) = 0.$$

Derivando esta última expressão, aplicando (2.5) e multiplicando por $\frac{x(1-x)}{n^2}$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (x - \frac{k}{n})^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{2.6}$$

É claro que

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$. Agora separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde Σ é a soma daqueles termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ (x está fixo mas é arbitrário) e Σ' é a soma sobre os termos remanescentes. É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Completamos a prova mostrando que para n suficientemente grande Σ' pode ser feito menor que $\epsilon/2$ independentemente de x. Como f é limitada existe $K > 0$ tal que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq K$ e segue que

$$\sum{}' \leq 2K \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ |x-\frac{k}{n}|\geq\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 2K\sum{}''.$$

Segue de (2.6) que

$$\delta^2\sum{}'' \leq \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Isto prova o resultado. $\square$

Corolário 2.7.1. $C[a,b]$ *é separável.*

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $C(X)$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual

$$\rho_\infty(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X)$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f.g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual. Um conjunto $A \subset C(X)$ é dito uma álgebra se $f,g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f+g \in A$, $f.g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo: O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C[a,b]$.

Se $E \subset C(X)$ a interseção de todas as álgebras contendo E é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada *álgebra gerada por E*.

Exemplo: Os polinômios reais em uma variável real são gerados por $\{1, x\}$.

É fácil verificar que se $A \subset C(X)$ é uma álgebra então A^- também é uma álgebra.

Teorema 2.7.2 (Stone-Weierstrass Real)**.** *Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X)$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X)$.*

Prova: Mostremos primeiramente que se $f \in A$ então $|f| \in A$. Se $M > 0$ é tal que $\max_{x \in X} |f(x)| \leq M$, seja $\epsilon > 0$ e $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ um polinômio tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M].$$

Então, se $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$, $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X)$ que $|f| \in A$. A seguir mostremos que se $f, g \in A$ então $\max\{f, g\} \in A$ e $\min\{f, g\} \in A$. Isto segue do fato que

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g| \in A.$$

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X)$. A função constante g com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$). Seja $h \in A$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$). Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = f + ah \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$. Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe uma bola aberta B_y tal que $y \in B_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$, $\forall z \in B_y$. Como X é compacto temos que $B_{y_1}, \ldots, B_{y_n}$ cobrem X para alguma escolha de $y_1, \ldots, y_n$. Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \ldots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $f_x(x) = f(x)$ e para $z \in X$, $f_x(z) < f(z) + \epsilon$. Agora, para $x \in X$, existe uma bola aberta B_x tal que, $\forall z \in B_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito dessas bolas $B_{x_1}, \dots, B_{x_n}$ cobrem X. Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. $\square$

Quarta Aula (100 minutos) ↑

Quinta Aula (100 minutos) $\downarrow$

Teorema 2.7.3 (Stone-Weierstrass Complexo). *Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X,\mathbb{C})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$, se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e se $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$. Então, $A = C(X,\mathbb{C})$*

Prova: Como, para toda $f \in A$, as funções

$$\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \text{ e } \mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

pertencem a A, o subconjunto A_0 de A das funções contínuas em K a valores reais é $C(K,\mathbb{R})$. O restante da prova é imediata. $\square$

Corolário 2.7.2. *Toda função contínua a valores reais ou complexos definida em um conjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios em n variáveis reais.*

Corolário 2.7.3. *Se $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, dada uma função contínua $f : B \to B$ e $\epsilon > 0$ existe $p : B \to B$ ($p = (p_1, \ldots, p_n)$, p_i, $1 \leq i \leq n$, polinômios) tal que $\sup_{x\in B} \|f(x) - p(x)\| < \epsilon$.*

Prova: Sabemos que, dado $\epsilon > 0$,

$$\|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}, \ \forall x \in B.$$

Segue do Corolário 2.7.2 que existem polinômios p_i, $1 \leq i \leq n$, tais que

$$|p_i(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f_i(x)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4n}, \ \forall x \in B.$$

Se $p = (p_1, \ldots, p_n)$ temos que $\sup_{x\in B} \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Segue que

$$\|p(x)\| \leq \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2}) = 1, \ \forall x \in B$$

e

$$\|p(x) - f(x)\| \leq \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x) - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

2.8 Categoria de Baire

Se (X,ρ) é um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ é *nunca denso* se o seu fecho tem interior vazio. A união de um número finito de conjuntos nunca densos é um conjunto nunca denso. Contudo, a união enumerável de conjuntos nunca denso não precisa ser nunca denso.

Um conjunto $A \subset X$ é dito de *Primeira Categoria* em X se é união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele é dito de *Segunda Categoria* em X. É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição 2.8.1. *(X,ρ) é de segunda categoria nele mesmo se e só se, em qualquer representação de X como união enumerável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola.*

Teorema 2.8.1 (Baire)**.** *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.*

Prova: Suponha que não

$$X = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$$

com cada F_i fechado e de interior vazio. Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja x_1 e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $x_1 \in X\backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$. A bola $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ não está contida em F_2, logo existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1),$$

indutivamente existe x_n, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}).$$

A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \dots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja x o seu limite. Para cada n fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \dots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. $\square$

2.9 Apêndice A: Teorema de Brouwer

Em $\mathbb{R}^n$ considere a norma euclideana e $B = B_1(0)^-$.

Teorema 2.9.1 (Brouwer)**.** *Se $f : B \to B$ é uma função contínua, ela tem um ponto fixo.*

Prova: Seja f infinitamente diferenciável em um aberto U contendo B e $f(x) \neq x$ para todo $x \in B$. Então, para cada $x \in B$ a reta $tf(x) + (1-t)x$ unindo x a $f(x)$ corta $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ em exatamente 2 pontos. Isto significa que

$$(\|x\|^2 - 1) + 2t\langle x, f(x) - x\rangle + t^2\|f(x) - x\|^2 = 0$$

tem exatamente duas raízes reais distintas. Se $a(x)$ denota a menor delas; temos

$$\|f(x) - x\|^2 a(x) = \langle x, x - f(x)\rangle - \left(\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e o discriminante $\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2$ é positivo para todo $x \in B$. Segue que $a(x)$ é infinitamente diferenciável em um aberto contendo B. Além disso, como para $t \in [0,1]$ $tf(x) + (1-t)x$ está entre x e $f(x)$, $a(x) = 1$ para $\|x\| = 1$.

Definimos, para $t \in \mathbb{R}$, $\psi_t : B \to B$ por

$$\psi_t(x) = x + ta(x)(f(x) - x).$$

Logo $(t, x) \mapsto \psi_t(x)$ é infinitamente diferenciável em uma vizinhança de $\mathbb{R} \times B$, $\psi_0(x) = x$ para todo $x \in B$ e $\|\psi_1(x)\| = 1$ para todo $x \in B$ (da definição de $a(x)$).

Denotemos por $J(t, x)$ o Jacobiano de ψ_t no ponto x. Segue que $J(0, x) = 1$ e $J(1, x) = 0$ para todo $x \in B$ e se

$$I(t) = \int_B J(t, x)dx_1 \dots dx_n,$$

temos que $I(0) = |B|$ e $I(1) = 0$. Se provarmos que $I(t)$ é constante teremos a contradição desejada. Note que $I(t)$ é um polinômio em t (pois $J(t, x)$ é um polinômio em t) e portanto basta verificar que $I(t)$ é constante em algum intervalo da forma $[0, \delta)$.

Defina

$$g(x) = \begin{cases} a(x)(f(x) - x), \text{ se } x \in B \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}^n \backslash B. \end{cases}$$

É fácil ver que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é globalmente Lipschitz contínua. Seja M a constante de Lipschitz de g. Para $t \in \mathbb{R}$ e $y \in B$ definimos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $T(x) = y - tg(x)$. É fácil ver que para $\delta < \frac{1}{M}$ e $t \in [0, \delta)$, T é uma contração e portanto tem um único ponto fixo x_t. Não podemos ter $\|x_t\| > 1$ pois nesse caso $g(x_t) = 0$ e $Tx_t = x_t = y - tg(x_t) = y \in B$ o que é um absurdo. Assim, para todo $t \in [0, \delta)$, $\psi_t : B \to B$ é uma bijeção cuja inversa é diferenciável em B^o. Segue do Teorema de Mudança de Variáveis na Integral que $I(t) = |B|$ para todo $t \in [0, \delta)$.

Para mostrar o teorema quando f é apenas contínua basta utilizar o Corolário 2.7.3 para representar f como limite uniforme de funções infinitamente diferenciáveis $\{f_k\}$ de B em B e extrair uma subseqüência convergente do conjunto dos pontos fixos $\{x_k\}$ das funções $\{f_k\}$. $\square$

2.10 Lista de Exercícios

1. Sejam $p, q \geq 1$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (se $p = 1$ ($q = 1$) então $q = \infty$ ($p = \infty$)). Para $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ defina $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

e $\rho_p(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p.$$

(a) Mostre a desigualdade de Young; isto é, que para todo $a, b \in [0, \infty)$

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Sugestão: Mostre que para $a > 0$ e $b > 0$ esta desigualdade é equivalente à

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

e mostre que a função $f(t) = \frac{1}{p}t + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}}$, $t \geq 0$ atinge o seu valor mínimo em $t = 1$.

(b) Mostre a desigualdade de Hölder; isto é, que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Sugestão: Use a desigualdade de Young para $a = \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p}$ e $b = \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}$ e some.

(c) Mostre a desigualdade de Minkowski; isto é, que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Sugestão: Use a desigualdade de Hölder para

$$(|x_1|, \ldots, |x_n|) \text{ e } (|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1})$$

e para

$$(|y_1|, \ldots, |y_n|) \text{ e } (|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1}).$$

(d) Mostre que $\|\cdot\|_p$ é uma norma e conclua que ρ_p é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

(e) Mostre que $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

2. Para $1 \leq p \leq \infty$, mostre que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em ℓ_p e conclua que $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \to [0, \infty)$ dada por $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$, $x, y \in \ell_p$, é uma métrica.

3. Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos. Mostre que:

   - $B_r(x)$, $x \in X$, $r > 0$, é um conjunto aberto em (X, ρ).
   - A união (interseção) qualquer de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).
   - A interseção (união) finita de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).
   - Se $E \subset X$ então diam$E$ = diamE^-.
   - $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ é contínua se e somente se todo $F \subset Y$ fechado tem imagem inversa $f^{-1}(F) \subset X$ fechada.
   - $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ é contínua se e somente se para toda seqüência convergente $\{x_n\}$ em (X, ρ) com limite x a seqüência $\{f(x_n)\}$ é convergente em (Y, σ) com limite $f(x)$.

4. Mostre que se (X, ρ) é um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contíua então f é uniformemente contínua.

5. Sejam a, b números reais com $a < b$ e $C[a,b]$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $\rho : C[a,b] \times C[a,b] \to [0,\infty)$ dada por
$$\rho(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$
Mostre que ρ é uma métrica e que $C[a,b]$ é completo com esta métrica.

6. Sejam a, b números reais com $a < b$ e $I[a,b]$ o conjunto de todas as funções Riemann Integráveis de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $\rho : I[a,b] \times I[a,b] \to [0,\infty)$ dada por
$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$
Mostre que ρ não é uma métrica em $I[a,b]$ mas é uma métrica em $C[a,b] \subset I[a,b]$ e que $C[a,b]$ não é completo com esta métrica.

7. Mostre que (X, ρ) é completo se e somente se toda seqüência $\{B_k^-\}$ de bolas fechadas com $B_{n+1}^- \subset B_n^-$ e $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ (r_n=raio de B_n^-), a interseção $\cap_{n=1}^{\infty} B_n^-$ consiste exatamente de um ponto.

8. Dê um exemplo de conjunto limitado que não é totalmente limitado.

9. Seja (X, ρ) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma transformação. Assuma que, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, T^{n_0} é uma contração e mostre que T tem um único ponto fixo.

10. Complete a prova do Teorema de Peano.

11. Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dizemos que X é de *Lindelöf* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável. Mostre que todo espaço métrico separável é de *Lindelöf*.

12. Mostre que todo espaço métrico totalmente limitado é separável.

13. Complete a prova do Teorema de Aproximação de Weierstrass.

14. Mostre que $C[0,1]$ é separável.

15. Mostre que o conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra e que seu fecho é $C[0, 2\pi]$.

16. Mostre que se A é uma álgebra em $C(X)$ então A^- é uma álgebra.

17. Mostre que se $f \in C[a, b]$ é tal que

$$\int_a^b f(t)t^n dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

então $f(t) = 0$, $\forall\ t \in [a, b]$.

18. Mostre que se $f \in C[0, 1]$ é tal que

$$\int_0^1 f(t)t^{2n} dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

então $f(t) = 0$, $\forall\ t \in [0, 1]$. Isto vale em $C[-1, 1]]$?

19. Use o Teorema de Baire para mostrar a existência de uma função contínua, definida em um intervalo $[a, b]$, que não é diferenciável em nenhum ponto de $[a, b]$.

20. Mostre que $C^1[a, b]$ está compactamente imerso em $C[a, b]$.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais Normados

3.1 Espaços Vetoriais Normados

Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se M, N são subespaços vetoriais de X (escrevemos $M, N \underset{\text{SEV}}{\subset} X$) definimos a soma de M e N por

$$M + N := \{x + y : x \in M,\ y \in N\}.$$

Definição 3.1.1. *Uma seminorma é uma função* $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X \\ &\|\lambda x\| \le |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

É claro que $\|0\| = 0$*, e se*

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

dizemos que $\|\cdot\|$ *é uma norma e que* X *é um espaço vetorial normado.*

Se X é um espaço vetorial normado, então $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, definida por $\rho(x, y) = \|x - y\|$, é uma métrica em X. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um espaço de Banach. Todo espaço vetorial normado pode ser imerso em um espaço de Banach. Este fato já foi visto para espaços métricos na Seção 2.4. Mais tarde daremos uma outra prova desse fato.

Duas normas em X, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se existem c_1 e c_2 tal que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall \ x \in X.$$

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita convergente em X se $\sum_1^N x_n \to x$ quando $N \to \infty$ e absolutamente convergente se $\sum_1^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Teorema 3.1.1. *Um espaço vetorial normado é completo $\Leftrightarrow$ toda série absolutamente convergente é convergente.*

Prova: Se X é um espaço de Banach e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ é fácil ver que $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente.

Por outro lado, se X é um espaço vetorial normado X onde toda série absolutamente convergente é convergente e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy então, existem $n_1 < n_2 < \cdots$ em $\mathbb{N}$ tais que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-j} \quad n, m \geq n_j$$

escolhemos $y_1 = x_{n_1}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$, $j \geq 2$. Logo

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_{1}^{k} 2^{-j} < \|y_1\| + 1 < \infty.$$

Isto implica que $\{x_{n_k}\}$ é convergente e portanto $\{x_n\}$ é convergente. $\square$

Definição 3.1.2. *$T : X \to Y$ linear entre dois espaços vetoriais normados é limitada se $\exists\ c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$, $\forall\ X$.*

Proposição 3.1.1. *Se X, Y são espaços vetoriais normados $T : X \to Y$ é linear, são equivalentes:*

1. *T é contínua,*

2. *T é continua em 0,*

3. T é limitada.

Prova:

$\boxed{a \Rightarrow b}$ É evidente.

$\boxed{b \Rightarrow c}$ Dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que $T([B_\delta(0)]^-) \subset T(B_{2\delta}(0)) \subset \{y \in Y : \|y\| < 1\}$. Como $\|Tx\| \leq 1$ quando $\|x\| \leq \delta$ temos que $\|T\frac{\delta x}{\|x\|}\| \leq 1$ para $0 \neq x \in X$. Segue que $\|Tx\| \leq \delta^{-1}\|x\|$ para todo $x \in X$.

$\boxed{c \Rightarrow a}$ Se existe $c > 0$ tal que, $\forall\ x, y \in X$, $\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\|$ e $\varepsilon > 0$ é dado, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Então $\|x - y\| < \delta$ implica $\|Tx - Ty\| < c\frac{\epsilon}{c} = \varepsilon$. $\square$

$L(X, Y)$ denota o conjunto das transformações lineares e contínuas de X em Y. $L(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in X\} \\ &= \sup_{\substack{\|x\| \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

Proposição 3.1.2. *Se Y é completo então $L(X, Y)$ é completo.*

Prova: Seja $\{T_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $L(X, Y)$. Então $\{T_n x\}$ é de Cauchy em Y. Defina $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$.

É claro que T é linear e que

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \limsup_{n \geq 1} \|T_n\| \cdot \|x\|.$$

Logo $T \in L(X, Y)$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todo $m, n > N$ e

$$\|T_n x - T_m x\| = \|T_n - T_m\|\ \|x\| < \epsilon\|x\|\ \forall\ m, n \geq N \text{ e } \forall\ x \in X$$

Logo

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon\|x\|\ \forall\ n \geq N \text{ e } \forall\ x \in X.$$

Portanto $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e $T_n \to T$. $\square$

Também é verdade que se $L(X,Y)$ é completo então Y é completo. Veja [3]

Se $T \in L(X,Y)$ e $S \in L(Y,Z)$ então $S \circ T \in L(X,Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

$T \in L(X,Y)$ é inversível ou um isomorfismo se T é bijetora e $T^{-1} \in L(Y,X)$, isto é, $\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X$ para algum $c > 0$. T é uma isometria se $\|Tx\|_Y = \|x\|_X \ \forall \, x \in X$.

Quinta Aula (100 minutos) ↑

Sexta Aula (100 minutos) ↓

3.2 O Teorema de Hahn-Banach

- Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.
  Uma função linear $f : X \to \mathbb{K}$ é chamada um funcional linear.

- Se X é um espaço vetorial normado $L(X, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach que é chamado espaço dual de X e denotado por X^*.

- Se X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ ele também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Assim, podemos considerar funcionais lineares reais $f : X \to \mathbb{R}$ ou complexos $f : X \to \mathbb{C}$.

Proposição 3.2.1. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é um funcional linear e $u = \mathrm{Re}\, f$ então u é um funcional linear real e $f(x) = u(x) - iu(ix)$ para todo $x \in X$. Reciprocamente se $u : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear real e $f : X \to \mathbb{C}$ é definido por $f(x) = u(x) - iu(ix)$, então f é um funcional linear complexo. Se X é normado, f é limitado se e somente se u é limitado e neste caso $\|f\| = \|u\|$.*

Prova: Se $f : X \to C$ é linear então $u = \mathrm{Re}\, f$ é linear e $\mathrm{Im}\, f(x) = -\mathrm{Re}\, if(x) = -\mathrm{Re}\, f(ix) = -u(ix)$. Por outro lado se u é um funcional linear real $f(x) = u(x) - iu(ix)$ é claramente linear.

Se X é normado e f é limitado $|u(x)| = |\mathrm{Re}\, f(x)| \leq |f(x)|$. Portanto, u é limitado e $\|u\| \leq \|f\|$. Por outro lado, se u é limitado, $|f(x)| = \underbrace{e^{\mathrm{arg(f(x))}}}_{\alpha} f(x) = f(\alpha x) = u(\alpha x) \in \mathbb{R}$, logo

$$|f(x)| \leq \|u\|\|\alpha x\| = \|u\|\|x\|$$

e f é limitado com $\|f\| \leq \|u\|$. Em ambos os casos $\|f\| = \|u\|$. $\square$

Se X é normado, um funcional sublinear é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{e} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x, y \in X \quad \text{e} \quad \lambda \geq 0.$$

Teorema 3.2.1 (Hahn-Banach)**.** *Seja X um espaço vetorial real, p um funcional sublinear em X, $M \underset{\text{SEV}}{\subset} X$ e f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear F em X tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F_{|_M} = f$.*

Prova: Começamos mostrando que se $x \in X \backslash M$, podemos estender f a um funcional linear g definido sobre $M + \mathbb{R}x$ e satisfazendo $g(y) \leq p(y)$ para todo $y \in M + \mathbb{R}x$. Se $y_1, y_2 \in M$ temos

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x) + p(x + y_2)$$

ou

$$f(y_1) - p(y_1 - x) \leq p(x + y_2) - f(y_2).$$

Logo

$$r_1 = \sup\{f(y) - p(y - x) : y \in M\} \leq \inf\{p(x + y) - f(y)\,,\, y \in M\} = r_2.$$

Seja α tal que $r_1 \leq \alpha \leq r_2$ e defina $g : M + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ por $g(y + \lambda x) = f(y) + \lambda\alpha$. É claro que g é linear e que $g_{|_M} = f$, o que implica $g(y) \leq p(y)$ para todo $y \in M$. Adicionalmente se $\lambda > 0$ e $y \in M$.

$$g(y + \lambda x) = \lambda[f(y/\lambda) + \alpha] \leq \lambda[f(y/\lambda) + p(x + (y/\lambda)) - f(y/\lambda)] = p(y + \lambda x)$$

enquanto se $\lambda = -\mu < 0$

$$g(y + \lambda x) = \mu[f(y/\mu) - \alpha] \leq \mu[f(y/\mu) - f(y/\mu) + p(y/\mu - x)] = p(y + \lambda x).$$

Portanto $g(z) \leq p(z)$ para todo $z \in M + \mathbb{R}x$.

Isto mostra que o domínio de uma extensão linear maximal de f satisfazendo $f \leq p$ deve ser o espaço todo.

Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as extensões lineares de f satisfazendo $f \leq p$ e parcialmente ordenado pela inclusão nos gráficos. Como um conjunto linearmente ordenado de extensões tem a união como limitante superior segue do lema de Zorn que $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal. $\square$

Se p é uma seminorma e $f : X \to \mathbb{R}$, a desigualdade $f \leq p$ é equivalente a $|f| \leq p$ pois $|f(x)| = \pm f(x) = f(\pm x) < p(\pm x) = p(x)$.

Teorema 3.2.2 (Hahn-Banach Complexo)**.** *Seja X um espaço vetorial complexo, p uma seminorma em X, M um subespaço vetorial de X e $f : M \to \mathbb{C}$ linear com $|f(x)| \leq p(x)$ para $x \in M$. Então existe $F : X \to \mathbb{C}$ linear tal que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F_{|_M} = f$.*

Prova: Seja $u = \mathrm{Re}\, f$. Pelo Teorema anterior existe uma extensão linear U de u a X tal que $|U(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Seja $F(x) = U(x) - iU(ix)$. Então F é uma extensão linear complexa de f. Para cada $x \in X$, se $\alpha = e^{-i\arg(F(x))}$, temos que $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x)$.□

Corolário 3.2.1. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo K, M um subespaço vetorial de X $f : M \to \mathbb{K}$ um funcional linear com*

$$\|f\|_{M^*} := \sup\{|f(x)| : x \in M \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Então existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}\big|_M = f$ e $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

Prova: Basta aplicar o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 3.2.2) com $p(x) = \|f\|_{M^*}\|x\|$.

Teorema 3.2.3. *Seja X um espaço vetorial normado.*

a. *Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} X$ é fechado e $x \in X \setminus M$ existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$, $f_{|_M} = 0$. De fato, se $\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, f pode ser tomada tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \delta$.*

b. *Se $x \neq 0$ $\exists$ $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.*

c. *Os funcionais lineares limitados em X separam pontos.*

d. *Se $x \in X$ defina $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ por*

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*.$$

Então a transformação $x \xrightarrow{T} \hat{x}$ é uma isometria linear de X em X^{**}.

Prova:

a) Defina f em $M+\mathbb{C}x$ por $f(y+\lambda x)=\lambda\delta$, $(y\in M$ e $\lambda\in\mathbb{C})$. Então $f(x)=\delta$, $f_{|_M}=0$ e, para $\lambda\neq 0$,

$$|f(y+\lambda x)|=|\lambda|\delta\leq|\lambda|\ \|\lambda^{-1}y+x\|=\|y+\lambda x\|.$$

O resultado agora segue do Teorema de Hahn Banach com $p(x)=\|x\|$ e M substituído por $M+\mathbb{C}x$.

b) É um caso especial de a) com $M=0$.

c) Se $x\neq y$ existe $f\in X^*$ com $f(x-y)\neq 0$ isto é $f(x)\neq f(y)$.

d) $\hat{x}$ é claramemente linear de X^* em $\mathbb{K}$. A transformação $x\xrightarrow{T}\hat{x}$ é linear, pois $T(\alpha x+\beta y)(f)=(\widehat{\alpha x+\rho y})(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\rho f(y)=\alpha\hat{x}(f)+\rho\hat{x}(f)=\alpha T(x)(f)+\rho T(y)(f)$, para toda $f\in X^*$. Note que

$$|\hat{x}(f)|=|f(x)|\leq\|f\|\ \|x\|\Rightarrow\|\hat{x}\|\leq\|x\|.$$

Por outro lado de b) existe $f\in x^*$ tal que $f(x)=\|x\|$, $\|f\|=1$ e isto implica que $|\hat{x}(f)|=f(x)=\|x\|$ e $\|\hat{x}\|\geq\|x\|$. □

Seja $\hat{X}=\{\hat{x}:x\in X\}$. Como X^{**} é Banach $[\hat{X}]^-$ é Banach e $x\ni X\to\hat{x}\in\hat{X}$ é uma imersão densa de X em $[\hat{X}]^-$. $[\hat{X}]^-$ é chamado *completamento* de X. Em particular se X é Banach $[\hat{X}]^-=\hat{X}$.

Se $\dim X$ é finita então $\hat{X}=X^{**}$ pois estes espaços tem a mesma dimensão.

Para dimensão infinita nem sempre $\hat{X}=X^{**}$ e quando este é o caso X é dito reflexivo.

Geralmente identificamos X com $\hat{X}$ e consideramos X como um subespaço de X^{**}. Com isto, reflexividade passa então a ser entendida como $X=X^{**}$.

Sexta Aula (100 minutos) ↑

Sétima Aula (100 minutos) $\downarrow$

3.3 Conseqüências do Teorema de Categoria

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é uma aplicação aberta se $T(U)$ é um subconjunto aberto de Y sempre que U é um subconjunto aberto de X.

Se Z é um espaço vetorial normado denotaremos o conjunto $\{z \in Z : \|z - z_0\| < r\}$ por $B_r^Z(z_0)$ (ou simplesmente $B_r(z_0)$ quando não houver possibilidade de confusão) .

Teorema 3.3.1 (Aplicação Aberta)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in L(X, Y)$ é sobrejetora, então T é aberta.*

Para provar o Teorema da Aplicação Aberta precisamos dos dois lemas seguintes:

Lema 3.3.1. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:*

a) T é uma aplicação aberta;

b) Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.

Prova: É claro que $a \Rightarrow b$. Mostremos que $b \Rightarrow a$. Basta mostrar que Tx é interior a $T(U)$ para todo $x \in U$. Se $x \in U$, como U é aberto, existe $p > 0$ tal que $B_p^X(x) \subset U$ e

$$\begin{aligned} T(U) \supset T(B_p^X(x)) &= T(x + pB_1^X(0)) = Tx + pT(B_1^X(0)) \\ &\supset Tx + B_r^Y(0) = B_r^Y(Tx) \end{aligned}$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. $\square$

Lema 3.3.2. *Se X, Y são espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ é tal que, para algum $r > 0$,*

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: Como T comuta com homotetias segue que se $\|y\| < r2^{-n}$ então $y \in [T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$. Suponha que $\|y\| < \frac{r}{2}$; podemos encontrar $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$ e procedendo indutivamente podemos encontrar $x_n \in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como X é completo a série $\sum x_n$ converge, digamos para x, mas então $\|x\| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Em outras palavras $T(B_1^X(0)) \ni y$, para todo $\|y\| < \frac{r}{2}$.

Prova do Teorema da Aplicação Aberta: Como $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$ e T é sobre temos que $Y = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ mas Y é completo e $y \to ny$ é um homeomorfismo de Y nele mesmo que leva $B_1^X(0)$ em $B_n^X(0)$. Do teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é, existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{4r}^Y(y_0)$ está contido em $[T(B_1^X(0))]^-$. Tome $y_1 = Tx_1 \in T(B_1^X(0))$ tal que $\|y_1 - y_0\| < 2r$. Então $B_{2r}^Y(y_1) \subset B_{4r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$, logo se $\|y\| < 2r$

$$y = Tx_1 + y - y_1 \in T(B_1^X(0)) + [T(B_1^X(0))]^- \subset 2[T(B_2^X(0))]^-.$$

Dividindo ambos os lados por 2 concluímos que $\exists\ r > 0$ tal que se $\|y\| < r$ então $y \in [T(B_1^X(0))]^-$. O resultado agora segue dos Lemas anteriores. $\square$

Corolário 3.3.1. *Se X e Y são espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ é bijetora, então T é um isomorfismo; isto é, $T^{-1} \in L(Y,X)$.*

Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ uma transformação linear (é claro que $D(T) \underset{\text{SEV}}{\subset} X$). Definimos o gráfico de T por

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y$$

Uma transformação linear $T : D(T) \subset X \to Y$ é fechada se $[G(T)]^- = G(T)$. Toda transformação linear contínua T é fechada.

Teorema 3.3.2 (Gráfico Fechado)**.** *Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \to Y$ é fechada então T é limitada.*

Prova: Sejam π_1 e π_2 as projeções de $G(T)$ em X e Y, isto é, $\pi_1(x\,,\,T_x) = x$ e $\pi_2(x\,,\,T_x) = Tx$. Obviamente $\pi_1 \in L(G(T), X)$ e $\pi_2 \in L(G(T), Y)$. Como X e Y são completos $X \times Y$ é completo e portanto $G(T)$ é completo (pois é fechado, veja Proposição 2.2.1). π_1 é uma bijeção de $G(T)$ em X e portanto π_1^{-1} é limitado. Então $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ é limitado. $\square$

Teorema 3.3.3 (Princípio da Limitação Uniforme)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A \subset L(X, Y)$*

a) Se $\sup\limits_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ para x em subconjunto de segunda categoria, então $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.

b) Se X é um espaço de Banach e $\sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in X$, então $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.

Prova: Basta provar a) que b) segue do Teorema de Categoria de Baire. Seja

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T\in A} \|Tx\| \le n\} = \bigcap_{T\in A} \{x \in X : \|Tx\| \le n\}.$$

Então, os E_n's são fechados e como a união $\bigcup\limits_{n\ge 1} E_n$ contém um conjunto de segunda categoria devemos ter que algum E_n contém uma bola não trivial $[B_r(x_0)]^-$, $r > 0$. Então $E_{2n} \supset [B_r(0)]^-$ pois sempre que $\|x\| \le r$ temos que $-x + x_0 \in [B_r(x_0)]^- \subset E_n$ e

$$\|Tx\| = \|T(x - x_0)\| + \|Tx_0\| \le n + n = 2n\,, \quad \forall\ T \in A.$$

Logo $\|Tx\| \le 2n$ sempre que $\|x\| \le r$ e para todo $T \in A$ de onde segue que

$$\|T\| \le \frac{2n}{r} \quad \forall\ T \in A.$$

$\square$

Corolário 3.3.2. *Se X, Y são espaços vetoriais normados e $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ é tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in X$ e $T : X \to Y$ é definida por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então $T \in L(X,Y)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

Corolário 3.3.3. *Se X é um espaço de Banach e $B \subset X$, suponha que $\forall\ f \in X^*\ f(B) = \bigcup_{b\in B} f(b)$ é limitado. Então B é limitado*

Prova: Defina $\hat{b} : X^* \to \mathbb{K}$ por

$$\hat{b}(f) = f(b).$$

Então para cada $f \in X^*$

$$\sup_{b\in B} |\hat{b}(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty$$

segue do Princípio da Limitação Uniforme e do Teorema 3.2.3 d) que

$$\sup_{b\in B} \|\hat{b}\| = \sup_{b\in B} \|b\| < \infty.$$

□

Corolário 3.3.4. *Seja X um espaço de Banach e $B^* \subset X^*$. Suponhamos que $\forall x \in X$ o conjunto $B^*(x) = \bigcup_{b^*\in B^*} f(x)$ é limitado. Então B^* é limitado.*

Prova: Por hipótese $|b^*(x)| \leq c_x$ para todo $b^* \in B^*$. Segue do Princípio da Limitação Uniforme que $\sup_{b^*\in B^*} \|b^*\| < \infty$. □

Sétima Aula (100 minutos) ↑

Oitava Aula (100 minutos) ↓

3.4 Espaços de Hilbert

Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto escalar é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ para todo $u, v \in H$.
- $\langle au + bu', v\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u', v\rangle$ para todo $u, u', v \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $u = 0$.

Segue facilmente dessas propriedades que $\langle u, av + bv'\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, v'\rangle$ para todo $u, v, v' \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$. Vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

De fato, para $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle u + tv', u + tv'\rangle = \langle u, u\rangle + 2t\mathrm{Re}\langle u, v'\rangle + t^2\langle v', v'\rangle.$$

Como a expressão do lado direito é uma função quadrática de t com uma ou nenhuma raiz real

$$0 \geq 4(\mathrm{Re}\langle u, v'\rangle)^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v', v'\rangle,$$

e se $v' = e^{i\arg\langle u,v\rangle}v$ temos que

$$0 \geq 4|\langle u, v\rangle|^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle,$$

a desigualdade segue.

A função $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ é uma norma. Para verificar este fato basta mostrar que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para toto $u, v \in H$. Isto segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e de

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v^2\| \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v^2\| \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2.\end{aligned}$$

Um espaço vetorial H juntamente com um produto interno é dito um *espaço com produto interno.* Em um espaços com produto interno vale a *identidade do paralelogramo*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad \forall u, v \in H.$$

Se um espaço com produto interno H é completo dizemos que H é um espaço de Hilbert. Dois vetores u, v em um espaço com produto interno H são ditos ortogonais (escrevemos $u \perp v$) se $\langle u, v\rangle = 0$ e neste caso vale o Teorema de Pitágoras

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Mais geralmente, se $u_1, \cdots, u_n$ são vetores dois a dois ortogonais em um espaço com produto interno H então

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Um subconjunto C de um espaço vetorial X é convexo se $tx+(1-t)y \in C$ sempre que $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$.

Lema 3.4.1. *Se K é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $u_0 \in H$, existe um único $v_0 \in K$ tal que*

$$\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|.$$

Escrevemos $v_0 = P_K u_0$ e dizemos que P_K é a projeção sobre o convexo K.

Prova: Seja $v_n \in K$ tal que

$$d_n = \|u_0 - v_n\| \to d = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|.$$

Mostraremos que $\{v_n\}$ é uma seqüência de Cauchy. Da identidade do paralelogramo para $a = u_0 - v_n$ e $b = u_0 - v_m$ resulta que

$$\|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|^2 + \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m)^2.$$

Como $\frac{v_m+v_n}{2} \in K$, $\|u_0 - \frac{v_m+v_n}{2}\| \geq d$. Consequentemente

$$\|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m)^2 - d^2 \text{ e } \lim_{m,n\to\infty} \|\frac{v_n - v_m}{2}\| = 0.$$

Se $v_0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ temos que $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v\in K} \|u_0 - v\|$.

Para a unicidade, suponha que $z_0 \in K$ e $\|u_0 - z_0\| = d$. Então, da Identidade do Paralelogramo para $v_0 - u_0$ e $z_0 - u_0$,

$$\begin{aligned}\|v_0 - z_0\|^2 &= 2\|v_0 - u_0\|^2 + 2\|z_0 - u_0\|^2 - \|v_0 + z_0 - 2u_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\|\tfrac{v_0+z_0}{2} - u_0\| \leq 0.\end{aligned}$$

Portanto $v_0 = z_0$. □

Proposição 3.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ fechado e convexo e $u_0 \in H$, então*

$$\mathrm{Re}\langle u_0 - P_K u_0, w - P_K u_0\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K.$$

Além disso, se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ é fechado então

$$\langle u_0 - P_M u_0, w\rangle = 0, \quad \forall w \in M.$$

Prova: Seja $v_0 = P_K u_0 \in K$ tal que $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v\in K} \|u_0 - v\|$ e w um outro vetor em K. Então, para $t \in (0, 1]$, temos $v = (1 - t)v_0 + tw \in K$ e

$$\|u_0 - v_0\| \leq \|u_0 - (1 - t)v_0 - tw\| = \|u_0 - v_0 - t(w - v_0)\|.$$

Portanto

$$\|u_0 - v_0\|^2 \leq \|u_0 - v_0\|^2 - 2t\mathrm{Re}\langle u_0 - v_0, w - v_0\rangle + t^2\|w - v_0\|^2.$$

Segue que $2\mathrm{Re}\langle u_0 - v_0, w - v_0\rangle \leq t\|w - v_0\|^2$. Fazendo $t \to 0$ temos que $\mathrm{Re}\langle u_0 - P_K u_0, w - P_K u_0\rangle \leq 0$, para todo $w \in K$.

Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ é fechado então, para todo $\mathbb{R} \ni t \neq 0$,

$$\mathrm{Re}\langle u_0 - P_M u_0, tw - P_M u_0\rangle = t\mathrm{Re}\langle u_0 - P_M u_0, w\rangle - \mathrm{Re}\langle u_0 - P_M u_0, P_M u_0\rangle \leq 0.$$

Dividindo por $|t|$ e fazendo $t \to \pm\infty$ temos que $\mathrm{Re}\langle u_0 - P_M u_0, w\rangle = 0$ como $iw \in M$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) temos o resultado. □

Teorema 3.4.1. *Se H é um espaço de Hilbert e $K \subset H$ é um convexo fechado então*

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Prova: Se $v_1 = P_K u_1$ e $v_2 = P_K u_2$ temos que

$$\mathrm{Re}\langle u_1 - v_1, w - v_1 \rangle \leq 0, \quad \forall w \in K \tag{3.2}$$

$$\mathrm{Re}\langle u_2 - v_2, w - v_2 \rangle \leq 0, \quad \forall w \in K. \tag{3.3}$$

Substituindo $w = v_2$ em (3.2) e $w = v_1$ em (3.3) e somando temos

$$\|v_1 - v_2\|^2 \leq \mathrm{Re}\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \leq \|u_1 - u_2\| \, \|v_1 - v_2\|$$

e o resultado segue. □

Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ então $M^\perp := \{u \in H : u \perp v, \ \forall v \in M\}$. É fácil ver que $M^\perp$ é sempre um subespaço vetorial fechado de H. Uma transformação linear $P : H \to M$ é dita uma projeção se $P^2 = P$. Se $P \in L(H)$ é uma projeção, $M = \mathrm{Im}(P)$ e $M^\perp = \mathrm{N}(P)$ dizemos que P é uma projeção ortogonal sobre M. Uma projeção ortogonal P é contínua se e somente se $M = \mathrm{Im}P$ é fechado.

Teorema 3.4.2. *Seja H um espaço de Hilbert e $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ fechado, então $M \oplus M^\perp = H$; isto é , cada $u \in H$ pode ser expresso unicamente como $u = w + v$ onde $w \in M$ e $v \in M^\perp$. Os vetores w e v são os únicos elementos de M e $M^\perp$ cuja distância a u é mínima; isto é, $w = P_M u$ e $v = P_{M^\perp} u$. Além disso P_M e $P_M^\perp = I - P_M$ são projeções contínuas com $\|P_M\| = \|P_{M^\perp}\| = 1$.*

Prova: Para $u \in H$ então $P_M u$ é o único elemento de M que minimiza a distância de u a M. Note que $M \cap M^\perp = \{0\}$ e $u = P_M u + (I - P_M)u \in M + M^\perp$ para todo $u \in H$. Além disso, se $z \in M^\perp$, $\|u - z\|^2 = \|P_M u + (I - P_M)u - z\|^2 = \|P_M u\|^2 + \|(I - P_M)u - z\|^2 \geq \|P_M u\|^2$ e $(I - P_M)u$ é o único ponto de $M^\perp$ que minimiza a distância de u a $M^\perp$. Segue que $(I - P_M)u = P_{M^\perp} u$.

Vejamos que P_M é uma projeção contínua. Primeiramente note que P_M é linear pois se $u, v \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então

$$P_M(\alpha u + v) = z$$

é o elemento de M que minimiza a distância a $\alpha u + z$ e

$$\|\alpha u + v - m\| = \|\alpha P_M u + P_M v - m\|^2 + \|\alpha(u - P_M u) + v - P_M v\|^2$$

e o mínimo ocorre quando $m = \alpha P_M u + P_M v$. Da definição de P_M segue que $P_M^2 = P_M$. Sabemos da Proposição 3.4.1 que $\|P_M u\| \leq \|u\|$ e do fato que $P_M u = u$ para todo $u \in M$ temos que $\|P_M\| = 1$. $\square$

Oitava Aula (100 minutos) $\uparrow$

Nona Aula (100 minutos) $\downarrow$

Se H é um espaço de Hilbert e $y \in H$ segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ define um funcional linear contínuo e que $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Então, a transformação $H \ni y \mapsto f_y \in H^*$ é uma isometria linear-conjugada entre H e H^*. O resultado a seguir mostra que esta isometria é sobrejetora:

Teorema 3.4.3 (Teorema de Representação de Riesz-Frechet)**.** *Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$.*

Prova: Unicidade é obvia. Se f é o funcional nulo então $y = 0$. Se $f \neq 0$, seja $M = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Então $M \subsetneq H$ e portanto $M^\perp \neq \{0\}$ pelo Teorema 3.4.2. Seja $z \in M^\perp$ com $\|z\| = 1$. Se $u = f(x)z - f(z)x$ então $u \in M$ e

$$0 = \langle u, z\rangle = f(x)\|z\|^2 - f(z)\langle x, z\rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(z)}z\rangle.$$

Portanto $f(x) = \langle x, y\rangle$ onde $y = \overline{f(z)}z$. $\square$

Segue que, Espaços de Hilbert são reflexivos em um sentido bastante forte: Não somente H é naturalmente isomorfo a H^{**} como também é isomorfo (através de uma transformação linear-conjugada) a H^*.

Um subconjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de H é chamado um conjunto ortonormal se $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in A$ e $u_\alpha \perp u_\beta$ para $\alpha \neq \beta$. Se $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência linearmente independente de vetores em H existe um procedimento usual para convertê-la em uma seqüência ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ tal que o espaço gerado por $\{v_1, \dots, v_N\}$ coincide com o espaço gerado por $\{u_1, \dots, u_N\}$. Este processo é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt* e consiste em tomar $u_1 = v_1/\|v_1\|$ e uma vez determinados $u_1, \dots, u_{N-1}$ tomar $u_N = \left[v_N - \sum_{n=1}^{N-1}\langle v_N, u_n\rangle u_n\right] \Big/ \|v_N - \sum_{n=1}^{N-1}\langle v_N, u_n\rangle u_n\|$.

Teorema 3.4.4 (Desigualdade de Bessel). *Se* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *é um conjunto ortonormal em* H*, então para* $u \in H$*,*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Em particular $\{\alpha \in A : \langle u, u_\alpha\rangle \neq 0\}$ *é enumerável.*

Prova: É suficiente mostrar que $\sum_{\alpha\in F} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|u\|$ para todo $F \subset A$ finito. Mas

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u - \textstyle\sum_{\alpha\in F}\langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle u, \textstyle\sum_{\alpha\in F}\langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha\right\rangle + \left\|\textstyle\sum_{\alpha\in F}\langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha\right\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\textstyle\sum_{\alpha\in F} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2 + \textstyle\sum_{\alpha\in F} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2 = \|u\|^2 - \textstyle\sum_{\alpha\in F} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos o Teorema de Pitágoras. □

Teorema 3.4.5. *Se* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *é um conjunto ortonormal em* H*, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) (Completamento) *Se* $\langle u, u_\alpha\rangle = 0$ *para todo* $\alpha \in A$*, então* $u = 0$*.*

b) (Identidade de Parseval) $\|u\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2$ *para todo* $u \in H$*.*

c) Para cada $u \in H$*,* $u = \sum_{\alpha\in A}\langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha$*, onde a soma tem apenas um número enumerável de termos não nulos e converge independentemente da ordem dos termos.*

Prova:

$\boxed{a \Rightarrow c}$ Se $x \in H$, seja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ qualquer enumeração dos α's para os quais $\langle u, u_\alpha\rangle \neq 0$. Pela Desigualdade de Bessel a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, u_{\alpha_j}\rangle|^2$ converge, logo pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left\|\sum_{j=m}^{n}\langle u, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right\|^2 = \sum_{j=m}^{n} |\langle u, u_{\alpha_j}\rangle|^2 \to 0, \quad \text{quando } m, n \to \infty.$$

Como H é completo, $\sum_{j=0}^{\infty}\langle u, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}$ é convergente. Se

$$v = u - \sum_{j=0}^{\infty}\langle u, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}$$

temos que $\langle v, u_\alpha\rangle = 0$ para todo α. Segue, de a), que $v = 0$.

$\boxed{c \Rightarrow b}$ Com a notação como acima, como na prova da Desigualdade de Bessel, temos

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_{\alpha_j}\rangle|^2 = \left\| u - \sum_{j=1}^{n}\langle u, u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right\|^2 \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

$\boxed{b \Rightarrow a}$ É óbvia. □

Um conjunto ortonormal tendo as propriedades (a-c) do Teorema 3.4.5 é chamado uma *base ortonormal* de H. Para cada $\alpha \in A$, defina $e_\alpha \in l^2(A)$ por $e_\alpha(\beta) = 0$ se $\alpha \neq \beta$ e $e_\alpha(\alpha) = 1$. A família $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é claramente ortonormal, e para qualquer $f \in l^2(A)$ temos $\langle f, e_\alpha\rangle = f(\alpha)$, de onde segue que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma base ortonormal.

Proposição 3.4.2. *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.*

Prova: Basta aplicar o Lema de Zorn para mostrar que a coleção de todos os conjuntos ortonormais, ordenado pela inclusão, tem um elemento maximal. A maximalidade é equivalente à propriedade a) do Teorema 3.4.5. □

Teorema 3.4.6. *Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se tem uma base ortonormal enumerável e neste caso toda base ortonormal de H é enumerável.*

Prova: Se $\{x_n\}$ é um conjunto enumerável denso em H, discartando recursivamente qualquer x_n que é combinação linear de $x_1, \dots, x_{n-1}$ obtemos uma seqüência linearmente independente $\{y_n\}$ e aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos uma seqüência ortonormal $\{u_n\}$ que gera um subespaço denso em H e portanto é uma base. Reciprocamente se

$\{u_n\}$ é uma base ortonormal, as combinações lineares finitas dos u_n's con coeficientes em um subconjunto enumerável e denso em $\mathbb{C}$ forma um subconjunto enumerável e denso em H. Além disso, se $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é outra base ortonormal, para cada n o conjunto $A_n = \{\alpha \in A : \langle u_n, v_\alpha\rangle \neq 0\}$ é enumerável. Pelo completamento de $\{u_n\}$, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, logo A é enumerável. $\square$

Se H_1 e H_2 são espaços de Hilbert com produtos escalares $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, uma *transformação unitária* de H_1 sobre H_2 é uma transformação linear sobrejetora $U : H_1 \to H_2$ que preserva produto escalar; isto é, $\langle Ux, Uy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$. É claro que toda transformação unitária é uma isometria e reciprocamente (da Identidade de Polarização) toda isometria de H_1 sobre H_2 é uma transformação unitária.

Proposição 3.4.3. *Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma base ortonormal de X. Então a correspondência $x \mapsto \hat{x}$ definida por $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$ é uma transformação unitária de H em $l^2(A)$.*

Prova: A transformação $x \mapsto \hat{x}$ é claramente linear, e é uma isometria de H em $l^2(A)$ pela identidade de parseval $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$. Se $f \in l^2(A)$ então $\sum_{\alpha\in A} |f(\alpha)|^2 < \infty$, e pelo teorema de Pitágoras as somas parciais da série $\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)u_\alpha$ (da qual apenas um número enumerável de termos são não nulos) formam uma seqüência de Cauchy; portanto $x = \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)u_\alpha$ existe em H e $\hat{x} = f$. $\square$

Nona Aula (100 minutos) ↑

3.5 Apêndice B: Teorema de Schauder

Antes de enunciar o Teorema de Schauder provamos o seguinte corolário do Teorema de Brouwer.

Corolário 3.5.1. *Seja K um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ e $T : K \to K$ contínua, então T tem um ponto fixo.*

Prova: Seja B uma bola fechada contendo K e P a restrição a B da projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre K (veja Teorema 3.4.1). A composta $T \circ P : B \to K \subset B$ é contínua; logo, tem um ponto fixo $x_0 \in B$. De $f(p(x_0)) = x_0 \in K$ temos que $P(x_0) = x_0$ e $f(x_0) = f(P(x_0)) = x_0$. $\square$

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1 (Schauder)**.** *Seja E um espaćo vetorial normado, $K \subset E$ compacto e convexo. Então qualquer função contínua $T : K \to K$ tem um ponto fixo.*

Este teorema é uma conseqüência imediata do seguinte resultado

Teorema 3.5.2. *Seja S um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado E e seja $T : S \to S$ uma função contínua tal que $T(S) \subset K \subset S$ com K compacto; então T tem um ponto fixo*

Prova: Em primeiro lugar vamos mostrar dado $\epsilon > 0$ que existe um conjunto compacto e convexo $K_\epsilon \subset S$ contido em um subespaço de dimensão finita de E e uma função contínua $P_\epsilon : K \to K_\epsilon$ tal que, para toco $x \in K$, $\|x - P_\epsilon x\| < \epsilon$. De fato: Como K é compacto existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que todo $x \in K$ dista de algum deles menos que ϵ. Para $j = 1, \dots, n$ definimos uma função contínua $g_j : K \to \mathbb{R}$ por

$$g_j(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - x_j\|, \text{ se } \|x - x_j\| \leq \epsilon \\ 0, \text{ se } \|x - x_j\| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Temos então que $\sum_{j=1}^n g_j(x) > 0$ para todo $x \in K$ e, definindo

$$h_j(x) = \frac{g_j(x)}{\sum_{k=1}^n g_k(x)}, \; j = 1, \ldots, n,$$

temos que $h_j(x) \geq 0$, $\sum_{j=1}^n h_j(x) = 1$, $\forall x \in K$ e $h_j(x) = 0$, se $\|x - x_j\| \geq \epsilon$. Se K_ϵ denota a envoltória convexa de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ temos que $K_\epsilon \subset S$ está contido em um subespaço de dimensão finita de E, é compacto e convexo. Definimos $P_\epsilon : K \to K_\epsilon$ por

$$P_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^n h_j(x) x_j.$$

P_ϵ é contínua e

$$x - P_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^n h_j(x)(x - x_j), \; x \in K.$$

Como, no segundo membro, somente as parcelas para as quais $\|x - x_j\| < \epsilon$ são não nulas temos que

$$\|x - P_\epsilon(x)\| = \sum_{j=1}^n h_j(x)\|x - x_j\| < \epsilon, \; x \in K.$$

Agora mostramos que para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in S$ tal que $\|x_\epsilon - T x_\epsilon\| < \epsilon$. De fato, se $P_\epsilon \circ T : K_\epsilon \to K_\epsilon$ segue do Corolário 3.5.1 que existe $x_\epsilon \in K_\epsilon$ tal que $P_\epsilon(T_\epsilon x_\epsilon) = x_\epsilon$. Segue da primeira parte que $\|P(T x_\epsilon) - T x_\epsilon\| < \epsilon$, isto é, $\|x_\epsilon - T x_\epsilon\| < \epsilon$.

Segue do que foi visto que, para todo n, existe $x_n \in S$ tal que $\|x_n - T x_n\| < \frac{1}{n}$. Temos que $\{T x_n\} \subset K$ e portanto existe subseqüência convergente $\{T x_{n_k}\}$. Se x é o limite dessa subseqüência, temos que $\{x_n\}$ é convergente com limite x e portanto, da continuidade de T, $Tx = x$. $\square$

3.6 Lista de Exercícios

1. Se X é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ então as operações

   - $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$,
   - $\mathbb{K} \times X \ni (\lambda, y) \mapsto \lambda x \in X$ e
   - $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$

   são contínuas. Além disso, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, para todo $x, y \in X$.

2. Mostre as igualdades em (3.1) e que $\|\cdot\| \to [0, \infty)$ dada aí é uma norma.

3. Mostre que se X, Y são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, $L(X, Y)$ é o espaço das transformações lineares e limitadas de X em Y e $\|\cdot\| : L(X, Y) \to [0, \infty)$ é definida por (3.1) então $L(X, Y)$ é um espaço vetorial normado.

4. Mostre que se X, Y são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $L(X, Y)$ é completo então Y é completo (veja [3]).

5. Mostre que, se X, Y, Z são espaços vetoriais normados, $T \in L(X, Y)$ e $S \in L(Y, Z)$ então $S \circ T \in L(X, Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

6. Seja X um espaço vetorial normado. Mostre que um funcional linear $f : X \to \mathbb{K}$ é contínuo se e somente se $N(f) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado.

7. Seja X um espaço vetorial normado e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado de X. Então, dado $0 < \epsilon < 1$, existe $x_\epsilon \in X$, $\|x_\epsilon\| = 1$ tal que $\inf_{m \in M} \|x_\epsilon - m\| \geq 1 - \epsilon$.
   Sugestão: Se $y \in X \backslash M$ e $\alpha = \inf_{m \in M} \|y - m\|$ seja m_ϵ tal que $\|y - m_\epsilon\| \leq \alpha(1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon})$ e $x_\epsilon = (y - m_\epsilon)/\|y - m_\epsilon\|$.

8. Seja X um espaço vetorial normado e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial de X. Em X, defina a seguinte relação de equivalência, $x \sim y$ se $x - y \in M$. Denote por X/M o conjunto das classes de equivalência de elementos de

X e por $x + M$ a classe de equivalência do elemento $x \in X$. Se M é fechado, mostre que:

- Se em X/M definimos a soma $+ : X \times X \to X$ e multiplicação por escalar $\bullet : K \times X \to X$ por $(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$ e $\lambda \bullet (x + M) = \lambda x + M$ então X/M é um espaço vetorial (chamado espaço quociente de X por M).
- $\|x + M\| = \inf\{\|x + y\| : y \in M\}$ é uma norma em X/M.
- Para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $\|x + M\| \geq 1 - \epsilon$.
- A Projeção $\pi(x) = x + M$ de X em X/M tem norma 1.
- Se X é completo então X/M é completo.

9. Mostre que se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita então existe uma seqüência $\{x_n\}$ em X com $\|x_n\| = 1$ e que não possui subseqüência de Cauchy. Conclua que se X é um espaço de Banach de dimensão infinita então a bola fechada unitária em X não é compacta.

10. Seja X um espaço de Banach e P uma projeção. Mostre que P é contínua se e somente se sua imagem e núcleo são é fechados.

11. Mostre que $(\ell_p)^* = \ell_q$, $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Conclua que ℓ_p é reflexivo, $1 < p < \infty$.
Sugestão: Seja $\alpha_j = f(e_j)$, $1 \leq j < \infty$ então $f(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$. Defina $\{\eta_j\}$ por:

- *Para $1 \leq j \leq n$ e $f(e_j) \neq 0$, $\eta_j = f(e_j)|f(e_j)|^{q-2}$*
- *Para $j > n$ ou $f(e_j) = 0$, $\eta_j = 0$.*

Então $\{\eta_j\} \in \ell_q$ e $f(\{\eta_j\}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^q \leq \|f\|_{(\ell_p)^*} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^q\right)^{\frac{q-1}{q}}$. Segue que $\{\alpha_j\} \in \ell_q$ e $\|\{\alpha_j\}\|_{\ell_q} \leq \|f\|_{(\ell_p)^*}$. A igualdade segue da Desigualdade de Hölder. $(\ell_p)^* \ni f \mapsto \{\alpha_j\} \in \ell_q$ é uma isometria linear sobrejetora.

12. Mostre que:

    - Se X, Y são espaços vetoriais, $T : X \to Y$ é uma transformação linear e $C \subset X$ é convexo então, $T(C) \subset Y$ é convexo.
    - Se X é um espaço vetorial normado e $C \subset X$ é convexo então C^- é convexo.
    - Se X é um espaço vetorial e $A \subset X$ a envoltória convexa de A é o conjunto dos pontos da forma $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$ com $0 \leq t_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, $a_i \in A$ para $1 \leq i \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a envoltória convexa de A ($\mathrm{co}(A)$) é o menor convexo que contém A.
    - Se X é um espaço vetorial e $C \subset X$ é convexo então $C + C = 2C$. Mostre que isto não vale se C não é convexo.

13. Em um espaço com produto interno H, mostre que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

14. Em um espaço com produto interno H, mostre que a função $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ é uma norma.

15. Em um espaço com produto interno H, mostre que se $u \perp v$ então vale o teorema de Pitágoras $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

16. Mostre que em um espaço com produto interno (real ou complexo) H vale a identidade do paralelogramo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \quad \forall u, v \in H.$$

17. Mostre que um espaço vetorial normado real H onde vale a identidade do paralelogramo é um espaço com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2], \quad \forall u, v \in H.$$

18. Mostre que um espaço vetorial normado complexo H onde vale a identidade do paralelogramo é um espaço com produto interno dado pela

identidade de polarização

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2], \quad \forall u, v \in H.$$

19. Se H é um espaço de Hilbert e $M, N \underset{\text{SEV}}{\subset} H$, mostre que:

    - $M^{\perp\perp} = M^{-}$,
    - Se $M \subset N$ então $N^{\perp} \subset M^{\perp}$,
    - $(M+N)^{\perp} \subset M^{\perp} + N^{\perp}$

20. Seja H um espaço de Hilbert e P uma projeção ortogonal. Mostre que P é contínua se e somente se sua imagem é fechada .

21. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e T é uma isometria linear de H_1 sobre H_2. Mostre que T é unitária.

3.7 Primeira Prova

1.ª Prova de SMA-5926 - Análise I

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Nome:______________________________

23.09.2002

Questões	Valor	Notas
01ª	3.0	
02ª	1.0	
03ª	1.0	
04ª	2.0	
05ª	1.0	
06ª	1.0	
07ª	1.0	
Total	10.0	

---

1. Seja $C_H[a,b]$ o espaço das funções contínuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ com o produto escalar
$$\langle f,g\rangle_H=\int_a^b f(x)g(x)dx$$
e denote por $L^2(a,b)$ o completamento de $C_H[a,b]$. Mostre que
   (a) $L^2(a,b)$ é um espaço de Hilbert separável
   (b) $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ldots\}$ é uma família ortonormal no espaço $L^2(0,2\pi)$.
   (c) Se $f\in C_H[0,2\pi]$,
$$f(x)=a_0+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$
onde
$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,$$
$$b_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,\ldots.$$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2]$, $f \in C_H[0, 2\pi]$.

2. Seja X um espaço vetorial e $\|\cdot\|_i : X \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$, duas normas tais que X com qualquer dessas normas é um espaço de Banach. Se existe $c > 0$ tal que $\|\cdot\|_1 \le c\|\cdot\|_2$ então as normas são equivalentes.

3. Seja X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Dizemos que $T \in L(X)$ é compacta se T leva conjuntos limitados de X em conjuntos relativamente compactos de X. Mostre que $C(X) = \{T \in L(X) : T \text{ é compacta}\}$ é um espaço de Banach. Mostre que $\{\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N}) : x = \{j^{-1}x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N}) \text{ e } \|x\|_{\ell_2(\mathbb{N})} \le 1\}$ é um conjunto relativamente compacto de $\ell_2(\mathbb{N})$.

4. (a) Se X é um espaço métrico completo e $T : X \to X$ é tal que T^n é uma contração então, T tem um único ponto fixo.

   (b) Seja $X = C[0, 1]$ e $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $T \in L(X)$ definida por
   $$(Tf)(x) = \int_0^x K(x, y)f(y)dy$$
   é compacta e que T^n é uma contração para n suficientemente grande.

5. Se X é um espaço de Banach e $T : X \to X$ é uma transformação linear compacta então $N(I - T)$ tem dimensão finita.

6. Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Mostre que $X_A = D(A)$ com a norma $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$ é um espaço de Banach. Se A é bijetora e $i : X_A \to X$ é compacta então $A^{-1} \in L(X)$ é compacta.

7. Se X é um espaço de Banach e $T \in L(X)$ é tal que $\|T\| < 1$ então $I - T$ tem inversa limitada e $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Se $T \in L(X)$ tem inversa limitada e $S \in L(X)$ é tal que $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ então, S tem inversa limitada.

Capítulo 4

Medidas (Folland)

Décima Aula (100 minutos) $\downarrow$

Um dos problemas mais veneráveis em geometria é determinar a área ou volume de uma região no plano ou no espaço. As técnicas de Cálculo Integral fornecem uma resposta satisfatória para as regiões que são limitadas por curvas ou superfícies *bem comportadas* mas são inadequadas para lidar com conjuntos mais complicados (mesmo em dimensão um). Idealmente, gostaríamos de encontrar uma função $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ que associa a cada $E \subset \mathbb{R}^n$ um número real estendido $\mu(E) \in [0, \infty]$ (a medida de E) de forma que $\mu(E)$ coincide com o valor obtido pelas técnicas de Cálculo Integral quando estas se aplicam. Tal função μ certamente deveria satisfazer as seguintes propriedades:

$a)$ A medida da união enumerável de conjuntos disjuntos é a soma das medidas dos conjuntos.

$b)$ Se o conjunto E pode ser transformado no conjunto F por translação, rotação ou reflexão então $\mu(E) = \mu(F)$

$c)$ A medida do cubo unitário $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1,\ 1 \leq i \leq n\}$ é um.

Infelizmente estas condições são mutuamente inconsistentes. Para verificar esta inconsistência para $n = 1$ começamos definindo uma relação de equivalência $\sim$ em $[0, 1]$ declarando $x \sim y$ se $x - y$ é racional. Seja N um subconjunto de $[0,1]$ que contém exatamente um elemento de cada classe de equivalência (usando o Axioma da Escolha). A seguir, seja $R = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ e para cada $r \in R$ seja

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}.$$

Então e $[0,1)$ é a união disjunta dos N_r, $r \in R$. Se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ tem as propriedades acima

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1 - r)) + \mu(N \cap [1 - r, 1)) = \mu(N_r), \quad \forall r \in R.$$

Segue que $1 = \mu[0,1) = \sum_{r \in R} \mu(N_r)$ o que é um absurdo.

Uma vez que há conjuntos tão estranhos que não podemos medir o seu conteúdo, vamos procurar construir uma tal função μ para uma classe de conjuntos que contém todos aqueles conjuntos que tenhamos alguma chance de encontrar na prática (a menos que estejamos deliberadamente tentando encontrar exemplos patológicos).

4.1 $\sigma-$Álgebras

Seja X um conjunto não vazio. Uma *álgebra* de conjuntos em X é uma coleção não vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que é fechada por união finita e complementos. Uma *$\sigma-$álgebra* é um álgebra que é fechada por união enumerável.

Note que $\cap_j E_j = (\cup_j E_j^c)^c$ implica que uma álgebra (σ-álgebra) é fechada por interseção finita (enumerável). Além disso, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra então $\emptyset = A \cap A^c$ e $X = A \cup A^c$ pertencem a $\mathcal{A}$.

É útil observar que uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra se é fechada por união enumerável *disjunta*. De fato, suponha que $\{E_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$. Seja,

$$F_k = E_k \backslash [\cup_{j=1}^{k-1} E_j] = E_k \cap [\cup_{j=1}^{k-1} E_j]^c \in \mathcal{A}.$$

Segue que $\{F_k\} \subset \mathcal{A}$ é uma família disjunta e $\cup_{k=1}^n F_k = \cup_{k=1}^n E_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos de $\sigma-$Álgebras:

- Se X é um conjunto não vazio qualquer $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ são $\sigma-$álgebras.

- Se X é não-enumerável

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ é enumerável ou } E^c \text{ é enumerável}\}$$

  é uma $\sigma-$álgebra.

- A interseção de qualquer família de $\sigma-$álgebras em um conjunto X é ainda uma $\sigma-$álgebra.

- Se X é um conjunto não vazio e $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ existe uma única menor $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ que contém $\mathcal{E}$ (a interseção). $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ é chamada $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{E}$. É imediato que, se $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ então, $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

- Se X é um espaço métrico (ou espaço topológico), a $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_X$ gerada pelos conjuntos abertos em X é chamada *$\sigma-$álgebra de Borel* em X.

  1. $\mathcal{B}_X$ inclui todos os conjuntos abertos e todos os conjuntos fechados.
  2. $\mathbf{G}_\delta = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \text{ é interseção enumerável de abertos}\} \subset \mathcal{B}_X$,
  3. $\mathbf{F}_\sigma = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \text{ é união enumerável de fechados}\} \subset \mathcal{B}_X$
  4. $\mathbf{G}_{\delta\sigma} = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \text{ é união enumerável de } \mathbf{G}_\delta\} \subset \mathcal{B}_X$
  5. $\mathbf{F}_{\sigma\delta} = \{U \in \mathcal{P}(X) : U \text{ é interseção enumerável de } \mathbf{F}_\sigma\} \subset \mathcal{B}_X$

Proposição 4.1.1. *$\mathcal{B}_\mathbb{R}$ é gerada pelos seguintes conjuntos:*

a) os intervalos abertos: $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\}$,

b) os intervalos fechados: $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\}$,

c) os intervalos semi-abertos: $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a < b\}$ *ou* $\mathcal{E}_4 = \{[a,b) : a < b\}$,

d) os intervalos abertos semi-infinitos: $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, *e) os intervalos fechados semi-infinitos:* $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Prova: É fácil ver que todos os conjuntos acima estão em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e portanto $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Para mostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ observamos que todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é união enumerável de intervalos abertos e portanto basta mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ contém todos os intervalos abertos para $1 \leq j \leq 8$. De fato, para $a < b$ e $n_0 > \frac{2}{b-a}$,

- $\mathcal{E}_1$, ok.
- $\mathcal{E}_2$, basta notar que $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$.
- $\mathcal{E}_3$, basta notar que $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} (a, b - \frac{1}{n}]$.
- $\mathcal{E}_4$, basta notar que $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{n}, b)$.
- $\mathcal{E}_5$, basta notar que $(a, b] = (a, \infty) \backslash (b, \infty)$ e $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} (a, b - \frac{1}{n}]$.
- $\mathcal{E}_6$, basta notar que $[a, b) = (-\infty, b) \backslash (-\infty, a)$ e $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{n}, b)$.
- $\mathcal{E}_7$, basta notar que $[a, b) = [a, \infty) \backslash [b, \infty)$ e $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{n}, b)$.
- $\mathcal{E}_8$, basta notar que $(a, b] = (-\infty, b] \backslash (-\infty, a]$ e $(a, b) = \cup_{n \geq n_0} [a, b - \frac{1}{n})$.□

Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção de conjuntos não vazios, $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ o seu produto cartesiano e $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ dada por $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$, $f \in X$, $\alpha \in A$. Se $\mathcal{M}_\alpha$ é uma $\sigma-$álgebra em X_α para cada $\alpha \in A$, a *$\sigma-$álgebra produto* em X é a $\sigma-$álgebra gerada por

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha,\ \alpha \in A\}.$$

Denotamos esta $\sigma-$álgebra por $\bigotimes_{\alpha \in A} M_\alpha$.

Proposição 4.1.2. *Se A é enumerável, então $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ é a $\sigma-$álgebra gerada pela família de conjuntos $\{\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$.*

Prova: Se $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, então $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \Pi_{\beta \in A} E_\beta$ onde $E_\beta = X_\beta$ para $\beta \neq \alpha$; por outro lado $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha = \cap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ e o resultado segue. □

Proposição 4.1.3. *Suponha que a $\sigma-$ álgebra $\mathcal{M}_\alpha$ é gerada por $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha \in A$. Então $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ é gerado por $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$. Se A é enumerável e $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$ é gerado por $\mathcal{F}_2 = \{\Pi_{\alpha\in A}E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\}$.*

Prova: Obviamente $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$. Por outro lado, para cada α, a coleção $\{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ é uma $\sigma-$álgebra em X_α que contém $\mathcal{E}_\alpha$ e portanto $\mathcal{M}_\alpha$. Em outras palavras $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$ para todo $E \in \mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \in A$, e portanto $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. A segunda afirmativa segue da primeira como na prova da Proposição 4.1.2. $\square$

Proposição 4.1.4. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços métricos e $X = \Pi_{j=1}^n X_j$, com a métrica produto. Então $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. Se os X_j's são separáveis, então $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.*

Prova: Pela Proposição 4.1.3, $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$ é gerada pelos conjuntos $\pi_j^{-1}(U_j)$, $1 \leq j \leq n$, onde U_j é aberto em X_j. Como estes conjuntos são abertos em X segue que $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. Suponha agora que C_j é um conjunto enumerável e denso em X_j, e seja $\mathcal{E}_j$ a coleção de bolas em X_j com raio racional e centro em C_j. Então todo conjunto aberto em X_j é uma união de membros de $\mathcal{E}_j$ (de fato união enumerável pois $\mathcal{E}_j$ é enumerável). Além disso, o conjunto dos pontos em X cuja $j-$ésima coordenada está em C_j para todo j é um subconjunto enumerável denso de X, e as bolas de raio r em X são meramente produto de bolas de raio r nos X_j's. Segue que $\mathcal{B}_{X_j}$ é gerado por $\mathcal{E}_j$ e $\mathcal{B}_X$ é gerada por $\{\Pi_{j=1}^n E_j : E_j \in \mathcal{E}_j\}$. Portanto $\mathcal{B}_X = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$ pela Proposição 4.1.3. $\square$

Corolário 4.1.1. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Décima Aula (100 minutos) ↑

Décima-Primeira Aula (100 minutos) $\downarrow$

A seguir apresentamos um resultado técnico que será necessário mais tarde. Dizemos que $\mathcal{E}$ é uma *família elementar* $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X se

- $\emptyset \in \mathcal{E}$,
- se $E, F \in \mathcal{E}$ então $E \cap F \in \mathcal{E}$,
- se $E \in \mathcal{E}$ então E^c é uma união disjunta finita de elementos de $\mathcal{E}$.

Proposição 4.1.5. *Se $\mathcal{E}$ é uma família elementar, a coleção $\mathcal{A}$ de uniões finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{E}$ é uma álgebra.*

Prova: Se $A, B \in \mathcal{E}$ e $B^c = \cup_{j=1}^{J} C_j$ ($C_j \in \mathcal{E}$, disjuntos), então $A \backslash B = \cup_{j=1}^{J}(A \cap C_j)$ e $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$, onde estas uniões são disjuntas, logo $A \backslash B \in \mathcal{A}$ e $A \cup B \in \mathcal{A}$. Daí, segue por indução que se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$, então $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$; de fato, por indução, podemos assumir que $A_1, \ldots, A_{n-1}$ são disjuntos, e então $\cup_{j=1}^{n} A_j = A_n \cup \left(\cup_{j=1}^{n-1}(A_j \backslash A_n)\right)$, que é uma união disjunta. Para ver que $\mathcal{A}$ é fechada por conplementos, suponha que $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ e $A_m^c = \cup_{j=1}^{J_m} B_m^j$ com $B_m^1, \ldots, B_m^{J_m}$ elementos disjuntos de $\mathcal{E}$. Então

$$\begin{aligned} \left(\cup_{m=1}^{n} A_m\right)^c &= \cap_{m=1}^{n}\left(\cup_{j=1}^{J_m} B_m^j\right) \\ &= \cup\{B_1^{j_1} \cap \cdots \cap B_n^{j_n} : 1 \leq j_m \leq J_m, 1 \leq m \leq n\}, \end{aligned}$$

que está em $\mathcal{A}$. $\square$

4.2 Medidas

Seja X um conjunto equipado com uma $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$. Uma *medida* é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência disjunta de conjuntos em $\mathcal{M}$, então

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

A segunda propriedade acima é chamado $\sigma-$*aditividade*. Ela implica *aditividade finita*:

ii)' se $E_1, \ldots, E_n$ são conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, então

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j),$$

porque podemos tomar $E_j = \emptyset$ para $j > n$. A função μ que satisfaz $i)$ e $ii)'$ mas não necessariamente $ii)$ é chamada uma *medida finitamente aditiva*.

Se X é um conjunto e $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma $\sigma-$álgebra, $(X, \mathcal{M})$ é chamado um espaço mensurável e os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos mensuráveis. Se μ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$, então $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado um espaço de medida.

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(X) < \infty$ dizemos que μ é uma *medida finita* ($\mu(E) + \mu(E^c) = \mu(X) \Rightarrow \mu(E) < \infty,\ \forall\ E \in \mathcal{M}$). Se $X = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$ com $\mu(E_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, dizemos que μ é uma medida $\sigma-$finita. Mais geralmente se $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$ com $\mu(E_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, dizemos que E é um conjunto $\sigma-$finito para μ. Se para cada $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{M}$ com $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < \infty$, μ é chamada uma medida *semifinita*.

Toda medida $\sigma-$finita é semifinita, mas a recíproca não vale.

Exemplos de Medidas

- Seja X um conjunto não vazio, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e $f : X \to [0, \infty]$ uma função qualquer. Então f determina uma medida em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$. Se $f(x) < \infty$, $\forall x \in X$, então μ é semifinita e μ é sigma finita se e somente se $\{x \in X : f(x) < 0\}$ é enumerável. Se $f(x) = 1$, $\forall x \in X$, μ é chamada *medida da contagem*. Se $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, $x \neq x_0$, μ é chamada Medida de Dirac.

- Se X é não-enumerável, e $\mathcal{M}$ é a $\sigma-$álgebra dos subconjuntos E tais que E é enumerável ou tem complementar enumerável. A função μ

definida em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) = 0$ se E é enumerável e $\mu(E) = 1$ se E tem complementar enumerável é uma medida.

- Se X é um conjunto infinito e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Defina $\mu(E) = 0$ se E é finito, $\mu(E) = \infty$ se E é infinito. Então μ é uma medida finitamente aditiva mas não é uma medida.

Teorema 4.2.1. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.*

a) **(Monotonicidade)** *Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

b) **(Sub-aditividade)** *Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.*

c) **(Semi-continuidade Inferior)** *Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathcal{M}$ tal que e $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

d) **(Semi-continuidade Superior)** *Se $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

Prova: a) Se $E \subset F$, então $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E)$.

b) Seja $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $F_1 = E_1$ e $F_k = E_k \cap [\cup_{j=1}^{k-1} E_j]^c$, $k > 1$. Então os F_k's são disjuntos e $\cup_{j=1}^{n} F_j = \cup_{j=1}^{n} E_j$ para todo n. Portanto, de a)

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

c) Fazendo $E_0 = \emptyset$, temos

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

d) Seja $F_j = E_1 \backslash E_j$; então $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, $\mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$, e $\cup_{j=1}^{\infty} F_j = E_1 \backslash (\cap_{j=1}^{\infty} E_j)$. Segue de c) que

$$\mu(E_1) = \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) + \lim_{j\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)].$$

Como $\mu(E_1) < \infty$, podemos subtraí-lo em ambos os lados e o resultado segue.
$\square$

Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, um conjunto $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ é dito de *medida nula*. Segue da subaditividade que a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula. Se uma afirmativa sobre pontos $x \in X$ vale exceto possivelmente para x em um conjunto de medida nula dizemos que a afirmativa vale quase sempre (q.s.) ou para quase todo x ou em quase toda parte (q.t.p.). Se $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ e $F \subset E$ então $\mu(F) = 0$ contanto que $F \in \mathcal{M}$ (o que não precisa ser verdade). Uma medida cujo domínio contém todos os subconjuntos de conjuntos com medida nula é chamada *completa*. Completamento sempre pode ser obtido aumentando o domínio da medida como segue

Décima-Primeira Aula (100 minutos) ↑

Décima-Segunda Aula (100 minutos) $\downarrow$

Teorema 4.2.2. *Suponha que* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *é um espaço de medida. Seja* $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ *e* $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ *e* $F \subset N$ *para algum* $N \in \mathcal{N}\}$. *Então* $\overline{\mathcal{M}}$ *é uma* $\sigma-$*álgebra, e existe uma única extensão* $\bar{\mu}$ *de* μ *a uma medida completa sobre* $\overline{\mathcal{M}}$.

Prova: Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são fechadas por união enumerável, $\overline{\mathcal{M}}$ também o é. Se $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ onde $E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N \in \mathcal{N}$, podemos assumir que $E \cap N = \emptyset$. Então $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, logo $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \backslash F)$. Mas $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ e $N \backslash F \subset N$ e $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. Portanto $\overline{\mathcal{M}}$ é uma $\sigma-$álgebra.

Se $E \cup F \in \mathcal{M}$ é como acima, definimos $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Esta função está bem definida pois se $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ com $E_i \in \mathcal{M}$ e $F_i \subset N_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2$, então $E_1 \subset E_2 \cup N_2$ $(E_2 \subset E_1 \cup N_1)$ e $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$ $(\mu(E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(N_1) = \mu(E_1))$. É fácil verificar que $\bar{\mu}$ é uma medida completa sobre $\overline{\mathcal{M}}$ e que $\bar{\mu}$ é a única medida em $\overline{\mathcal{M}}$ que estende μ. $\square$

A medida $\bar{\mu}$ do teorema anterior é chamada o *completamento da medida* μ e $\overline{\mathcal{M}}$ é chamada o *completamento da* $\sigma-$*álgebra* $\mathcal{M}$ relativamente a μ.

4.3 Medida Exterior

Nesta seção serão desenvolvidas as ferramentas que utilizaremos para construir medidas. Como motivação consideramos o procedimento utilizado em cálculo para definir área de uma região limitada E do plano. Desenhamos uma grade de retângulos e aproximamos a área de E inferiormente pela soma das áreas dos retângulos da grade que estão contidos em E e superiormente pela soma das áreas dos retângulos que interseptam E. O limite dessas aproximações quando a grade é feita mais e mais fina são a "área interior" e "area exterior" e se elas coincidem o valor comum é chamado área de E. A idéia chave aqui é a de área exterior pois se R é um retângulo grande contendo E a área interior de E é a área de R menos a área exterior de $R \backslash E$.

A generalização da noção de área exterior é feita da seguinte maneira. Uma *medida exterior* em um conjunto não vazio X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ que satisfaz

- $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subset B$,
- $\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

A maneira mais comum de se obter medidas exteriores é começar com uma família $\mathcal{E}$ de conjuntos para os quais uma noção de medida está definida (tais como retângulos) e então aproximar conjuntos arbitrários "pelo exterior" por união enumerável de elementos de $\mathcal{E}$. A construção precisa é feita como segue.

Proposição 4.3.1. *Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ tais que $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $A \subset X$, defina*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Prova: Para $A \subset X$ existe $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ (já que $\emptyset, X \in \mathcal{E}$) e portanto μ^* está bem definida. É claro que $\mu^*(\emptyset) = 0$ e que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ sempre que $A \subset B$ já que qualquer cobertura de B por elementos de $\mathcal{E}$ é também uma cobertura de A. Resta apenas mostrar a subaditividade. Suponha que $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\epsilon > 0$. Para cada j existe $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tal que $A_j \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$. Então, se $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, temos que $A \subset \cup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\mu^*(A) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário temos a sub-aditividade. $\square$

O passo fundamental que nos leva de medidas exteriores a medidas é o seguinte. Se μ^* é uma medida exterior sobre X, um conjunto $A \subset X$ é dito *μ^*-mensurável* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \text{para todo } E \subset X.$$

É claro que a desigualdade $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ vale para qualquer A e E e que a igualdade vale se $\mu^*(E) = \infty$, logo A é μ^*-mensurável se e somente se

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \text{para todo } E \subset X, \ \mu^*(E) < \infty.$$

A motivação para a definição de conjuntos mensuráveis encontra-se no seguinte: Se $E \supset A$ é bem comportado então a igualdade $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ nos diz que a medida exterior de A coincide com a medida interior $(\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c))$ de A. O salto de "conjuntos bem comportados contendo A" para todos os conjuntos é justificado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.3.1 (Carathéodory)**.** *Se μ^* é uma medida exterior em X, a coleção $\mathcal{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é uma $\sigma-$álgebra e a restrição de μ^* a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.*

Prova: Primeiramente observamos que $\mathcal{M}$ é fechada por complementos pois a definição de μ^*-mensurabilidade de A é simétrica em A e A^c. Em seguida, se $A, B \in \mathcal{M}$ e $E \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \\ &+\mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Mas $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ e pela subaditividade

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)),$$

e portanto, de (4.1),

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Segue que $A \cup B \in \mathcal{M}$ e que $\mathcal{M}$ é uma álgebra. Adicionalmente, se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \emptyset$

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

portanto μ^* é finitamente aditiva em $\mathcal{M}$.

Para mostrar que $\mathcal{M}$ é uma $\sigma-$álgebra, é suficiente mostrar que $\mathcal{M}$ é fechada por uniões enumeráveis de conjuntos disjuntos. Se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, seja $B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$ e $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Então para todo $E \subset X$, $\mu^*(E) < \infty$,

$$\mu^*(E\cap B_n) = \mu^*(E\cap B_n\cap A_n)+\mu^*(E\cap B_n\cap A_n^c) = \mu^*(E\cap A_n)+\mu^*(E\cap B_{n-1}),$$

e segue, por indução, que $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$. Portanto,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(\cup_{j=1}^{\infty}(E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Segue que $B \in \mathcal{M}$ e tomando $B = E$, $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, logo μ^* é $\sigma-$aditiva em $\mathcal{M}$. Finalmente, se $\mu^*(A) = 0$, para todo $E \subset X$ temos que

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

de forma que $A \in \mathcal{M}$ e μ^* restrita a $\mathcal{M}$ é uma medida completa. $\square$

Nossa primeira aplicação do Teorema de Carathéodory será na extensão de medidas de álgebras para $\sigma-$algebras. Mais precisamente, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma álgebra, uma função $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ será chamada uma pré-medida se

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência de conjuntos disjuntos na álgebra $\mathcal{A}$ tal que $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, então $\mu_0(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

Em particular uma pré-medida é finitamente aditiva pois podemos tomar $A_j = \emptyset$ a partir de um certo índice. Se μ_0 é uma pré-medida em $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, ela induz uma medida exterior em X tomando

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A},\ E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}. \tag{4.2}$$

Décima-Segunda Aula (100 minutos) ↑

Décima-Terceira Aula (100 minutos) $\downarrow$

Proposição 4.3.2. *Se μ_0 é uma pré-medida em uma álgebra $\mathcal{A}$ e μ^* é definida por (4.2), então*

a) ${\mu^*}_{|\mathcal{A}} = \mu_0$;

b) todo conjunto em $\mathcal{A}$ é μ^*-mensurável.

Prova: a) Suponha que $E \in \mathcal{A}$. Se $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_j \in \mathcal{A}$, seja $B_n = E \cap (A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j)$. Então os B_n's são membros disjuntos de $\mathcal{A}$ cuja união é E, logo $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$. Segue que $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$, a outra desigualdade é óbvia pois $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_1 = E$ e $A_j = \emptyset$, $j \geq 2$.

b) Se $A \in \mathcal{A}$, $E \subset X$ com $\mu^*(E) < \infty$ e $\epsilon > 0$, existe uma seqüência $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ com $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Como μ_0 é aditiva em $\mathcal{A}$,

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Como ϵ é arbitrário, A é μ^*-mensurável. $\square$

Teorema 4.3.2. *Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Existe uma medida μ em $\mathcal{M}$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ é μ_0 ($\mu = {\mu^*}_{|\mathcal{M}}$ com μ^* dada por (4.2)). Se ν é outra medida em $\mathcal{M}$ que estende μ_0, então $\nu(E) \leq \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, com igualdade sempre que $\mu(E) < \infty$. Se μ_0 é $\sigma-$finita, então μ é a única extensão de μ_0 a uma medida em $\mathcal{M}$.*

Prova: A primeira afirmativa segue do Teorema de Carathéodory e da Proposição 4.3.2 pois a $\sigma-$álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis contém $\mathcal{A}$ e portanto $\mathcal{M}$. Para a segunda afirmativa, se $E \in \mathcal{M}$ e $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ onde $A_j \in \mathcal{A}$, então $\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$, e portanto $\nu(E) \leq \mu(E)$. Também, se fazemos $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, temos

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \mu(A).$$

Se $\mu(E) < \infty$, podemos escolher os A_j's tais que $\mu(A) < \mu(E) + \epsilon$, portanto $\mu(A \backslash E) < \epsilon$, e

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \backslash E) \leq \nu(E) + \mu(A \backslash E) \leq \nu(E) + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, $\mu(E) = \nu(E)$. Finalmente, suponha que $X = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $\mu_0(A_j) < \infty$, onde podemos assumir que os A_j's são disjuntos. Então para qualquer $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E),$$

logo $\nu = \mu$. □

4.4 Medidas de Borel em $\mathbb{R}$

Agora estamos em condições de construir uma teoria definitiva para medir subconjuntos de $\mathbb{R}$ baseada na idéia que a medida de um intervalo é o seu comprimento. Começamos com uma construção mais geral e ligeiramente mais complicada que produz uma grande família de medidas em $\mathbb{R}$ com domínio $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Estas medidas são chamadas *medidas de Borel* em $\mathbb{R}$.

Suponha que μ é uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$ e seja $F(x) = \mu(-\infty, x]$. Então F é crescente (pelo Teorema 4.2.1 a)) e contínua à direita (pelo Teorema 4.2.1 d)). Além disso, se $b > a$ $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$. Nosso procedimento será inverter este processo e construir uma medida a partir de uma função crescente e contínua à direita F. O caso especial $F(x) = x$ nos dará a medida de comprimento usual para intervalos.

Os blocos de construção de nossa teoria serão os intervalos abertos à esquerda e fechados à direita ($(a, b]$ ou (a, ∞), $-\infty \leq a < b < \infty$). Estes intervalos serão chamados h-intervalos. Claramente a interseção de h-intervalos é um h-intervalo e o complementar de h-intervalo é união disjunta de h-intervalos. Pela Proposição 4.1.5 a coleção $\mathcal{A}$ das uniões finitas disjuntas de h-intervalos é uma álgebra e pela Proposição 4.1.1, a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposição 4.4.1. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua à direita. Se $(a_j, b_j]$, $1 \leq j \leq n$, são h-intervalos disjuntos, seja*

$$\mu_0 \left(\bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \right) = \sum_{j=1}^{n} [F(b_j) - F(a_j)],$$

e seja $\mu_0(\emptyset) = 0$. Então μ_0 é uma pré-medida na álgebra $\mathcal{A}$ das uniões finitas disjuntas de h-intervalos.

Prova: Primeiramente devemos verificar que μ_0 está bem definida, já que os elementos de $\mathcal{A}$ podem ser representados de mais de uma maneira como união disjunta de h-intervalos. Se $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^{n}$ são disjuntos e $\cup_{j=1}^{n}(a_j, b_j] = (a, b]$, então, após uma possível reordenação no índice j, devemos ter $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots < b_n = b$, logo $\sum_{j=1}^{n}[F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a)$. Mais geralmente, se $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ e $\{J_j\}_{j=1}^{m}$ são seqüências finitas disjuntas de h-intervalos tais que $\cup_{i=1}^{n} I_i = \cup_{i=j}^{m} J_j$, temos que

$$\cup_{i=1}^{n} I_i = \cup_{i,j} I_i \cap J_j = \cup_{i=j}^{m} J_j$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_0(J_j).$$

Portanto μ_0 está bem definida e é finitamente aditiva por construção.

Resta mostrar que se $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência disjunta de h-intervalos com $\cup_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{A}$ então $\mu_0(\cup_{j=1}^{\infty} I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$. Como $\cup_{j=1}^{\infty} I_j$ é união disjunta finita de h-intervalos a seqüência $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ pode ser particionada em um número finito de subseqüências tais que a união dos intervalos em cada uma dessas subseqüências é um h-intervalo. Considerando cada subseqüência separadamente e usando o fato que μ_0 é finitamente aditiva, podemos assumir que $\cup_{j=1}^{\infty} I_j$ é um h-intervalo $I = (a, b]$. Neste caso, temos que

$$\mu_0(I) = \mu_0(\cup_{j=1}^{n} I_j) + \mu_0(I \setminus \cup_{j=1}^{n} I_j) \geq \mu_0(\cup_{j=1}^{n} I_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos que $\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$. Para provar a desigualdade contrária suponha inicialmente que a e b são finitos e que $\epsilon > 0$. Como F é contínua à direita, existe $\delta > 0$ tal que $F(a+\delta) - F(a) < \epsilon$ e se $I_j = (a_j, b_j]$ existe $\delta_j > 0$ tal que $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \epsilon 2^{-j}$. Os intervalos abertos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cobrem $[a+\delta, b]$ e portanto existe uma subcobertura finita. Descartando qualquer intervalo dessa subcobertura finita que está contido em um outro maior e reordenando, podemos assumir que

- os intervalos $(a_1, b_1 + \delta_1), \ldots, (a_N, b_N + \delta_N)$ cobrem $[a+\delta, b]$,
- $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$ para $j = 1, \ldots, N-1$.

Mas então

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) &\leq F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \textstyle\sum_{j=1}^{N-1} [F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \epsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \textstyle\sum_{j=1}^{N-1} [F(b_j + \delta_j) - F(a_j)] + \epsilon \\
&< \textstyle\sum_{j=1}^{N} [F(b_j) + \epsilon 2^{-j} - F(a_j)] + \epsilon \\
&< \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, o resultado segue. Se $a = -\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cobrem $[-M, b]$, logo o mesmo raciocínio nos dá $F(b) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$, enquanto que se $b = \infty$, para cada $M < \infty$ obtemos que $F(M) - F(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon$. O resultado desejado segue fazendo $\epsilon \to 0$ e $M \to \infty$. $\square$

Décima-Terceira Aula (100 minutos) ↑

Décima-Quarta Aula (100 minutos) $\downarrow$

Teorema 4.4.1. *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é qualquer função crescente e contínua à direita, existe uma única medida de Borel μ_F em $\mathbb{R}$ tal que $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ para todo $a < b$. Se G é outra função crescente e contínua à direita, temos que $\mu_F = \mu_G$ se e somente $F - G$ é constante. Reciprocamente, se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}$ que é finita em todo conjunto de Borel limitado definimos*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & se \quad x > 0, \\ 0 & se \quad x = 0, \\ -\mu((x,0]) & se \quad x < 0, \end{cases}$$

então F é crescente e contínua à direita, e $\mu = \mu_F$

Prova: Pela Proposição 4.4.1, cada F induz uma pré-medida na álgebra $\mathcal{A}$ das uniões finitas disjuntas de h-intervalos. É claro que F e G induzem a mesma pré-medida se e somente se $F - G$ é constante e que estas pré-medidas são $\sigma-$finitas ($\mathbb{R} = \cup_{j=1^\infty}(j, j+1]$). Segue do Teorema 4.3.2 que cada função crescente e contínua à direita induz uma única medida de Borel em $\mathbb{R}$ e que se duas tais funções induzem a mesma medida então elas diferem por uma constante. Para a recíproca a monotonicidade de μ implica a monotonicidade de F, e a semi-contínuidade superior e inferior de μ implica a continuidade à direita de F para $x \geq 0$ e para $x < 0$. É claro que $\mu = \mu_F$ em $\mathcal{A}$, e portanto o Teorema 4.3.2 implica que $\mu = \mu_F$ em $B_{\mathbb{R}}$. $\square$

Observamos primeiramente que toda esta teoria poderia ter sido desenvolvida, da mesma forma, usando intervalos da forma $[a,b)$ e funções contínuas à esquerda F. Em segundo lugar, observamos que se μ é uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$, então $\mu = \mu_F$ onde $F(x) = (-\infty, x]$ que difere da função do F do teorema anterior pela constante $\mu(-\infty, 0]$. Em terceiro lugar a teoria de Medidas Exteriores nos dá, para dada função crescente e contínua à direita, não somente uma medida de Borel μ_F mas uma medida $\bar{\mu}_F$ completa cujo domínio contém $B_{\mathbb{R}}$. De fato, $\bar{\mu}_F$ é apenas o completamento de μ_F e podemos mostrar que o seu domínio é sempre estritamente maior que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Usualmente denotamos esta medida completa também por μ_F. Chamamos esta medida de *Medida de Lebesgue-Stieltjes* associada à F.

As medidas de Lebesgue-Stieltjes gozam de algumas propriedades de regularidade úteis que passamos a investigar. Nesta discussão fixamos uma medida de Lebesgue-Stieltjes μ em $\mathbb{R}$ associada a uma função crescente e contínua à direita F, e denotamos por $\mathcal{M}_\mu$ o domínio de μ. Portanto, para cada $E \in \mathcal{M}_\mu$,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\left\{\textstyle\sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)] : E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j]\right\}\\ &= \inf\left\{\textstyle\sum_{j=1}^n \mu((a_j, b_j]) : E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j]\right\}.\end{aligned}$$

Primeiro observe que na segunda fórmula para $\mu(E)$ podemos substituir os h-intervalos por intervalos abertos:

Lema 4.4.1. *Para qualquer $E \in \mathcal{M}_\mu$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^n \mu(a_j, b_j) : E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j)\right\}.$$

Prova: Seja

$$\nu(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^n \mu(a_j, b_j) : E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j)\right\}.$$

Suponha que $E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j)$. Cada (a_j, b_j) é união contável disjunta de h-intervalos $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$ onde c_j^k é qualquer seqüência crescente tal que $c_j^1 = a_j$ e $c_j^k \xrightarrow{k\to\infty} b_j$. Portanto $E \subset \cup_{j,k=1}^\infty I_j^k$, logo

$$\sum_{j=1}^\infty \mu((a_j, b_j)) = \sum_{j,k=1}^\infty \mu(I_j^k) \geq \mu(E),$$

portanto $\nu(E) \geq \mu(E)$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^\infty$ com $E \subset \cup_{j=1}^\infty (a_j, b_j]$ e $\sum_{j=1}^\infty \mu((a_j, b_j]) \leq \mu(E) + \epsilon$, e para cada j existe $\delta_j > 0$ tal que $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \epsilon 2^{-j}$. Então $E \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j + \delta_j)$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j + \delta_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) + \epsilon \leq \mu(E) + 2\epsilon,$$

de modo que $\nu(E) \leq \mu(E)$. $\square$

Teorema 4.4.2. *Se $E \in \mathcal{M}_\mu$, então*

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supset E \text{ e } U \text{ é aberto}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ é compacto}\}. \end{aligned}$$

Prova: Pelo Lemma 4.4.1, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $E \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) \leq \mu(E) + \epsilon$. Se $U = \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ então U é aberto, $U \supset E$ e $\mu(E) \leq \mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon$. Isto mostra a primeira igualdade. Para mostrar a segunda igualdade, suponha primeiro que E é limitado. Dado $\epsilon > 0$ podemos escolher um aberto $U \supset \bar{E} \backslash E$ tal que $\mu(U) \leq \mu(\bar{E} \backslash E) + \epsilon$. Seja $K = \bar{E} \backslash U$. Então K é compacto, $K \subset E$, e

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(E \cap U) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \backslash E)] \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \backslash E) \geq \mu(E) - \epsilon. \end{aligned}$$

Se E é ilimitado, seja $E_j = E \cap (j, j+1]$. Pelo argumento precedente, para qualquer $\epsilon > 0$ existe compacto $K_j \subset E_j$ com $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_n = \cup_{-n}^{n} K_j$. Então H_n é compacto, $H_n \subset E$, e $\mu(H_n) \geq \mu(\cup_{j=-n}^{n} E_j) - \epsilon$. Como $\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(\cup_{j=-n}^{n} E_j)$, o resultado segue. $\square$

Teorema 4.4.3. *Se $E \subset \mathbb{R}$, as seguintes afirmativas são equivalentes.*

a) $E \in \mathcal{M}_\mu$.

b) $E = V \backslash N_1$ *onde V é um conjunto G_δ e* $\mu(N_1) = 0$.

c) $E = H \cup N_2$ *onde H é um conjunto F_σ e* $\mu(N_2) = 0$.

Prova: Obviamente $b) \Rightarrow a)$ e $c) \Rightarrow a)$ pois μ é completa em $\mathcal{M}_\mu$. Suponha que $E \in \mathcal{M}_\mu$ e $\mu(E) < \infty$. Pelo Teorema 4.4.2, para $j \in \mathbb{N}$ podemos escolher um aberto $U_j \supset E$ e um compacto $K_j \subset E$ tais que

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

Seja $V = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$ and $H = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$. Então $H \subset E \subset V$ e $\mu(V) = \mu(H) = \mu(E) < \infty$, logo $\mu(V \backslash E) = \mu(E \backslash H) = 0$. Portanto, o resultado está provado para $\mu(E) < \infty$; o caso geral agora segue facilmente. $\square$

O teorema anterior nos diz que os conjuntos de Borel (ou mais geralmente todos os conjuntos em $\mathcal{M}_\mu$) são razoavelmente simples módulo conjuntos de medida nula.

Proposição 4.4.2. *Se $E \in \mathcal{M}_\mu$ e $\mu(E) < \infty$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto A que é união finita de intervalos abertos e tal que $\mu(E \Delta A) < \epsilon$.*

Agora examinamos a medida mais importante em $\mathbb{R}$, isto é, a *Medida de Lebesgue.* A medida de Lebesgue é a medida completa μ_F associada à função $F(x) = x$, para a qual a medida de um intervalo é simplesmente o seu comprimento. Denotaremos a medida de Lebesgue por m. O domínio $\mathcal{M}_F$ de m é chamada a classe dos conjuntos Lebesgue Mensuráveis será denotado por $\mathcal{L}$. Também nos referiremos à restrição de m a $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ como medida de Lebesgue.

Entre as propriedades mais significantes da medida de Lebesgue está a invariância por translação e comportamento simples homotetias. Se $E \subset \mathbb{R}$ e $s, r \in \mathbb{R}$, definimos

$$E + s = \{x + s : x \in E\}, \qquad rE = \{rx : x \in E\}.$$

Teorema 4.4.4. *Se $E \in \mathcal{L}$, então $E + s \in \mathcal{L}$ e $rE \in \mathcal{L}$ para toco $r, s \in \mathbb{R}$. Adicionalmente, $m(E + s) = m(E)$ e $m(rE) = |r|m(E)$.*

Prova: Como a coleção de intervalos abertos é invariante por translação e homotetias, o mesmo é verdade para $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Para $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, seja $m_s(E) = m(E + s)$ e $m^r(E) = m(rE)$. Então m_s e m^r coincidem com m e $|r|m$ nas uniões finitas disjuntas de h-intervalos, portanto em $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ pelo Teorema 4.3.2. Em particular, se $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ e $m(E) = 0$, então $m(E + s) = m(rE) = 0$, do que segue que a classe dos conjuntos com medida de Lebesgue nula é preservada por translações e homotetias. Segue que $\mathcal{L}$ (cujos membros são união de um conjunto de Borel com um conjunto com medida de Lebesgue nula) é preservada por translação e homotetias e que $m(E+s) = m(E)$ e $m(rE) = |r|m(E)$ para todo $E \in \mathcal{L}$. $\square$

A relação das propriedades de teoria da medida com as propriedades topológicas de subconjuntos de $\mathbb{R}$ é delicada e contém surpresas. Considere os seguintes fatos. Todo conjunto unitário em $\mathbb{R}$ tem medida de Lebesgue nula e portanto a união contável de conjuntos unitários tem medida nula. Em particular $m(\mathbb{Q}) = 0$. Seja $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração do conjunto dos números racionais em $[0,1]$ e, dado $\epsilon > 0$, seja I_j un intervalo centrado em r_j de comprimento $\epsilon 2^{-j}$. Então o conjunto $U = (0,1) \cap (\cup_{j=1}^{\infty} I_j)$ é aberto e denso em $[0,1]$, mas $\mu(U) \leq \epsilon$; seu complemento $K = [0,1] \backslash U$ é um conjunto compacto nunca denso com medida $m(K) \geq 1-\epsilon$. Portanto um conjunto que é aberto e denso (topologicamente grande) pode ter medida pequena, enquanto que um conjunto fechado e nunca denso (topologicamente pequeno) pode ter medida grande.

Décima-Quarta Aula (100 minutos) ↑

Décima-Quinta Aula (100 minutos) $\downarrow$

A família dos conjuntos com medida de Lebesgue nula inclui não somente os conjuntos enumeráveis mas também muitos conjuntos não-enumeráveis. A seguir apresentamos um exemplo de conjunto não-enumerável com medida de Lebesgue nula, o conjunto de Cantor.

Cada $x \in [0,1]$ tem uma representação na base três, $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$, onde $a_j = 0, 1$ ou 2. Esta expansão é única a menos dos $x = p3^{-j}$ com p, j inteiros para os quais x tem duas representações: numa delas $a_j = 0$ para $j > k$ e a na outra $a_j = 2$ para $j > k$. Assumindo que p não é divisível por 3, uma dessas expansões terá $a_k = 1$ e outra terá $a_k = 0$ ou 2. Se tomamos sempre a última dessas expansões, vemos que

$$a_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3},$$

$$a_1 \neq 1 \text{ e } a_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{2}{9} \text{ ou } \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9},$$

e assim por diante. Será útil observar que, se $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}$, então $x < y$ se existe n tal que $a_n < b_n$ e $a_j = b_j$, $j < n$.

O *conjunto de Cantor* C é o conjunto de todos os $x \in [0,1]$ que tem uma expansão na base três, $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$, com $a_j \neq 1$ para todo j. Portanto C é obtido de $[0,1]$ removendo o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e dos intervalos resultantes removendo os intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, e assim por diante. As propriedades básicas de C estão resumidas a seguir:

Proposição 4.4.3. *Seja C o conjunto de Cantor.*

a) *C é compacto.*

b) *Se $x, y \in C$ e $x < y$, existe $z \notin C$ tal que $x < z < y$, portanto C é totalmente desconexo e nunca denso.*

c) *C não tem pontos isolados.*

d) *$m(C) = 0$.*

e) Existe $f : C \to [0,1]$ sobrejetora; portanto card(C) =c.

Prova: a) é imediato pois C é interseção enumerável de fechados.

b) Se $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$ seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = y_j$, $1 \leq j \leq n-1$ e $x_n < y_n$. Então $z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j 3^{-j}$ onde $z_j = x_j$, $1 \leq j \leq n-1$, $z_j = 1$, $j \geq n$. Então $y > z > x$ pois $y_n = 2 > z_n = 1 > x_n = 0$.

c) Se $c = \sum_{j=1}^{\infty} c_j 3^{-j} \in C$ e $\epsilon > 0$ seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n+1}^{\infty} 23^{-j} < \epsilon$. Seja $c' = \sum_{j=1}^{\infty} c'_j 3^{-j} \in C$ tal que $c_j = c'_j$, $1 \leq j \leq n$ e $c'_j = 0$ ($c'_j = 2$) se $c_j = 2$ ($c_j = 0$) para $j > n$. Então $0 < |c - c'| < \epsilon$.

d) Para ver que $m(C) = 0$ observamos que C é obtido de $[0,1]$ removendo um intervalo de comprimento $\frac{1}{3}$ depois removendo 2 intervalos de comprimento $\frac{1}{3^2}$ e em seguida 4 intervalos de comprimento $\frac{1}{3^3}$ e assim por diante. Segue que

$$\mu(C) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0$$

Finalmente, para mostrar que card(C)=c, suponha que $x \in C$ é tal que $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ onde $a_j = 0$ ou 2 para todo j. Seja $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j}$ onde $b_j = \frac{a_j}{2}$. A série que define $f(x)$ é a expansão na base dois de um número em $[0,1]$, e qualquer número em $[0,1]$ pode ser obtido desta forma. Portanto f leva C sobre $[0,1]$. $\square$

Vamos examinar a função f da prova do teorema anterior. Primeiramente vemos que se $x, y \in C$ e $x < y$, então $f(x) < f(y)$ exceto para os pontos extremos dos intervalos retirados. Estendemos f a uma função definida em $[0,1]$ fazendo-a constante em cada dos intervalos retirados e com valor igual ao valor nos extremos do intervalo. Esta função estendida é crescente e como a sua imagem é todo o intervalo $[0,1]$ ela não pode ter saltos de descontinuidade e é portanto contínua. f é chamada a *função de Cantor* ou *função de Cantor-Lebesgue* .

Nem todo conjunto Lebesgue mensurável é um conjunto é Borel mensurável. Para ver isto note que todo subconjunto do conjunto de Cantor é um conjunto Lebesgue mensurável com medida nula e portanto todo subconjunto de C é Lebesgue mensurável e portanto card($\mathcal{L}$)=card($\mathcal{P}(C)$) >c enquanto que card($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) =c. Esta última afirmativa segue da proposição a seguir.

Seja $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ a sigma álgebra gerada por $\mathcal{E}$ e Ω o conjunto de todos os ordinais contáveis. Seja $\mathcal{E}_1$ a coleção das uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{E}$ ou seu complemento. Para $\alpha \in \Omega$, se α tem um predecessor imediato β, então $\mathcal{E}_\alpha$ é a coleção das uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{E}_\beta$ ou seus complementos, caso contrário seja $\mathcal{E}_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{E}_\beta$. Então

Proposição 4.4.4. $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \cup_{\alpha\in\Omega}\mathcal{E}_\alpha$.

Prova: A indução transfinita mostra que $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ para todo $\alpha \in \Omega$. A inclusão recíproca segue do fato que qualquer seqüência em Ω tem um supremo em Ω: Se $E_j \in \mathcal{E}_{\alpha_j}$ para $j \in \mathbb{N}$ e $\alpha = \sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j$, então $E_j \in \mathcal{E}_\alpha$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e portanto $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}_\beta$ onde β é o sucessor de α. □

Combinando este resultado com com o Exercício 5 i) do Capítulo 1, vemos que se card($\mathbb{N}$) $\leq$ card($\mathcal{E}$) $\leq c$, então card($\mathcal{M}(\mathcal{E})$) $= c$.

4.5 Exercícios

1. Seja $\mathcal{M}$ uma $\sigma-$álgebra infinita, então.

   $a)$ $\mathcal{M}$ contém uma seqüência infinita de conjuntos não vazios e disjuntos

   $b)$ card($\mathcal{M}$)$\geq$ c.

2. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra se $\mathcal{A}$ é fechada por uniões contáveis de famílias crescentes de conjuntos.

3. Se $\mathcal{M}$ é a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $\mathcal{M}$ é a união das $\sigma-$álgebras geradas por $\mathcal{F}$ quando $\mathcal{F}$ percorre todos os subconjuntos contáveis de $\mathcal{E}$.

4. Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas sobre $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j$ é uma medida sobre $(X, \mathcal{M})$.

5. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$$

Também,

$$\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$$

contanto $\mu(\cup_{j=1}^{\infty}) < \infty$.

6. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$, então $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

7. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$, defina $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$ para $A \in \mathcal{M}$. Então μ_E é uma medida.

8. Toda medida $\sigma-$finita é semi-finita.

9. Se μ é uma medida semi-finita e $\mu(E) = \infty$, então para cada $C > 0$ existe $F \subset E$ com $C < \mu(F) < \infty$.

10. Se μ é uma medida sobre $(X, \mathcal{M})$, defina μ_0 em $\mathcal{M}$ por

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E \text{ e } \mu(F) < \infty\}.$$

   $a)$ μ_0 é uma medida semi-finita (camada *parte semifinita* de μ).

   $b)$ Se μ é semifinita, então $\mu = \mu_0$.

   $c)$ Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral não é única) que assume somente os valores 0 e ∞ tal que $\mu = \mu_0 + \nu$.

11. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ é chamado *localmente mensurável* se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\tilde{\mathcal{M}}$ a coleção de todos os conjuntos localmente mensuráveis. Claramente $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, se $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$, então μ é chamada *saturada*

   $a)$ Se μ é sigma finita, então μ é saturada.

   $b)$ $\tilde{\mathcal{M}}$ é uma $\sigma-$álgebra.

c) Defina $\tilde{\mu}$ sobre $\tilde{\mathcal{M}}$ por $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ se $E \in \mathcal{M}$, $\tilde{\mu}(E) = \infty$ caso contrário. Então $\tilde{\mu}$ é uma medida saturada sobre $\tilde{\mathcal{M}}$, chamada *saturação* de μ.

d) Se μ é completa, então $\tilde{\mu}$ também é.

e) Suponha que μ é semifinita. Se $E \in \tilde{\mathcal{M}}$, defina $\underline{\mu}(E)\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}$ e $A \subset E\}$. Então $\underline{\mu}$ é uma medida saturada sobre $\tilde{\mathcal{M}}$ que estende μ.

f) Seja X_1, X_2 são conjuntos disjuntos e não enumeráveis, $X = X_1 \cup X_2$, e $\mathcal{M}$ a $\sigma-$álgebra dos conjuntos enumeráveis ou de complementar enumerável em X. Defina μ em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1)$ onde μ_0 é a medida da contagem em X_1. Então μ é uma medida em $\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(X)$ e $\tilde{\mu} \neq \underline{\mu}$.

12. Se μ^* é uma medida exterior em X e $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência disjunta de conjuntos μ^*-mensuráveis, então $\mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$ para todo $E \subset X$.

13. Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, A_σ a coleção das uniões enumeráveis de elementos em $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção das interseções enumeráveis de elementos em $\mathcal{A}_\sigma$. Seja μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior induzida por μ_0.

a) Para todo $E \subset X$ e $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ com $E \subset \mathcal{A}_\sigma$ com $E \subset A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon$.

b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se e somente se existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ com $E \subset B$ e $\mu^*(B \backslash E) = 0$.

c) Se μ_0 é $\sigma-$finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ em *b*) é supérflua.

14. Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida finita μ_0. Se $E \subset X$, defina a *medida interior* de E por $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Então E é μ^*-mensurável se e somente se $\mu^* = \mu_*$.

15. Seja μ uma medida finita em $(X, \mathcal{M})$, e seja μ^* a medida exterior induzida por μ. Suponha que $E \subset X$ satisfaz $\mu^*(E)\mu^*(X)$ (mas não que $E \in \mathcal{M}$.

    a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.

    b) Seja $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$, e defina a função ν sobre $\mathcal{M}_E$ por $\nu(E \cap A) = \mu(A)$ (que faz sentido por a)). Então $\mathcal{M}_E$ é uma $\sigma-$álgebra sobre E e ν é uma medida em $\mathcal{M}_E$.

16. Seja F uma função crescente e contínua à direita, e μ_F a medida associada. Então $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_f([a, b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$ e $\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a)$.

17. Seja E um conjunto Lebesgue mensurável.

    a) Se $E \subset N$ onde N é o conjunto não-mensurável descrito no início do capítulo, então $\mu(E) = 0$.

    b) Se $\mu(E) > 0$, então E contém um conjunto não-mensurável.

18. Se $E \in \mathcal{L}$ e $m(E) > 0$, para todo $\alpha < 1$ existe um intervalo aberto I tal que $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.

Capítulo 5

Integração

A integral de Riemann de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)dx$ é definida como o limite das somas de Riemann que, por sua vez, são integrais de funções que aproximam f e são constantes em sub-intervalos de $[a, b]$. Semelhantemente, sobre qualquer espaço de medida existe uma noção de integral para funções que são, em um sentido a ser especificado, localmente constantes, e esta noção pode ser estendida a funções mais gerais. Neste capítulo, desenvolvemos a teoria de integração em espaços de medida abstratos, dando ênfase à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

5.1 Funções Mensuráveis

Começamos nosso estudo da teoria da integração com a discussão de funções mensuráveis que são os morfismos na categoria dos espaços mensuráveis.

Recorde que qualquer função $f : X \to Y$ induz uma transformação $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, definida por $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$, que preserva uniões, interseções e complementos. Portanto, se $\mathcal{N}$ é uma $\sigma-$álgebra em Y, então $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ é uma $\sigma-$álgebra em X. Se $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ são espaços mensuráveis, uma função $f : X \to Y$ é chamada $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$mensurável (ou simplesmente mensurável quando $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ estiverem subentendidas), se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ para todo $E \in \mathcal{N}$.

É fácil ver que a composição de funções mensuráveis é uma função mensurável.

Proposição 5.1.1. *Se $\mathcal{N}$ é gerada por $\mathcal{E}$, então $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$mensurável se e somente se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ sempre que $E \in \mathcal{E}$.*

Prova: É claro que se f é mensurável $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ sempre que $E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{N}$. Por outro lado se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ sempre que $E \in \mathcal{E}$ temos que $\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ é uma $\sigma-$álgebra que contém $\mathcal{E}$ e portanto contém $\mathcal{N}$ e f é mensurável. □

Corolário 5.1.1. *Se X e Y são espaços métricos (ou topológicos), toda função contínua $f : X \to Y$ é $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)-$mensurável.*

Prova: Como f é contínua então $f^{-1}(U)$ é aberto em X sempre que U é aberto em Y. O resultado segue da proposição anterior. □

Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, uma função $f : X \to \mathbb{K}$ será chamada $\mathcal{M}-$mensurável se ela é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})-$mensurável . Em particular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ é Lebesgue (Borel) mensurável se ela é $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})-$mensurável $((\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})-$mensurável).

Observe que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são Lebesgue mensuráveis, não segue que $f \circ g$ é Lebesgue mensurável, mesmo que g seja contínua (Se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ temos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$ mas, a menos que $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, não há garantia que $g^{-1}(f^{-1}(E)) \in \mathcal{L}$. Contudo, se f é Borel mensurável, então $f \circ g$ é Lebesgue ou Borel mensurável sempre que g o é.

Proposição 5.1.2. *Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) *f é $\mathcal{M}-$mensurável.*

b) *$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

c) *$f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

d) *$f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

e) *$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Prova: Segue das Proposições 4.1.1 e 5.1.1.

Décima-Quinta Aula (100 minutos) ↑

Décima-Sexta Aula (100 minutos) $\downarrow$

As vezes queremos considerar a mensurabilidade de uma função em subconjuntos de X. Se $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável, f é uma função definida em X, e $E \in \mathcal{M}$, dizemos que f é mensurável em E se $f^{-1}(B) \cap E$ é mensurável sempre que B é um conjunto de Borel.

Se X é um conjunto, $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços mensuráveis e $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, é uma família de funções, existe uma única menor $\sigma-$álgebra sobre X relativamente à qual as f_α's são todas mensuráveis, isto é, a $\sigma-$álgebra gerada pelos conjuntos $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ com $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ e $\alpha \in A$. Ela é chamada a $\sigma-$algebra induzida por $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Em particular, se $X = \Pi_{\alpha \in A} Y_\alpha$, vemos que a $\sigma-$álgebra produto $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$ é a $\sigma-$álgebra gerada pelas projeções coordenadas $\pi_\alpha : X \to Y_\alpha$.

Proposição 5.1.3. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$, $\alpha \in A$, espaços mensuráveis, $Y = \Pi_{\alpha \in A} Y_\alpha$, $\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$, e $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ as projeções coordenadas. Então $f : X \to Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mensurável se e somente se $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-mensurável para todo $\alpha \in A$.*

Prova: Se f é mensurável, f_α também é pois é composição de funções mensuráveis. Reciprocamente, se f_α é mensurável, então para todo $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, $f^{-1}\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$ e f é mensurável pela Proposição 5.1.1. $\square$

Corolário 5.1.2. *A função $f : X \to \mathbb{C}$ é $\mathcal{M}-$mensurável se e somente se* $\mathrm{Re}f$ *e* $\mathrm{Im}f$ *são $\mathcal{M}-$mensuráveis.*

Prova: Isto segue pois $\mathcal{B}_\mathbb{C} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pela Proposição 4.1.4. $\square$

É conveniente, em alguns casos, considerar funções com valores na reta real estendida $\overline{R} = [-\infty, \infty]$. Definimos os conjuntos de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$ por $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$. É fácil ver que $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ é gerada pelos intervalos $(a, \infty]$ ou $[-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{M}-$mensurável se é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-mensurável.

Agora estabelecemos que a mensurabilidade é preservada sob operações algébricas usuais e passagem ao limite.

Proposição 5.1.4. *Se $f, g : X \to \mathbb{K}$ são $\mathcal{M}-$mensuráveis, então $f+g$ e fg são mensuráveis.*

Prova: Sejam $F : X \to \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\phi : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\psi : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dadas por $F(x) = (f(x), g(x))$, $\forall x \in X$, $\phi(s,t) = s+t$ e $\psi(s,t) = st$, $\forall s,t \in \mathbb{K}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}} = \mathcal{B}_{\mathbb{K}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ pela Proposição 4.1.4, F é $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}})-$mensurável pela proposição anterior. Como ϕ e ψ são contínuas segue que elas são $(\mathcal{B}_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})-$mensuráveis pelo Corolário 5.1.1. Portanto $f+g = \phi\circ F$ e $fg = \psi \circ F$ são $\mathcal{M}-$mensuráveis. □

A proposição anterior continua válida se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ contanto que tomemos os devidos cuidados com as indeterminações $\infty - \infty$ e $0.\infty$.

Proposição 5.1.5. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e $\{f_j\}$ é uma seqüência de funções $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})-$mensuráveis definidas em X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$, então as funções*

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \qquad g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x),$$

$$g_2(x) = \inf_j f_j(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

são mensuráveis. Se $f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x)$ existe para todo $x \in X$, então f é mensurável.

Prova: Temos que

$$g_1^{-1}((a,\infty]) = \cup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}((a,\infty]), \qquad g_2^{-1}([-\infty,a)) = \cup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty,a)),$$

portanto g_1 e g_2 são mensuráveis. Mais geralmente, se $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$ então h_k é mensurável e $g_3(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{j>k} f_j(x)$ então g_3 é mensurável. De forma semelhante g_4 é mensurável. Finalmente, se $f = g_3 = g_4$ existe ela é mensurável. □

Corolário 5.1.3. *Se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis, então* $\max(f,g)$ *e* $\min(f,g)$ *são mensuráveis.*

Corolário 5.1.4. *Se $\{f_j : X \to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência de funções mensuráveis com valores em $\mathbb{K}$ e $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existe para todo x, então f é mensurável.*

Prova: Basta utilizar o Corolário 5.1.2 e a Proposição 5.1.5 para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definimos sua partes positiva e negativa por

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Então $f = f^+ - f^-$. A função f é mensurável se e somente se f^+ e f^- são. Se $f : X \to \mathbb{C}$ temos que

$$f = (\mathrm{sgn} f)|f|, \ \text{ onde } \ \mathrm{sgn} z = \begin{cases} z/|z| & \textit{se } z \neq 0, \\ 0 & \textit{se } z = 0. \end{cases}$$

Novamente, se f é mensurável se e somente se $|f|$ e $\mathrm{sgn}(f)$ são mensuráveis. De fato, $z \mapsto |z|$ é contínua em $\mathbb{C}$ e $z \mapsto \mathrm{sgn} z$ é contínua exceto na origem. Se $U \subset \mathbb{C}$ é aberto, $\mathrm{sgn}^{-1}(U)$ é aberto ou da forma $V \cup \{0\}$ onde V é aberto. Segue que sgn é Borel mensurável. Portanto $|f| = |\cdot| \circ f$ e $\mathrm{sgn} f = \mathrm{sgn} \circ f$ são mensuráveis.

Agora passamos a discutir as funções que são os blocos de construção da teoria de integração. Suponha que $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável. Se $E \subset X$, $\mathcal{X}_E$ denota a função característica de E. É fácil verificar que $\mathcal{X}_E$ é mensurável se e somente se E é mensurável. Uma função simples é uma combinação linear finita de funções características de elementos de $\mathcal{M}$ (funções simples não assumem os valores $\pm\infty$). Equivalentemente $f : X \to \mathbb{K}$ é simples se e somente se f é mensurável e sua imagem é um conjunto finito. De fato, temos que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \mathcal{X}_{E_j}, \text{ onde } E_j = f^{-1}(\{z_j\}) \text{ e a imagem de } f \text{ é } \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Na representação de funções simples f consideraremos sempre que os coeficientes são distintos e um deles pode ser o zero de forma que f é combinação linear finita de funções características de conjuntos disjuntos cuja união é X.

É claro que se f e g são funções simples, então $f+g$ e fg são funções simples. Agora mostramos que funções mensuráveis quaisquer podem ser aproximadas por funções simples.

Teorema 5.1.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável.*

a) *Se $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável, existe uma seqüência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq f$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.*

b) *Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma seqüência $\{\phi_n\}$ funções simples tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.*

Prova: a) Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, seja

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) \quad \text{and} \quad F_n((2^n, \infty]),$$

e defina

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\mathcal{X}_{E_n^k} + 2^n\mathcal{X}_{F_n}.$$

É fácil verificar que $\{E_n^k\}_{k=1}^{2^{2n}-1}$ é uma família disjunta de conjuntos e que E_n^k é união disjunta de E_{n+1}^{2k} e E_{n+1}^{2k+1}. Segue que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ para todo n. Além disso, por construção, $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$ no conjunto onde $f \leq 2^n$. Portanto, o resultado segue.

b) Se $f = g + ih$ podemos aplicar a parte a) às partes positiva e negativa de f e g, obtendo seqüências ψ_n^+, ψ_n^-, ξ_n^+ e ξ_n^- de funções simples e não negativas que convergem para g^+, g^-, h^+ e h^- monotonicamente. A seqüência de funções simples $\{\phi_n\}$ com $\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\xi_n^+ - \xi_n^-)$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, podemos desejar eliminar conjuntos com medida nula de nossas considerações no estudo de funções mensuráveis. Neste caso a nossa tarefa é mais simples se a medida μ é completa.

Proposição 5.1.6. *As sequintes implicações são válidas se e somente se a medida μ é completa:*

a) Se f é mensurável e $f = g$ quase sempre, então g é mensurável.

b) Se f_n é mensurável para $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ quase sempre, então f é mensurável.

Prova: a) Se μ é completa, f é mensurável e $f = g$ $\mu-$quase sempre, seja $X_1 = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ e $X_2 = X_1^c$, então X_2 é μ-mensurável e $\mu(X_2) = 0$. Segue que X_1 é $\mu-$mensurável e se E é mensurável $g^{-1}(E) = (f^{-1}(E) \cap X_1) \cup (g^{-1}(E) \cap X_2)$ e $g^{-1}(E)$ é mensurável.

Por outro lado, se f mensurável e $f = g$ quase sempre implica g mensurável, então para cada $F \subset N$, $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$. Basta tomar f identicamente nula e $g = \mathcal{X}_F$ para concluir que F é mensurável.

b) A primeira parte pode ser provada fácilmente enquanto que a segunda segue como em a) tomando seqüências constantes. □

Por outro lado, o resultado a seguir mostra que não é provável cometermos qualquer deslise ao deixarmos de nos preocupar com o completamento de μ.

Proposição 5.1.7. *Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaco de medida e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ o seu completamento. Se f é uma função $\overline{\mathcal{M}}-$mensurável existe uma função $\mathcal{M}-$mensurável g tal que $f = g$ $\overline{\mu}-$quase sempre.*

Prova: Isto é óbvio da definição de $\overline{\mu}$ se $f = \mathcal{X}_E$ onde $E \in \overline{\mathcal{M}}$ e portanto se f é uma função simples $\overline{\mathcal{M}}$-mensurável. Para o caso geral, escolha a seqüência $\{\phi_n\}$ de funções simples $\overline{\mathcal{M}}$-mensuráveis que converge pontualmente para f como no Teorema 5.1.1, e para cada n seja ψ_n uma função simples $\mathcal{M}-$mensurável com $\psi_n = \phi_n$ exceto em um conjunto $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ com $\overline{\mu}(E_n) = 0$. Escolha $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $N \supset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, e faça

$g = \lim \psi_n \mathcal{X}_{X \setminus N}$. Então g é $\mu-$mensurável pelo Corolário 5.1.4 e $g = f$ em N^c. $\square$

Décima-Sexta Aula (100 minutos) ↑

Décima-Sétima Aula (100 minutos) ↓

5.2 Integração de Funções Não Negativas

Nesta seção fixamos um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, e definimos

$$L^+ = \{f : X \to [0,\infty] : f \text{ é uma função mensurável } \}.$$

Se ϕ é uma função simples em L^+ com representação $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$, ($X = \cup_{j=1}^n E_j$ com união disjunta) definimos a *integral* de ϕ relativamente a μ por

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

(com a convenção que $0.\infty = 0$). Note que a definição acima independe da representação escolhida (já que cada $E_j \in \mathcal{M}$, $1 \leq j \leq n$, e sua união disjunta é X). Note ainda $\int \phi \, d\mu$ pode ser ∞. Se $A \in \mathcal{M}$, então $\phi \mathcal{X}_A = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j \cap A}$ é uma função simples e definimos

$$\int_A \phi \, d\mu = \int \phi \mathcal{X}_A \, d\mu.$$

Proposição 5.2.1. *Sejam ϕ e ψ funções simples em L^+.*

a) Se $c \geq 0$, $\int c\phi \, d\mu = c \int \phi \, d\mu$.

b) $\int (\phi + \psi) \, d\mu = \int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.

c) Se $\phi \leq \psi$, então $\int \phi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$.

d) A função $A \mapsto \int_A d\mu$ é uma medida em $\mathcal{M}$.

Prova: a) Segue trivialmente da definição.

b) Sejam $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ e $\psi = \sum_{k=1}^m b_k \mathcal{X}_{F_k}$. Então $E_j = \cup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$ e $F_k = \cup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$ já que $\cup_{j=1}^n E_j = \cup_{k=1}^m F_k = X$ com união disjunta. Portanto, do fato que μ é finitamente aditiva,

$$\int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k),$$

e a mesma argumentação mostra que a soma do lado direito é igual a $\int(\phi + \psi)\,d\mu$.

c) Note que, se $\phi \leq \psi$, então $a_j \leq b_k$ sempre que $E_j \cap F_k \neq \emptyset$, logo

$$\int \phi\,d\mu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j\mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_k\mu(E_j \cap F_k) = \int \psi\,d\mu.$$

d) Se $\{A_k\}$ é uma seqüência disjunta em $\mathcal{M}$ e $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$,

$$\int_A \phi\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_j\mu(A_k \cap E_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} \psi\,d\mu.$$

$\square$

Agora estendemos a noção de integral para todas as funções $f \in L^+$ definindo

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{\int \phi\,d\mu : 0 \leq \phi \leq f,\ \phi \text{ é simples}\right\}.$$

Pela parte c) da proposição anterior, as duas definições de $\int f\,d\mu$ coincidem quando f é uma função simples já que a família de funções simples sobre a qual o supremo é tomado inclui f. Adicionalmente, é óbvio da definição que

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu, \text{ sempre que } f \leq g \text{ e } \int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu,\ \forall\ c \in [0,\infty).$$

O próximo passo é estabelecer teoremas que permitam trocar a ordem dos símbolos de integral e de limite, os chamados teoremas de convergência.

Teorema 5.2.1 (da Convergência Monótona). *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo j, e $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)$, então $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_j\,d\mu$.*

Prova: $\{\int f_n\,d\mu\}$ é uma seqüência crescente de números reais, portanto seu limite existe (possivelmente ∞). Adicionalmente $\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu$ para todo n, logo

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu.$$

Para estabelecer a desigualdade recíproca, fixe $\alpha \in (0,1)$, seja ϕ uma função simples com $0 \leq \phi \leq f$, e seja $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$. Então $\{E_n\}$ é uma seqüência crescente de conjuntos mensuráveis cuja união é X, e temos que $\int f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \phi\, d\mu$. Pela parte d) da Proposição anterior e pela parte c) do Teorema 4.2.1, $\lim \int_{E_n} \phi\, d\mu = \int \phi\, d\mu$ e portanto $\lim \int_{n\to\infty} f_n\, d\mu \geq \alpha \int \phi\, d\mu$. Como isto vale para todo $\alpha < 1$, continua válido para $\alpha = 1$ e tomando o supremo sobre todas as funções simples $\phi \leq f$, obtemos que $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq \int f\, d\mu$. □

O teorema da convergência monótona é uma ferramenta essencial em muitas situações, mas seu significado imediato para nós é o seguinte. A definição de $\int f\, d\mu$ envolve o supremo sobre uma família enorme (geralmente não enumerável) de funções simples , logo pode ser difícil calcular $\int f\, d\mu$ diretamente pela definição. O teorema da convergência monótona, contudo, assegura que para calcular $\int f\, d\mu$ é suficiente calcular $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\mu$ onde $\{\phi_n\}$ é uma seqüência qualquer de funções simples que convergem monotonicamente para f e o Teorema 5.1.1 a) garante que tal seqüência existe. Como uma primeira aplicação, estabelecemos a aditividade da integral.

Teorema 5.2.2. *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência finita ou infinita em L^+ e $f = \sum f_n$, então $\int f\, d\mu = \sum \int f_n\, d\mu$.*

Prova: Primeiro considere duas funções f_1 e f_2. Pelo Teorema 5.1.1 podemos encontrar seqüências $\{\phi_j\}$ e $\{\psi_j\}$ de funções simples que convergem monotonicamente para f_1 e f_2. Então $\{\phi_j + \psi_j\}$ converge monotonicamente para $f_1 + f_2$ e pelo Teorema da Convergência Monótona e pela Proposição 5.2.1 b),

$$\begin{aligned}\int (f_1 + f_2)\, d\mu &= \lim_{j\to\infty} \int (\phi_j + \psi_j)\, d\mu \\ &= \lim_{j\to\infty} \int \phi_j\, d\mu + \lim_{j\to\infty} \int \psi_j\, d\mu = \int f_1\, d\mu + \int f_2\, d\mu.\end{aligned}$$

Portanto, por indução $\int \sum_{j=1}^{n} f_j\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int f_j\, d\mu$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Fazendo $N \to \infty$ e aplicando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu$. □

Proposição 5.2.2. *Se $f \in L^+$, então $\int f \, d\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre.*

Prova: Isto é óbvio se f é simples: se $f = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ com $a_j \geq 0$, então $\int f \, d\mu = 0$ se e somente se para cada j ou $a_j = 0$ ou $\mu(E_j) = 0$. Em geral, se $f = 0$ quase sempre e ϕ é simples com $0 \leq \phi \leq f$, então $\phi = 0$ quase sempre, portanto $\int f \, d\mu = \sup_{\phi \leq f} \int \phi \, d\mu = 0$. Por outro lado, $\{x : f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^\infty E_n$ onde $E_n = \{x : f(x) > n^{-1}\}$, logo para que f não seja nula quase sempre devemos ter que $\mu(E_n) > 0$ para algum n. Mas então $f > n^{-1}\mathcal{X}_{E_n}$, logo $\int f \, d\mu \geq n^{-1}\mu(E_n) > 0$. □

Corolário 5.2.1. *Se $\{f_n\} \subset L^+$, $f \in L^+$, e $\{f_n(x)\}$ converge monotonicamente para $f(x)$ quase sempre, então $\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.*

Prova: Se $f_n(x)$ converge para $f(x)$ monotonicamente para $x \in E$ com $\mu(E^c) = 0$, então $f - f\mathcal{X}_E = 0$ quase sempre logo, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int f \, d\mu = \int f \mathcal{X}_E \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathcal{X}_E \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

É fácil encontrar exemplos de seqüência $\{f_n\}$ de funções em L^+ que converge pontualmente para $f \in L^+$ para os quais $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \neq \int f \, d\mu$ no entanto uma desigualdade é sempre verdadeira.

Lema 5.2.1 (de Fatou)**.** *Se $\{f_n\}$ é qualquer seqüência em L^+, então*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Prova: Para cada $k \geq 1$ temos que $\inf_{n\geq k} f_n \leq f_j$ para $j \geq k$, portanto $\int \inf_{n\geq k} f_n \, d\mu \leq \int f_j \, d\mu$ para $j \geq k$, portanto $\int \inf_{n\geq k} f_n \leq \inf_{j\geq k} \int f_j \, d\mu$. Agora faça $k \to \infty$ e aplicamos o Teorema da Convergência Monótona:

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int (\inf_{n\geq k} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

Corolário 5.2.2. *Se* $\{f_n\} \subset L^+$, $f \in L^+$, *e* $f_n \to f$ *quase sempre, então* $\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

Prova: Se $f_n \to f$ para todo x, o resultado é imediato do Lemma de Fatou, e no caso geral podemos modificar f_n e f em um conjunto de medida nula sem afetar as integrais. $\square$

Proposição 5.2.3. *Se* $f \in L^+$ *e* $\int f\, d\mu < \infty$, *então* $\{x : f(x) = \infty\}$ *é um conjunto de medida nula e* $\{x : f(x) > 0\}$ *é* $\sigma-$*finito.*

Prova: É imediato que, se $F = \{x : f(x) = \infty\}$ tem medida $\mu(F) > 0$, então $\int f\, d\mu = \infty$. Ainda, se $E_n = \{x : \frac{1}{n} < f(x) < \infty\}$, E_n é mensurável e $\mu(E_n) < \infty$ já que $0 \leq \frac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n} \leq f$ e $\frac{1}{n}\mu(E_n) = \int \frac{1}{n}\mathcal{X}_{E_n}\, d\mu \leq \int f\, d\mu < \infty$. Como $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x : f(x) > 0\}$ o resultado segue. $\square$

Décima-Sétima Aula (100 minutos) ↑

Décima-Oitava Aula (100 minutos) ↓

5.3 Integração de Funções Complexas

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. A integral definda na seção anterior pode ser estendida de maneira natural para funções com valores reais ou complexos; isto é, se f^+ e f^- são as partes positiva e negativa de uma função real e pelo menos uma das integrais $\int f^+ \, d\mu$ e $\int f^- \, d\mu$ é finita, definimos

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Dizemos que f é integrável se $\int f^+ \, d\mu$ e $\int f^- \, d\mu$ são finitas. Como $|f| = f^+ + f^-$, é claro que f é integrável se e somente se $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Proposição 5.3.1. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. O conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integráveis é um espaço vetorial real e a integral é um funcional linear definida neste espaço vetorial.*

Profa: A primeira afirmativa segue do fato que $|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$, e é fácil verificar que $\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Para mostrar aditividade, suponha que f e g são integráveis e seja $h = f + g$. Então $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, logo $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Pelo Teorema 5.2.2,

$$\int h^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int h^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu$$

e reagrupando

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu &= \int h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

□

A seguir, se f é uma função mensurável complexa, dizemos que f é integrável se $\int |f| \, d\mu < \infty$. Mais geralmente, se $E \in \mathcal{M}$, f é integrável em

E se $\int_E |f|\, d\mu < \infty$. Como $|f| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \leq 2|f|$, f é integrável se e somente se $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ são ambas integráveis, e neste caso definimos

$$\int f\, d\mu = \int \mathrm{Re} f\, d\mu + i \int \mathrm{Im} f\, d\mu.$$

Segue facilmente que o espaço das funções complexas integráveis é um espaço vetorial complexo e que a integral é um funcional linear complexo sobre este espaço vetorial. Denotamos este espaço por $L^1(X, \mu)$ ou $L^1(X)$ ou $L^1(\mu)$ ou L^1.

Proposição 5.3.2. *Se $f \in L^1(X, \mu)$, então $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$.*

Prova: Isto é trivial se $\int f\, d\mu = 0$ e se f é real, temos que

$$\left| \int f\, d\mu \right| = \left| \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \right| \leq \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu.$$

Se f é complexa e $\int f\, d\mu \neq 0$, seja $\alpha = \overline{\mathrm{sgn}(\int f\, d\mu)}$. Então $|\int f\, d\mu| = \alpha \int f\, d\mu$. Em particular, $\int \alpha f\, d\mu$ é real, logo

$$\begin{aligned} \left| \int f\, d\mu \right| &= \mathrm{Re} \int \alpha f\, d\mu = \int \mathrm{Re}(\alpha f)\, d\mu \\ &\leq \int |\mathrm{Re}(\alpha f)|\, d\mu \leq \int |\alpha f|\, d\mu = \int |f|\, d\mu \end{aligned}$$

□

Proposição 5.3.3.

a) Se $f \in L^1$, então $\{x : f(x) \neq 0\}$ é sigma finito

b) Se $f, g \in L^1$, então $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$ para todo $E \in \mathcal{M}$ se e somemte se $\int |f - g|\, d\mu = 0$ se e somente se $f = g$ quase sempre.

Prova: a) e a segunda equivalência em b) seguem da Proposição 5.2.3 e da Proposição 5.2.2. Se $\int |f - g|\, d\mu = 0$, então pela Proposição 5.3.2, para cada $E \in \mathcal{M}$,

$$\left| \int_E f\, d\mu - \int_E g\, d\mu \right| \leq \int |f - g| \mathcal{X}_E\, d\mu = 0,$$

e $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$. Por outro lado, se $u = \mathrm{Re}(f-g)$, $v = \mathrm{Im}(f-g)$ e é falso que $f = g$ quase sempre, então u^+, u^-, v^+ ou v^- deve ser não nula em um conjunto de medida positiva. Se, digamos, $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ tem medida positiva, então $\mathrm{Re}(\int_E f\, d\mu - \int_E g\, d\mu) = \int_E u^+ > 0$ pois $u^- = 0$ em E; semelhantemente para os demais casos. $\square$

Esta Proposição mostra que para o propósito de integração não faz qualquer diferença se alterarmos funções em conjuntos de medida nula. De fato, podemos integrar funções f que estão definidas apenas em um conjunto mensurável E cujo complemento E^c é um conjunto de medida nula simplesmente definindo f por zero em E^c (ou qualquer outro valor). Desta forma podemos tratar funções que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}$ e que são finitas quase sempre como funções que tomam valores em $\mathbb{R}$ para o propósito de integração.

Com isto em mente definimos $L^1(\mu)$ como o espaço das classes de equivalências de funções integráveis definidas quase sempre em X, onde f e g são consideradas equivalentes se $f = g$ quase sempre. Este novo espaço $L^1(\mu)$ é ainda um espaço vetorial complexo.

Esta nova definição de $L^1(\mu)$ tem duas vantagens. Primeiramente, se $\bar{\mu}$ é o completamento de μ, a Proposição 5.1.7 nos dá uma correspondência natural entre $L^1(\bar{\mu})$ e $L^1(\mu)$ e podemos identificar estes dois espaços. Em segundo lugar, $L^1(\mu)$ é um espaço métrico com a métrica $\rho(f,g) = \int |f-g|\, d\mu$.

Teorema 5.3.1 (da Convergência Dominada). *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência em $L^1(\mu)$ tal que (a) $f_n \to f$ quase sempre, e (b) existe uma função não negativa $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ quase sempre para todo n. Então $f \in L^1(\mu)$ e $\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*

Prova: f é mensurável (talvez após redefinição em um conjunto de medida nula) pelas Proposições 5.1.6 e 5.1.7 e como $|f| \leq g$ quase sempre, temos que $f \in L^1(\mu)$. Tomando parte real e imaginária é suficiente assumir que f_n, f são funções reais e neste caso temos que $g + f_n \geq 0$ e $g - f_n \geq 0$ quase sempre.

Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$\int g\,d\mu + \int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)\,d\mu = \int g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

$$\int g\,d\mu - \int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)\,d\mu = \int g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Portanto, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$ e o resultado segue. □

Teorema 5.3.2. *Suponha que $\{f_j\}$ é uma seqüência em $L^1(\mu)$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\int f_j\,d\mu| < \infty$. Então $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge quase sempre para uma função em $L^1(\mu)$ e $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j\,d\mu$.*

Prova: Pelo Teorema 5.2.2, $\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j|\,d\mu < \infty$, logo a função $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ está em L^1. Em particular, pela Proposição 5.2.3, $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ é finita para quase todo x, e para cada tal x a série $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge. Além disso, $|\sum_{j=1}^{n} f_j(x)| \leq g$ para todo n, logo podemos aplicar o Teorema da Convergência Domainada à seqüência das somas parciais para obter $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j\,d\mu$. □

Teorema 5.3.3. *Se $f \in L^1(\mu)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função simples integrável $\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}$ tal que $\int |f-\phi|\,d\mu < \epsilon$. Se μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes em $\mathbb{R}$, os conjuntos E_j na definição de ϕ podem ser tomados como uniões finitas de intervalos abertos; além disso, existe uma função contínua g que se anula fora de um intervalo limitado tal que $\int |f-g|\,d\mu < \epsilon$.*

Prova: Seja $\{\phi_n\}$ como no Teorema 5.1.1 b); então $\int |\phi_n - f|\,d\mu < \epsilon$ para n suficientemente grande, pelo Teorema da Convergência Dominada, já que $|\phi_n - f| \leq 2|f|$. Se $\phi_n = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{X}_{E_j}$, onde os E_j's são disjuntos e os a_j's são não nulos, observamos que $\mu(E_j) \leq |a_j|^{-1} \int_{E_j} |\phi_n| \leq |a_j|^{-1} \int |f| < \infty$. Além disso, se E e F são conjuntos mensuráveis, temos que $\mu(E\Delta F) = \int |\mathcal{X}_E - \mathcal{X}_F|\,d\mu$. Portanto, se μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes em $\mathbb{R}$, pela Proposição 4.4.2 podemos aproximar em $L^1(\mu)$, tão bem quanto desejarmos, $\mathcal{X}_{E_j}$ por uma soma finita de funções $\mathcal{X}_{I_k}$ onde os I_k's são intervalos abertos. Finalmente, se $I_k = (a,b)$ podemos aproximar $\mathcal{X}_{I_k}$ em $L^1(\mu)$ por funções contínuas que se

anulam fora de (a, b). Pondo estes fatos juntos, obtemos o resultado desejado.
$\square$

Décima-Oitava Aula (100 minutos) ↑

Décima-Nona Aula (100 minutos) ↓

A seguir utilizamos o Teorema da Convergência Dominada para obter resultados que permitem intercambiar os símbolos de integral e de derivada.

Teorema 5.3.4. *Suponha que* $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *e que* $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{C}$ *é integrável para todo* $t \in [a,b]$. *Seja* $F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$.

a) *Suponha que existe* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|f(x,t)| \le g(x)$ *para todo* x, t. *Se* $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ *para todo* x, *então* $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$; *em particular, se* $f(x,\cdot)$ *é contínua para cada* x, *então* F *é contínua.*

b) *Suponha que* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *exista e que existe* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x)$ *para todo* x, t. *Então* F *é diferenciável e* $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x)$.

Prova: Para a), aplique o Teorema da Convergência Dominada a $f_n(x) = f(x, t_n)$ onde $\{t_n\}$ é uma seqüência em $[a,b]$ que converge para t_0. Para b), observe que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim h_n(x) \text{ onde } h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0},$$

$\{t_n\}$ sendo novamente uma seqüência qualquer que converge para t_0. Segue que $\frac{\partial f}{\partial t}$ é mensurável, e pelo teorema do valor médio

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \le g(x),$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada

$$F'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x).$$

□

No caso especial quando a medida μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, a integral que desenvolvemos é chamada *Integral de Lebesgue*. Neste ponto é apropriado estudar a relação entre as Integrais de Lebesgue e de Riemann em $\mathbb{R}$. Utilizaremos a caracterização de Darboux da Integral de Riemann em termos de somas superiores e inferiores que recordamos a seguir.

Seja $[a, b]$ um intervalo compacto. Por uma *partição* entendemos uma seqüência finita $P = \{t_j\}_{j=0}^n$ tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Seja f uma função real limitada em $[a, b]$. Para cada partição P definimos

$$S_P f = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1}), \qquad s_P f = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}),$$

onde $M_j = \sup_{x\in[t_j,t_{j-1}]} f(x)$ e $m_j = \inf_{x\in[t_j,t_{j-1}]} f(x)$. Então definimos

$$\bar{I}_a^b(f) = \inf_P S_P f, \qquad \underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P f$$

onde o ínfimo e o supremo são tomados sobre todas as partições P. Se $\bar{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$, f é dita Riemann Integrável e o valor comum é chamado *Integral de Riemann* de f e é denotado por $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 5.3.5. *Seja f uma runção real limitada em $[a, b]$.*

a) Se f é Riemann Integrável, então f é Lebesgue mensurável (e portanto Lebesgue Integrável em $[a, b]$ pois f é limitada), e $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$.

b) A função f é Riemann Integrável se e somente se

$$\{x \in [a, b] : f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida de Lebesgue nula.

Prova: Suponha que f é Riemann Integrável. Para cada partição P seja

$$G_P = \sum_{j=1}^n M_j \mathcal{X}(t_{j-1}, t_j], \qquad g_P = \sum_{j=1}^n m_j \mathcal{X}(t_{j-1}, t_j],$$

logo $S_P f = \int G_P\, dm$ e $s_P f = \int g_P\, dm$. Existe uma seqüência $\{P_k\}$ de partições cuja malha (isto é, $\max_{0\le j\le n}(t_j - t_{j-1})$) tende para zero, cada das quais inclui a precedente (de forma que g_{P_k} é crescente e G_{P_k} é decrescente), tais que $S_{P_k}f$ e $s_{P_k}f$ convergem para $\int_a^b f(x)dx$. Seja $G = \lim G_{P_k}$ e $g = \lim g_{P_k}$. Então $g \le f \le G$, e pelo Teorema da Convergência Dominada , $\int Gdm = \int gdm = \int_a^b f(x)dx$. Portanto $\int (G-g)dm = 0$ e $G = g$ quase sempre, logo $G = f$ quase sempre. Como G é mensurável (é limite de uma seqüência de função simples) e m é completa, segue que f é mensurável e $\int_{[a,b]} fdm = \int_{[a,b]} Gdm = \int_a^b f(x)dx$. Isto prova a).

Para b) note que, se

$$H(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|x-y|<\delta} f(y)$$

e

$$h(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{0<|x-y|<\delta} f(y),$$

então $H(x) = h(x)$ se e somente se f é contínua em x. Não é difícil verificar que $H = G$ e $h = g$ quase sempre. Portanto H e h são Lebesgue mensuráveis e $\int_{[a,b]} H\,dm = \bar{I}_a^b(f)$ e $\int_{[a,b]} h\,dm = \underline{I}_a^b(f)$. Do fato que $H \ge h$, f é Riemann integrável se e somente se $\{x : H(x) \ne h(x)\}$ tem medida nula. Isto prova b). $\square$

A integral de Lebesgue estende a integral de Riemann (própria). Algumas integrais de Riemann impróprias (aquelas que são absolutamente convergente) podem ser interpretadas diretamente como integrais de Lebesgue, mas outras ainda requerem o processo de passagem ao limite. Por exemplo, se f é Riemann integrável em $[0,b]$ para todo $b > 0$ e Lebesgue integrável em $[0,\infty)$, então $\int_{[0,\infty)} f\,dm = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$ (pelo Teorema da Convergência Dominada), mas o limite do lado direito pode existir sem que f seja integrável (Exemplo: $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \mathcal{X}_{(n,n+1]}$). Daqui por diante utilizaremos, via de regra, $\int_a^b f(x)\,dx$ para denotar integrais de Lebesgue.

Seja f é uma função mensurável, limitada e não negativa em $[a,b]$. Para calcular a integral de Riemann de f, particionamos o intervalo $[a,b]$ em subintervalos e aproximamos f por cima e por baixo usando funções que são constantes em cada subintervalo da partição. Para calcular a integral de Lebesgue de f tomamos uma seqüência de funções simples que converge monotonicamente para f. Em particular se tomamos a seqüência construída no Teorema 5.1.1 a) estamos particionando a imagem de f em subintervalos I_j e aproximando f por uma constante em cada dos conjuntos $f^{-1}(I_j)$. Para iniciar, este processo requer uma teoria de medida mais sofisticada pois os conjuntos $f^{-1}(I_j)$ podem ser complicados mesmo quando f é contínua.

Veremos mais tarde (quando falarmos do completamento dos espaços L^p) que a integral de Lebesgue tem vantagens reais sobre a integral de Riemann.

Concluímos esta seção introduzindo a *função Gamma* Γ, que desempenhará um papel importante em uma série de oportunidades. Se $z \in \mathbb{C}$ e $\text{Re}z > 0$, definimos $f_z : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ por $f_z(t) = t^{z-1}e^{-t}$. Como $|t^{z-1}| = t^{\text{Re}z-1}$, temos que $f_z \in L^1(0, \infty)$ para $\text{Re}z > 0$ e definimos

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Como

$$\int_\epsilon^N t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_\epsilon^N + z\int_\epsilon^N t^{z-1}e^{-t}dt$$

pela integração por partes, fazendo $\epsilon \to 0$ e $N \to \infty$ vemos que para $\text{Re}z > 0$, Γ satisfaz a equação

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Esta equação pode então ser usada para estender Γ a quase todo o plano complexo. Isto é, para $-1 < \text{Re}z \leq 0$ podemos definir $\Gamma(z)$ por $\Gamma(z+1)/z$ e, por indução, tendo definido $\Gamma(z)$ para $\text{Re}z > -n$, definimos $\Gamma(z)$ para $\text{Re}z > -n-1$ por $\Gamma(z+1)/z$. O resultado é uma função definida em todo o plano complexo $\mathbb{C}$ exceto em singularidades nos inteiros não positivos onde o algorítimo descrito envolve a divisão por zero.

Temos que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ e portanto $\Gamma(n+1) = n!$. A maioria das aplicações da função Gamma envolve o fato que ela estende a função Fatorial para não inteiros.

Décima-Nona Aula (100 minutos) ↑

5.4 Segunda Prova

2.^{a} Prova de SMA-5926 - Análise I

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Nome:________________________________

19.11.2002

Questões	Valor	Notas
01ª	2.0	
02ª	1.0	
03ª	1.0	
04ª	2.0	
05ª	1.0	
06ª	1.0	
07ª	1.0	
08ª	1.0	
Total	10.0	

---

1. (a) Seja e $A_n \subset \mathbb{R}^2$ o disco aberto de centro em $((-1)^n/n, 0)$ e raio 1. Encontrar $\limsup_{n\to\infty} A_n$ e $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

   (b) Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de números reais e seja $A_n = (-\infty, x_n)$. Qual é a conexão entre $\limsup_{n\to\infty} x_n$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

2. Sejam X um conjunto, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(X)$ a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C} \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{P}(A)$, então a $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}_A(\mathcal{C} \cap A) \subset \mathcal{P}(A)$ gerada por $\mathcal{C} \cap A$ coincide com

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

3. Sejam X e Y conjuntos. Se $f : X \to Y$ uma função e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$, mostre que

$$\mathcal{M}(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{M}(\mathcal{C})),$$

onde $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{C}\}$ e $f^{-1}(\mathcal{M}(\mathcal{C})) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$.

4. Sejam $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, $\mathcal{M}_0$ a álgebra das uniões finitas disjuntas de intervalos fechados a direita ($(a,b] = \{x \in \mathbb{Q} : a < x \leq b\}$ ou (a,∞) ou $\mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Q}$) e $\mathcal{M}(\mathcal{M}_0)$ a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{M}_0$. Mostre que

   (a) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

   (b) Se μ é a medida da contagem em $\mathcal{M}$ então μ é $\sigma-$finita em $\mathcal{M}$ mas não é $\sigma-$finita em $\mathcal{M}_0$.

   (c) Existem conjuntos $A \in \mathcal{M}$ de medida finita que não podem ser aproximados por conjuntos em $\mathcal{M}_0$.

   (d) Se $\lambda = 2\mu$, então $\lambda = \mu$ em $\mathcal{M}_0$ mas não em $\mathcal{M}$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua à direita e μ_f a medida de Lebesgue Stieltjes associada a f. Mostre que

$$\mu_f(a,b) = f(b^-) - f(a), \quad \mu_f[a,b] = f(b) - f(a^-),$$

$$\mu_f[a,b) = f(b^-) - f(a^-) \ \text{ e } \ \mu_f(\{a\}) = f(a) - f(a^-),$$

   $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

6. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções mensuráveis em um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$, então

$$\{x : \lim f_n(x) \text{ existe }\}$$

   é um conjunto mensurável.

7. Seja $f : [a,b] \to [0,\infty)$ uma função contínua tal que

$$\int f\phi \, dm = 0$$

   para toda $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ simples. Mostre que $f = 0$ quase sempre.

8. Se $f_n, g_n, f, g \in L^1$, $f_n \to f$ e $g_n \to g$ quase sempre, $|f_n| \leq g_n$ e $\int g_n \to \int g$, mostre que $\int f_n \to \int f$.

Vigésima Aula (100 minutos) ↓

5.5 Modos de Convergência

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções complexas definidas em um conjunto X, a afirmativa "$f_n \to f$ quando $n \to \infty$" pode ser tomada em muitos sentidos diferentes, por exemplo, pontualmente ou uniformemente convergente. Se X é uma espaço de medida, podemos também falar de convergência quase sempre ou convergência em L^1. É claro que convergência uniforme implica convergência pontual, que por sua vez implica convergência quase sempre mas estes modos de convergência não implicam convergência L^1 ou vice versa. Será útil lembrar os seguinte exemplos em $\mathbb{R}$ (com a medida de Lebesgue):

(*i*) $f_n = n^{-1}\mathcal{X}_{(0,n)}$.

(*ii*) $f_n = \mathcal{X}_{(n,n+1)}$.

(*iii*) $f_n = n\mathcal{X}_{(0,1/n)}$

(*iv*) $f_1 = \mathcal{X}_{[0,1]}$, $f_2 = \mathcal{X}_{[0,1/2]}$, $f_3 = \mathcal{X}_{[1/2,1]}$, $f_4 = \mathcal{X}_{[0,1/4]}$, $f_5 = \mathcal{X}_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \mathcal{X}_{[1/2,3/4]}$, $f_1 = \mathcal{X}_{[3/4,1]}$, e em geral, $f_n = \mathcal{X}_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$ onde $n = 2^k+j$ com $0 \leq j < 2^k$.

Em (i), (ii) e (iii), $f_n \to 0$ uniformemente, pontualmente e quase sempre, respectivamente, mas $f_n \not\to 0$ em L^1 (de fato $\int |f_n| = \int f_n = 1$ para todo n). Em (iv), $f_n \to 0$ em L^1 pois $\int |f_n| = 2^{-k}$ para $2^k \leq n < 2^{k+1}$, mas $f_n(x)$ não converge para qualquer $x \in [0,1]$ pois há um número infinito de índices n para os quais $f_n(x) = 0$ e um número infinito de índices para os quais $f_n(x) = 1$.

Por outro lado, se $f_n \to f$ quase sempre e $|f_n| \leq g \in L^1$ para todo n, então $f_n \to f$ em L^1 (Isto é claro do Teorema da Convergência Dominada pois $|f_n - f| \leq 2g$). Também, veremos a seguir que, se $f_n \to f$ em L^1, então alguma subseqüência converge para f quase sempre.

Outro modo de convergência que é frequentemente utilizado é a convergência em medida. Dizemos que uma seqüência $\{f_n\}$ de funções complexas mensuráveis em $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é uma *seqüência de Cauchy em Medida* se para todo $\epsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \to 0 \text{ quando } m, n \to \infty,$$

e que $\{f_n\}$ *converge em medida* para f se para todo $\epsilon > 0$,

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Por exemplo, as seqüência (i), (iii) e (iv) convergem para zero em medida, mas (ii) não é de Cauchy em medida.

Proposição 5.5.1. *Se $f_n \to f$ em L^1, então $f_n \to f$ em medida.*

Prova: Se $E_{n,\epsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, então $\int |f_n - f| d\mu \geq \int_{E_{n,\epsilon}} |f_n - f| d\mu \geq \epsilon\mu(E_{n,\epsilon})$. Logo $\mu(E_{n,\epsilon}) \leq \epsilon^{-1} \int |f_n - f| d\mu \to 0$ quando $n \to \infty$. $\square$

A recíproca desta propositção é falsa como atestam os exemplos (i) e (iii).

Teorema 5.5.1. *Suponha que $\{f_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em medida. Então existe uma função mensurável f tal que $f_n \to f$ em medida e uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ que converge para f quase sempre. Além disso, se $f_n \to g$ em medida então $f = g$ quase sempre.*

Prova: Seja $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ uma subseqüência de $\{f_n\}$ tal que, se $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}| \geq 2^{-j}\}$ então $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$. Se $F_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_j$, então $\mu(F_k) \leq 2^{1-k}$ e se $x \notin F_k$, para $i \geq j \geq k$ temos

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq 2^{1-j}$$

portanto $\{g_j(x)\}$ é de Cauchy para x em F_k^c. Seja $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k = \limsup E_j$. Então $\mu(F) = 0$ e se $x \notin F$ então $x \in F_k^c$ para algum k e fazemos $f(x) = \lim_{j\to\infty} g_j \mathcal{X}_{F^c}(x)$ se $x \in X$. Então f é mensurável e $g_j \to f$ quase sempre.

Além disso, $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$ para $x \notin F_k$ e $j \geq k$. Como $\mu(F_k) \to 0$ quando $k \to \infty$ segue que $g_j \to f$ em medida.

Note que, se $0 < \epsilon \leq |f_n(x) - f(x)|$ então $\epsilon \leq |f(x) - g_j(x)| + |f_n(x) - g_j(x)|$ e portanto ou $|f(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ ou $|f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$. Disto segue que

$$\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\} \subset \{x : |f(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Segue do fato que que $\{f_n\}$ é de Cauchy em medida e do fato que $\{g_j\}$ converge para f em medida que $\{f_n\}$ converge para f em medida.

Se $f_n \to g$ em medida

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subset \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

para todo n. Portanto $\{x : |f(x) - g(x)| > 0\}$ tem medida nula. □

Corolário 5.5.1. *Se $f_n \to f$ em L^1 então existe subseqüência $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_j} \to f$ quase sempre.*

Convergência quase sempre não implica convergência em medida, como atesta o exemplo (ii), no entanto, se $\mu(X) < \infty$ vale o seguinte resultado mais geral

Teorema 5.5.2 (Egoroff). *Suponha que $\mu(X) < \infty$ e $\{f_n\}$, f são funções mensuráveis em X tais que $f_n \to f$ quase sempre. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em E^c.*

Prova: Sem perda de generalidade podemos assumir que $f_n \to f$ para todo $x \in X$. Se $k, n \in \mathbb{N}$ seja

$$E_n(k) = \cup_{m=n}^{\infty}\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

Para k fixo $E_n(k)$ decresce quando $n \to \infty$ e como $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$ e $\mu(X) < \infty$ temos que $\mu(E_n(k)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ escolha n_k tão grande que $\mu(E_{n_k}(k)) < \epsilon 2^{-k}$ e seja $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. Então $\mu(E) < \epsilon$ e $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$ para $n > n_k$ e $x \notin E$. Portanto $f_n \to f$ uniformemente em E^c. □

5.6 Medidas Produto e o Teorema de Fubini-Tonelli

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida. Já construímos a $\sigma-$álgebra produto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ em $X \times Y$ e agora vamos constuir uma medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Para começar, um conjunto da forma $A \times B$ em $X \times Y$ com $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$ é chamado um retângulo. Claramente

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F)$$

e

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c) = (A^c \times B) \cup (X \times B^c).$$

De onde segue que o conjunto de todos os retângulos é uma família elementar de conjuntos. Da Proposição 4.1.5 temos que a coleção $\mathcal{A}$ das uniões finitas disjuntas de retângulos é uma álgebra e da Proposição 4.1.2 a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$

Suponha que $A \times B$ é um retângulo que é uma união finita (ou enumerável) disjunta de retângulos $A_j \times B_j$. Então, para $x \in X$ e $y \in Y$

$$\mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \mathcal{X}_{A\times B}(x, y) = \sum \mathcal{X}_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum \mathcal{X}_{A_j}(x)\mathcal{X}_{B_j}(y)$$

Se integramos relativamente a x e usamos o Teorema 5.2.2 obtemos que

$$\begin{aligned} \mu(A)\mathcal{X}_B(y) &= \int \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y)\, d\mu(x) = \sum \int \mathcal{X}_{A_j}(x)\mathcal{X}_{B_j}(y)\, d\mu(x) \\ &= \sum \mu(A_j)\mathcal{X}_{B_j}(y) \end{aligned}$$

e integrando relativamente a y

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Seja $E \in \mathcal{A}$ e

$$E = \cup_j (A_j \times B_j) = \cup_k (C_k \times D_k)$$

duas representações de E como união finita disjunta de retângulos. Então

$$A_j \times B_j = \cup_k \left[(A_j \cap C_k) \times (B_j \cap D_k)\right] \text{ e } C_k \times D_k = \cup_j \left[(A_j \cap C_k) \times (B_j \cap D_k)\right]$$

e, das considerações acima,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) &= \textstyle\sum_j \sum_k \mu(A_j \cap C_k)\nu(B_j \cap D_k) \\
&= \textstyle\sum_k \sum_j \mu(A_j \cap C_k)\nu(B_j \cap D_k) \\
&= \textstyle\sum_k \mu(C_k)\nu(D_k).
\end{aligned}$$

Se $E \in \mathcal{A}$, então E é união disjunta de retângulos $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n$ e definimos

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

π está bem definida em $\mathcal{A}$, pois o seu valor independe da representação de E como união disjunta de retângulos.

Vigésima Aula (100 minutos) $\uparrow$

Vigésima-Primeira Aula (100 minutos) $\downarrow$

Em seguida, vamos verificar que π é uma pré-medida em $\mathcal{A}$. Resta apenas verificar que se $\mathcal{A} \ni E = \cup_k E_k$ onde $\{E_k\}$ é uma seqüência disjunta em $\mathcal{A}$, então $\pi(E) = \sum_k \pi(E_k)$. Note que $E_k = \cup_l R_{kl}$ once $\{R_{kl}\}_l$ é uma seqüência finita disjunta de retângulos e que $E = \cup_j \tilde{R}_j$ onde $\{\tilde{R}_j\}_j$ é uma seqüência finita disjunta de retângulos. Então

$$\tilde{R}_j = \cup_k \cup_l (R_{kl} \cap \tilde{R}_j)$$

e, das considerações anteriores,

$$\pi(\tilde{R}_j) = \sum_k \sum_j \pi(R_{kl} \cap \tilde{R}_j)$$

e

$$\pi(E) = \sum_j \pi(\tilde{R}_j) = \sum_k \sum_l \sum_j \pi(R_{kl} \cap \tilde{R}_j) = \sum_k \sum_l \pi(R_{kl}) = \sum_k \pi(E_k).$$

Segue do Teorema 4.3.2 que π induz uma medida exterior em $X \times Y$ cuja restrição a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ é uma medida que estende π. Chamamos esta medida de medida produto de μ e ν e denotamos por $\mu \times \nu$. Se μ e ν são $\sigma-$finitas $\mu \times \nu$ é $\sigma-$finita e neste caso $\mu \times \nu$ é a única medida em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tal que $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$ para todo retângulo $A \times B$.

A mesma constução funciona para um número finito de fatores. Isto é, suponha que $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ são espaços de medida para $j = 1, \ldots, n$. Se chamamos de retângulo o produto $A_1 \times \cdots \times A_n$ de elementos A_j de $\mathcal{M}_j$, então a coleção $\mathcal{A}$ das uniões finitas disjuntas de retângulos é uma álgebra e o mesmo procedimento descrito acima produz uma medida $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ em $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$ tal que

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots A_n) = \Pi_{j=1}^n \mu_j(A_j).$$

Além disso, se as μ_j's são $\sigma-$finitas a medida produto $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ também é $\sigma-$finita e a extensão a $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{M}_j$ é únicamente determinada. As propriedades associativas óbvias valem. Por exemplo, se identificamos $X_1 \times X_2 \times X_3$ com $(X_1 \times X_2) \times X_3$, temos $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ (a primeira dessas $\sigma-$álgebras é gerada pelos conjuntos da forma $A_1 \times A_2 \times A_3$ com $A_j \in \mathcal{M}_j$ e a segunda pelos conjuntos da forma $B \times A_3$ com $B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ e $A_3 \in \mathcal{M}_3$) e $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ (pois elas coincidem em conjuntos da forma $A_1 \times A_2 \times A_3$ com $A_j \in \mathcal{M}_j$ e portanto em geral pela unicidade). Todos os resultados abaixo possuem extensões óbvias para produtos com n fatores, mas nos restringiremos ao caso $n = 2$ por simplicidade.

Retornamos ao caso de dois espaços de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Se $E \subset X \times Y$, para $x \in X$ e $y \in Y$ definimos a $x-$seção E_x e $y-$seção E^y de E por

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Também, se f é uma função em $X \times Y$ definimos a $x-$seção f_x e a $y-$seção f^y de f por

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Portanto, por exemplo $(\mathcal{X}_E)_x = \mathcal{X}_{E_x}$ e $(\mathcal{X}_E)^y = \mathcal{X}_{E^y}$

Proposição 5.6.1. *a) Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então $E_x \in \mathcal{N}$ para todo $x \in X$ e $E^y \in \mathcal{M}$ para todo $y \in Y$.*

b) Se f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-mensurável, então f_x é $\mathcal{N}-$mensurável para todo $x \in X$ e f^y é $\mathcal{M}-$mensurável para todo $y \in Y$.

Prova: Seja $\mathcal{R}$ a coleção de todos os subconjuntos E de $X \times Y$ tais que $E_x \in \mathcal{N}$ para todo $x \in X$ e $E^y \in \mathcal{M}$ para todo $y \in Y$. Então $\mathcal{R}$ obviamente contém todos os retângulos ($(A \times B)_x = B$ se $x \in A$ e vazio caso contrário e $(A \times B)^y = A$ se $y \in B$ e vazio caso contrário).

Se $\{E_j\}_j \subset \mathcal{R}$ então

$$\begin{aligned} y \in (\cup_j E_j)_x &\Leftrightarrow (x, y) \in \cup_j E_j \Leftrightarrow (x, y) \in E_j \text{ para algum j} \\ &\Leftrightarrow y \in (E_j)_x \text{ para algum j } \Leftrightarrow y \in \cup_j (E_j)_x \end{aligned}$$

e segue que $(\cup_j E_j)_x \in \mathcal{N}$ para todo x. Semelhantemente para $y-$seções. Isto mostra que $\cup_j E_j \in \mathcal{R}$.

Se $E \in \mathcal{R}$ então

$$y \in (E^c)_x \Leftrightarrow (x,y) \notin E \Leftrightarrow y \notin E_x \Leftrightarrow y \in (E_x)^c$$

e segue que $(E^c)_x \in \mathcal{N}$ para todo x. Semelhantemente para $y-$seções. Isto mostra que $E^c \in \mathcal{R}$.

Com isto, mostramos $\mathcal{R}$ é uma $\sigma-$álgebra. Portanto $\mathcal{R} \supset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, o que prova (a).

A parte (b) segue de (a) se mostrarmos que $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ e $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$. Isto segue de

$$\begin{aligned} y \in (f_x)^{-1}(B) &\Leftrightarrow f_x(y) \in B \Leftrightarrow f(x,y) \in B \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow y \in (f^{-1}(B))_x. \end{aligned}$$

□

Antes de prosseguir vamos mostrar um lema técnico. Definimos uma *classe monótona* em um conjunto X como um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que é fechado sob união enumerável crescente e interseção enumerável decrescente. Claramente, toda $\sigma-$álgebra é uma classe monótona. Também, a interseção de qualquer família de classes monótonas é uma classe monótona e portanto, para cada $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ existe uma menor classe monótona contendo $\mathcal{E}$, chamada a classe monótona gerada por $\mathcal{E}$.

Lema 5.6.1 (da Classe Monótona). *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X, então a classe monótona $\mathcal{C}$ gerada por $\mathcal{A}$ coincide com a $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$ gerada por $\mathcal{A}$.*

Prova: Como $\mathcal{M}$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{A}$ temos que $\mathcal{M} \supset \mathcal{C}$.

Se mostrarmos que $\mathcal{C}$ é uma $\sigma-$álgebra, teremos que $\mathcal{C} \supset \mathcal{M}$. Para este fim, se $E \in \mathcal{C}$ definimos

$$\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{C} : E \backslash F, F \backslash E, \text{ e } E \cap F \text{ estão em } \mathcal{C}\}.$$

Claramente $\emptyset$ e E estão em $\mathcal{C}(E)$ e $E \in \mathcal{C}(F)$ se e somente se $F \in \mathcal{C}(E)$.

Vamos mostrar que $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona. Seja $\{F_n\}$ uma seqüência crescente de conjuntos em $\mathcal{C}(E)$. Então $\cup_{j=1}^n F_j = F_n \in \mathcal{C}(E)$, $E\backslash F_n \in \mathcal{C}$, $F_n\backslash E \in \mathcal{C}$ e $F_n \cap E \in \mathcal{C}$. Como $\{E\backslash F_n\}_n$ é decrescente e $\{F_n\backslash E\}_n$, $\{F_n \cap E\}_n$ são crescentes segue que $E\backslash(\cup_{j=1}^\infty F_n)$, $(\cup_{j=1}^\infty F_n)\backslash E$ e $(\cup_{j=1}^\infty F_n) \cap E$ estão em $\mathcal{C}$ e portanto $\cup_{j=1}^\infty F_n \in \mathcal{C}(E)$. Semelhantemente mostramos que se $\{F_n\}$ é uma seqüência decrescente em $\mathcal{C}(E)$ então $\cap_{j=1}^\infty F_j \in \mathcal{C}(E)$. Logo $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona.

Note que, se $E \in \mathcal{A}$, então $F \in \mathcal{C}(E)$ para todo $F \in \mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ é uma álgebra e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$; isto é, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$ e portanto $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$. Dito de outra forma, se $F \in \mathcal{C}$ então $F \in \mathcal{C}(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Mas isto significa que, se $F \in \mathcal{C}$, então $E \in \mathcal{C}(F)$ para todo $E \in \mathcal{A}$; isto é, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$. Logo $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(F)$ sempre que $F \in \mathcal{C}$. Concluímos que se $E, F \in \mathcal{C}$ então $E\backslash F$, $F\backslash E$ e $E \cap F$ estão em $\mathcal{C}$. Como $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, temos que $\mathcal{C}$ é uma álgebra. Mas então, se $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{C}$, temos que $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{C}$ para todo n e, como $\mathcal{C}$ é fechado sob união enumerável de uma seqüência crescente de conjuntos, segue que $\cup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{C}$. Isto mostra que $\mathcal{C}$ é uma $\sigma-$álgebra. $\square$

Vigésima-Primeira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Vigésima-Segunda Aula (100 minutos) $\downarrow$

Agora desmonstraremos os resultados principais desta seção, que relacionam as integrais em $X \times Y$ com as integrais em X e em Y.

Teorema 5.6.1. *Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida $\sigma-$finitos. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então as funções $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E^y)$ são mensuráveis em X e Y, respectivamente, e*

$$\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Prova: Primeiramente supomos que μ e ν são finitas, e seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ para os quais as conclusões do teorema são verdadeiras. Se $E = A \times B$ com $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, então $\nu(E_x) = \mathcal{X}_A(x)\nu(B)$ e $\mu(E^y) = \mu(A)\mathcal{X}_B(y)$, logo claramente $E \in \mathcal{C}$. Pela aditividade segue que a união finita de retângulos disjuntos está em $\mathcal{C}$ e pelo Lema da Classe Monótona será suficiente mostrar que $\mathcal{C}$ é uma Classe Monótona. Se $\{E_n\}$ é uma seqüência crescente em $\mathcal{C}$ e $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, então as funções $f_n(y) = \mu((E_n)^y)$ são mensuráveis e crescem pontualmente para $f(y) = \mu(E^y)$. Portanto, do Corolário 5.1.4, f é mensurável e pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int \mu(E^y)\, d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y)\, d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \mu \times \nu(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Semelhantemente $g(x) = \nu(E_x)$ é mensurável e $\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x)$, logo $E \in \mathcal{C}$. Se $\{E_n\}$ é uma seqüência decrescente em $\mathcal{C}$ e $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, a função $y \mapsto \mu((E_1)^y)$ está em $L^1(\nu)$ porque $\mu((E_1)^y) \leq \mu(X) < \infty$ e $\nu(Y) < \infty$, logo pelo teorema da Convergência Dominada $E \in \mathcal{C}$. Portanto $\mathcal{C}$ é uma classe monótona, e a prova está completa para o caso de espaços de medida finitos.

Finalmente, se μ e ν são $\sigma-$finitas, podemos escrever $X \times Y$ como a união de uma seqüência crescentes $\{X_j \times Y_j\}$ de retângulos de medida finita. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, o argumento precedente se aplica a $E \cap (X_j \times Y_j)$ para cada j e

$$\mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int \mathcal{X}_{X_j}(x)\nu(E_x \cap Y_j)\, \mu(x) = \int \mathcal{X}_{Y_j}(y)\mu(E^y \cap X_j)\, d\nu(y),$$

e uma última aplicação do Teorema da Convergência Monótona resulta no resultado desejado. □

Teorema 5.6.2 (de Fubini-Tonelli). *Suponha que* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *são espaços de medida* $\sigma-$*finitos.*

a) (Toneli) *Se* $f \in L^+(X \times Y)$, *então as funções* $g(x) = \int f_x \, d\nu$ *e* $h(y) = \int f^y \, d\mu$ *estão em* $L^+(X)$ *e* $L^+(Y)$, *respectivamente, e*

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu \times \nu) &= \int \left[\int f_x(y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f^y(x) d\mu(x) \right] d\nu(y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

b) (Fubini) *Se* $f \in L^1(\mu \times \nu)$, *então* $f_x \in L^1(\nu)$ *para quase todo* $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ *para quase todo* $y \in Y$, *as funções definidas quase sempre* $g(x) = \int f_x \, d\nu$ *e* $h(y) = \int f^y \, d\mu$ *estão em* $L^1(\mu)$ *e* $L^1(\nu)$, *respectivamente, e vale* (5.1)

Prova: O Teorema de Tonelli se reduz ao Teorema 5.6.1 no caso em que f é uma função característica e por linearidade vale para funções simples não negativas. Se $f \in L^+(X \times Y)$, seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções simples que convergem pontualmente e monotonicamente para f como no Teorema 5.1.1. Segue do Teorema da Convergência Monótona que

- as funções $g_n(x) = \int (f_n)_x \, d\nu$ e $h_n(y) = \int (f_n)^y \, d\mu$ convergem monotonicamente para g e h, de forma que g e h são mensuráveis e

- e que

$$\int g \, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu = \lim \int f_n \, d(\mu \times \nu) = \int f \, d(\mu \times \nu),$$

$$\int h \, d\nu = \lim \int h_n \, d\nu = \lim \int f_n \, d(\mu \times \nu) = \int f \, d(\mu \times \nu),$$

que é (5.1).

Isto estabelece o Teorema de Tonelli e também mostra que se $f \in L^+(X \times Y)$ e $\int f\, d(\mu \times \nu) < \infty$, então $g < \infty$ quase sempre e $h < \infty$ quase sempre; isto é, $f_x \in L^1(\nu)$ quase sempre em x e $f^y \in L^1(\mu)$ quase sempre em y. Além disso, g e h são integráveis.

Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$, então a conclusão do Teorema de Fubini segue aplicando estes resultados à parte positiva e negativa da parte real e imaginária de f.$\square$

Mesmo quando μ e ν são completas, $\mu \times \nu$ quase nunca é completa. De fato, suponha que existe um conjunto não vazio $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$ e $\mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$. Se $E \in \mathcal{P}(Y) \backslash \mathcal{N}$, então $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ pela Proposição 5.6.1, mas $A \times E \subset A \times Y$ e $\mu \times \nu(A \times Y) = 0$.

Se quisermos trabalhar com medidas completas podemos, é claro, considerar o completamento de $\mu \times \nu$. Neste caso a relação entre a mensurabilidade de uma função em $X \times Y$ e a mensurabilidade de suas seções não é tão simples. Contudo, o Teorema de Fubini-Tonelli continua válido quando reformulado apropriadamente.

Lema 5.6.2. *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida completos e $\sigma-$finitos. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e $\mu \times \nu(E) = 0$ e $F \subset E$, então $\nu(F_x) = 0$ $\mu-$quase sempre e $\mu(F^y) = 0$ $\nu-$quase sempre.*

Prova: Note que

$$0 = \mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

e portanto $\nu(E_x) = 0$ $\mu-$quase sempre e $\mu(E^y) = 0$ $\nu-$quase sempre. Como $F_x \subset E_x$ para todo x e $F^y \subset E^y$ para todo y temos (do fato que μ e ν são completas) que $F_x \in \mathcal{N}$, $\nu(F_x) = 0$ $\mu-$quase sempre e $F^y \in \mathcal{M}$, $\mu(F^y) = 0$ $\nu-$quase sempre. $\square$

Teorema 5.6.3 (de Fubini-Tonelli para Medidas Completas)**.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida completos e $\sigma-$finitos e seja $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ o completamento de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$.*

a) Se $f \in L^+(X \times Y, \lambda)$, então f_x é $\mathcal{N}-$mensurável para quase todo x e f^y é $\mathcal{M}-$mensurável para quase todo y. Adicionalmente, $x \mapsto \int f_x \, d\nu$ e $y \mapsto \int f_y \, d\mu$ são mensuráveis e

$$\begin{aligned} \int f d(\mu \times \nu) &= \int \left[\int f(x,y) d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int f(x,y) d\mu(x) \right] d\nu(y) \end{aligned} \tag{5.2}$$

b) Se $f \in L^1(X \times Y, \lambda)$, então f_x e f^y são integráveis para quase todo x e y. Além disso, $x \mapsto \int f_x \, d\nu$ e $y \mapsto \int f_y \, d\mu$ são integráveis e vale (5.2)*.*

Prova: Se $H \in \mathcal{L}$, segue do Teorema 4.2.2 que $H = G \cup F$ onde $G \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e $F \subset E$ para algum $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ com $\mu \times \nu(E) = 0$. Para cada $x \in X$, temos que $H_x = G_x \cup F_x$ e segue do Lema 5.6.2 que $\nu(F_x) = 0$ $\mu-$quase sempre. Disto, do Teorema 4.2.2 e da Proposição 5.6.1 segue que $H_x \in \mathcal{N}$ para $\mu-$quase todo x em X. Isto mostra que $(\mathcal{X}_H)_x$ é $\mathcal{N}-$mensurável para $\mu-$quase todo x em X. Do mesmo modo mostramos que $(\mathcal{X}_H)^y$ é $\mathcal{M}-$mensurável para $\nu-$quase todo y em Y.

Do Teorema 5.6.1 $x \mapsto \nu(G_x)$ é $\mathcal{M}-$mensurável e $y \mapsto \mu(G^y)$ é $\mathcal{N}-$mensurável. Além disso, $\nu(H_x) = \nu(G_x)$ para $\mu-$quase todo x em X e $\mu(H^y) = \mu(G^y)$ para $\nu-$quase todo y em Y. Como μ e ν são completas, o Teorema 5.1.6 implica que $x \mapsto \nu(H_x)$ é $\mathcal{M}-$mensurável e $y \mapsto \mu(H^y)$ é $\mathcal{N}-$mensurável.

Isto prova que $x \mapsto \int (\mathcal{X}_H)_x \, d\nu$ é $\mathcal{M}-$mensurável e que $y \mapsto \int (\mathcal{X}_H)^y \, d\mu$ é $\mathcal{N}-$mensurável.

A prova de (5.2) segue de

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \mathcal{X}_H \, d\lambda = \lambda(H) = \mu \times \nu(G) &= \int_Y \left[\int_X (\mathcal{X}_G)^y \; d\mu \right] d\nu = \int_Y \mu(G^y) d\nu \\ &= \int_Y \mu(H^y) d\nu = \int_Y \left[\int_X (\mathcal{X}_H)^y \; d\mu \right] d\nu \end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \mathcal{X}_H \, d\lambda = \lambda(H) = \mu\times\nu(G) &= \int_X \left[\int_Y (\mathcal{X}_G)_x \, d\nu\right] d\mu = \int_X \nu(G_x) d\mu \\ &= \int_X \nu(H_x) d\mu = \int_X \left[\int_Y (\mathcal{X}_H)_x \, d\nu\right] d\mu.\end{aligned}$$

O restante da prova segue como no Teorema de Fubini-Tonelli estendendo o resultado acima para funções simples por linearidade, aproximando f por funções simples. E no caso (b) segue tomando parte positiva e parte negativa da parte real e imaginária de f. $\square$

Vigésima-Segunda Aula (100 minutos) ↑

Vigésima-Terceira Aula (100 minutos) ↓

5.7 A Medida e a Integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

Seja m^1 a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^1$ e $\mathcal{L}^1$ o seu domínio. Em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$, seja π a medida produto de n cópias da medida de Lebesgue m^1. O domínio de π é $\mathcal{M} = \mathcal{L}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}$.

A *Medida de Lebesgue* m^n em $\mathbb{R}^n$ é o completamento de π. O Domínio $\mathcal{L}^n$ de m^n é a classe dos conjuntos *Lebesgue Mensuráveis* em $\mathbb{R}^n$. Também denotaremos por m^n a sua restrição a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Quando não houver perigo de confusão utilizaremos m para denotar m^n e escreveremos $\int f(x)\,dx$ para denotar $\int f\,dm^n$.

Começamos estabelecendo as extensões de alguns resultados que obtivemos para a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ para o caso $n-$dimensional. No que se segue, se $E = \Pi_{j=1}^n E_j$ é um retângulo em $\mathbb{R}^n$, nos referiremos aos conjuntos $E_j \subset \mathbb{R}$ como os lados de E.

Teorema 5.7.1. *Suponha que $E \in L^n$.*

$$a)\quad \begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(U) : U \supset E,\ U \text{ aberto}\}\\ &= \sup\{m(K) : S \subset E,\ U \text{ compacto}\}.\end{aligned}$$

b) $E = A_1 \cup N_1 = A_2\backslash N_2$ onde A_1 é um conjunto $\mathbf{F}_\sigma$, A_2 é um conjunto $\mathbf{G}_\delta$ e $m(N_1) = m(N_2) = 0$.

c) Se $m(E) < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{R_j\}_{j=1}^N$ cujos lados são intervalos tais que $m(E\Delta \cup_{j=1}^N R_j) < \epsilon$.

Prova: Pela definição de medida produto existe uma família contável $\{T_j\}$ de retângulos tais que

$$E \subset \cup_{j=1}^\infty T_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^\infty m(T_j) \leq m(E) + \epsilon.$$

Para cada j, aplicando o Teorema 4.4.2 aos lados de T_j, podemos encontrar um retângulo U_j cujos lados são abertos, $U_j \supset T_j$ e $m(u_j) \leq m(T_j) + \epsilon 2^{-j}$. Se $U = \cup_{j=1}^{\infty} U_j$ então U é aberto e $m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(T_j) + \epsilon \leq m(E) + 2\epsilon$. Isto prova a primeira parte de a). Para a segunda parte primeiro assumimos que E é limitado. Se E é fechado então E é compacto e o resultado é imediado. Se não, dado $\epsilon > 0$ escolhemos $U \supset E^- \backslash E$ tal que $m(U) \leq m(E^- \backslash E) + \epsilon$. Seja $K = E^- \backslash U$. Então K é compacto, $K \subset E$ e

$$\begin{aligned} m(K) &= m(E) - m(E \cap U) = m(E) - [m(U) - m(U \backslash E)] \\ &\geq m(E) - m(U) + m(E^- \backslash E) \geq m(E) - \epsilon. \end{aligned}$$

Se E é ilimitado seja $E_j = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : j \leq |x| < j\}$ e o argumento anterior implica que para cada $\epsilon > 0$ existe $K_j \subset E_j$ com $m(K_j) \geq m(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_n = \cup_{j=0}^{n} K_j$. Então H_n é compacto, $H_n \subset E$ e $m(H_n) \geq m(\cup_{j=0}^{n} E_j) - \epsilon$. Como $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{j=0}^{n} E_j)$ o resultado segue.

b) Pelo ítem anterior, se $m(E) < \infty$, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem $U_j \supset E \supset K_j$ tal que

$$m(U_j) - 2^{-j} \leq m(E) \leq m(K_j) + 2^{-j}.$$

Seja $V = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$ e $H = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$. Então $H \subset E \subset V$ e $m(V) = m(H) = m(E) < \infty$. Logo $m(V \backslash E) = m(E \backslash H) = 0$ o que prova o resultado para $m(E) < \infty$. O caso geral agora segue do fato que m é $\sigma-$finita e da $\sigma-$aditividade.

c) Se $m(E) < \infty$ então U_j $(m(U) = m(\cup_{j=1}^{\infty} U_j) \leq m(U_j) \leq m(E) + \epsilon)$ tem medida finita para todo j. Como os lados dos U_j são uniões contáveis de intervalos abertos disjuntos, tomando uma subunião finita adequada obtemos retângulos $V_j \subset U_j$ cujos lados são uniões finitas de intervalos tais que $m(V_j) \geq m(U_j) - 2^{-j}\epsilon$. Se N é suficientemente grande temos

$$m(E \backslash \cup_{j=1}^{N} V_j) \leq m(\cup_{j=1}^{N} U_j \backslash \cup_{j=1}^{N} V_j) + m(\cup_{N+1}^{\infty} U_j) < 2\epsilon$$

e

$$m(\cup_{j=1}^{N} V_j \backslash E) \leq m(\cup_{j=1}^{N} U_j \backslash E) < \epsilon$$

de forma que $m(E \Delta \cup_{j=1}^{N} V_j) < 3\epsilon$. Como $\cup_{j=1}^{N} V_j$ pode ser escrito como união finita disjunta de retângulos cujos lados são intervalos o resultado segue. $\square$

Teorema 5.7.2. *Se $f \in L^1(m)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função simples $\phi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{R_j}$, onde cada R_j é um produto de intervalos, tal que $\int |f - \phi| < \epsilon$ e existe uma função contínua g que se anula fora de um conjunto limitado tal que $\int |f - g| < \epsilon$.*

Prova: Usando a parte c) do teorema anterior aproximamos funções simples por funções simples definidas em união de retângulos com interior disjuntos cujos lados são intervalos e isto para aproximar funções simples por funções contínuas. Para aproximar funções L^1 por funções simples usamos o Teorema 5.3.3. $\square$

Teorema 5.7.3. *A medida de Lebesgue é invariante por translação. Mais precisamente, para $a \in \mathbb{R}^n$ defina $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $\tau_a(x) = x + a$.*

a) Se $E \in \mathcal{L}^n$ então $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m(\tau_a(E)) = m(E)$.

b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é Lebesgue mensurável, então $f \circ \tau_a$. Adicionalmente, se ou $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então

$$\int (f \circ \tau_a)\, dm = \int f\, dm.$$

Prova: a) Como τ_a e τ_{-a} são contínuas elas preservam os conjuntos de Borel. A fórmula $m(\tau_a(E)) = m(E)$ segue do resultado unidimensional se E é um retângulo e então segue para conjuntos de Borel pois m é determinada pela sua ação em retângulos. Em particular para a coleção dos conjuntos de Borel E com $m(E) = 0$ e a afirmativa a) segue.

b) Se f é Lebesgue mensurável e B é Borel mensurável em $\mathbb{C}$, temos $f^{-1}(B) = E \cup F$ onde E, N são Borel mensuráveis, $E \subset N$ e $m(N) = 0$. Mas $\tau_a^{-1}(F) \subset \tau_a^{-1}(N)$ é Borel mensurável e $m(\tau_a^{-1}(N)) = 0$ logo $(f \circ \tau_0)^{-1}(B) = \tau_a^{-1}(f^{-1}(B)) = \tau_{-a}(f^{-1}(B)) = \tau_{-a}(E) \cup \tau_{-a}(F) \in \mathcal{L}^n$ e $f \circ \tau_a$ é Lebesgue mensurável. A igualdade $\int (f \circ \tau_a)\, dm = \int f\, dm$ se reduz a igualdade $m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$ quando $f = \mathcal{X}_E$. Então é verdade para funções simples por linearidade e portanto para funções não negativas e mensuráveis pela definição de integral. Tomando parte positiva e parte negativa da parte real e da parte imaginária o resultado segue para funções L^1. $\square$

No que se segue compararemos a noção de *conteúdo*, muito utililizada nos cursos de cálculo avançado, com a medida de Lebesgue.

Para $k \in \mathbb{Z}$ seja Q_k a coleção dos cubos com lados de comprimento 2^{-k} cujos vértices estão na rede $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$; isto é, $\Pi_{j=1}^n [a_j, b_j] \in Q_k$ se e somente se $2^k a_j$ e $2^k b_j$ são inteiros e $b_j - a_j = 2^{-k}$ para todo j. Note que, quaisquer dois cubos em Q_k tem interiores disjuntos e os cubos em Q_{k+1} são obtidos dos cubos de Q_k dividindo ao meio os lados.

Se $E \subset \mathbb{R}^n$, definimos as aproximações internas e externas de E pela grade de cubos Q_k por

$$\underline{A}(E,k) = \cup\{Q \in Q_k : Q \subset E\}, \qquad \bar{A}(E,k) = \cup\{Q \in Q_k : Q \cap E \neq \emptyset\}.$$

A medida de $\underline{A}(E,k)$ é 2^{-nk} vezes o número de cubos em Q_k que estão em $\underline{A}(E,k)$ e o denotamos por $m(\underline{A}(E,k))$. Os conjuntos $\underline{A}(E,k)$ crescem com k enquanto que os $\bar{A}(E,k)$ decrescem com k. Portanto os limites

$$\underline{k}(E) = \lim_{k\to\infty} m(\underline{A}(E,k)), \qquad bark(E) = \lim_{k\to\infty} m(barA(E,k))$$

existem e são chamados conteúdo interior e exterior de E. Se eles são iguais o valor comum $k(E)$ é o *conteúdo de Jordam* de E.

Seja
$$\underline{A}(E) = \cup_{k=1}^{\infty}\underline{A}(E,k), \quad \bar{A}(E) = \cap_{k=1}^{\infty}\bar{A}(E,k).$$

Então $\underline{A}(E) \subset E \subset \bar{A}(E)$, $\underline{A}(E)$ e $\bar{A}(E)$ são conjuntos de Borel e $\underline{k}(E) = m(\underline{A}(E))$, $\bar{k}(E) = m(\bar{A}(E))$ portanto o conteúdo de Jordan existe se e somente se

$$m(\bar{A}(E)\backslash\underline{A}(E)) = 0$$

o que implica que E é Lebesgue mensurável e $m(E) = k(E)$.

Lema 5.7.1. *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $U = \underline{A}(U)$. Além disso, U é união contável de cubos com interiores disjuntos.*

Prova: Se $x \in U$ seja $\delta(x, U^c) > 0$. Se $Q \in \mathcal{Q}_k$ contendo x então todo $y \in Q$ está a uma distância de no máximo $2^{-k}\sqrt{n}$ de x então $Q \subset U$ se $2^{-k}\sqrt{n} < \delta$. Então $x \in \underline{A}(U,k) \subset \underline{A}(U)$. Isto mostra que $U = \underline{A}(U)$. A segunda afirmativa segue escrevendo

$$\underline{A}(U) = \underline{A}(U,0) \cup (\cup_{k=1}^{\infty} \underline{A}(U,k) \backslash \underline{A}(U,k-1))$$

e notando que $A(u,0)$ é união contável de cubos com interiores disjuntos e o mesmo vale para o fecho de $\underline{A}(U,k)\backslash\underline{A}(U,k-1)$ e o resultado segue. $\square$

O lema anterior implica que a medida de Lebesgue de um aberto é igual ao seu conteúdo interior. Por outro lado, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $Q_0 = \{x : \max_{1 \le j \le n} |x_j| \le 2^M\}$ contém F em seu interior. Se $Q \in \mathcal{Q}_k$ e $Q \subset Q_0$ então out $Q \cap F \neq \emptyset$ ou $Q \subset Q_0 \backslash F$. Logo

$$m(\bar{A}(F,k)) + m(\underline{A}(Q_0 \backslash F, k)) = m(Q_0)$$

Fazendo $k \to \infty$ vemos que $\bar{k}(F) + \underline{k}(Q_0 \backslash F) = m(Q_0)$. Mas $Q_0 \backslash F$ é a união de um conjunto aberto com a fronteira de Q_0 que tem conteúdo nulo. Logo $\underline{k}(Q_0 \backslash F) = \underline{k}(Q_0^{\circ} \backslash F) = m(Q_0 \backslash F)$. Segue que a medida de Lebesgue de qualquer conjunto compacto é igual ao seu conteúdo exterior.

Comparando a medida de Lebesgue e o Conteúdo de Jordan temos que

- O conteúdo de Jordan é obtido aproximando E por dentro e por fora por união finita de retângulos.
- A medida de Lebesgue de E por outro lado é dada por um processo de aproximação em duas etapas:
  - Aproximamos E por fora por abertos e por dentro por compactos
  - Aproximamos abertos por dentro por união finita de cubos e compactos por fora por união finita de cubos.

  Os conjuntos Lebesgue mensuráveis são exatamente aqueles para os quais estas aproximações exterior-interior e interior-exterior dão a mesma resposta no limite como vimos no Exercício 14 do Capítulo 4.

Vigésima-Terceira Aula (100 minutos) ↑

Vigésima-Quarta Aula (100 minutos) ↓

A seguir investigamos o comportamento das integrais de Lebesgue sob transformações lineares.

- Identificamos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com a matriz $(T_{ij}) = (\langle e_i, Te_j\rangle)$, $\{e_j\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.
- $\det(T \circ S) = \det(T)\det(S)$, $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformações lineares.
- $GL(n, \mathbb{R}) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : T$ é linear e inversível$\}$
- $T \in GL(n, \mathbb{R})$ é a composta de um número finito de transformações lineares dos tipos

$$T_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, cx_j, \dots, x_n), \qquad c \neq 0,$$

$$T_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j + cx_k, \dots, x_n), \quad j \neq k,$$

e

$$T_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Teorema 5.7.4. *Suponha que $T \in GL(n, \mathbb{R})$.*

a) Se f é uma função Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^n$, então $f \circ T$ também é. Se $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então

$$\int f(x)dx = |\det T| \int f \circ T(x)dx \tag{5.3}$$

b) Se $E \in \mathcal{L}^n$, então $T(E) \in \mathcal{L}^n$ e $m(T(E)) = |\det T| m(E)$.

Prova: Primeiramente suponha que f é Borel mensurável. Então $f \circ T$ é Borel mensurável pois T é contínua. Se (5.3) é válida para transformações S e T, então também é válida para $T \circ S$, pois

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= |\det T| \int f \circ T(x)dx = |\det T|\,|\det S| \int (f \circ T) \circ S(x)dx \\ &= |\det T \circ S| \int f \circ (T \circ S)(x)dx. \end{aligned}$$

Logo, basta provar (5.3) para transformações dos tipos T_1, T_2 e T_3.

- Para T_3 o resultado segue do Teorema de Fubini e
- Para T_1 e T_2 o resultado segue do Teorema de Fubini e das fórmulas

$$\int f(t)\,dt = |c| \int f(ct)\,dt \quad \text{e} \quad \int f(t+a)dt = \int f(t)dt$$

que por sua vez seguem de $m(E+r) = m(E)$ e $m(rE) = |r|m(E)$. Como $\det T_1 = c$ e $\det T_2 = \det T_3 = 1$ (5.3) segue.

Se E é Borel mensurável $T(E)$ também é pois T^{-1} é contínua e tomando $f = \mathcal{X}_{T(E)}$ obtemos que

$$m(T(E)) = \int \mathcal{X}_{T(E)} = |\det T \int \mathcal{X}_{T(E)} \circ T = |\det(T)| \int \mathcal{X}_E = |\det(T)|m(E).$$

Em particular, a classe dos conjuntos Borel mensuráveis com medida nula é invariante por T e por T^{-1} e portanto $\mathcal{L}^n$ também é invariante por T e T^{-1}. Com isto $b)$ vale. A prova de a) para o caso em que f é Lebesgue mensurável agora segue de b) da seguinte forma: b) e a) coincidem para funções características, disto a) vale para funções simples por linearidade, para funções mensuráveis e não negativas a) segue do Teorema da Convergência Monótona e finalmente para funções L^1 o resultado segue tomando parte positiva e negativa das partes reais e imaginária. □

Corolário 5.7.1. *A medida de Lebesgue é invariante por rotações.*

Prova: Rotações são transformações lineares que satisfazem $TT^* = I$ onde T^* é a matriz transposta de T. Como $\det T = \det T^*$ temos que $|\det T| = 1$.□

No que se segue vamos obter um teorema de mudança de variáveis para o caso em que a transformação não é linear.

Uma transformação $G = (g_1, \ldots, g_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é injetiva com $D_xG = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)$ inversível para todo $x \in \Omega$ é chamada um C^1-difeomorfismo (se G é linear $D_xG = G$). Note que $G^{-1} : G(\Omega) \to \Omega$ também é um

C^1-difeomorfismo e $D_x(G^{-1}) = [D_{G^{-1}(x)}G]^{-1}$ pelo Teorema da Função Inversa.

Antes de enunciar o teorema vamos estabelecer a notação que será utilizada: se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $T = (T_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$, então

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{e} \quad \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |T_{ij}|.$$

Segue que

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$$

e que $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq h\}$ é o cubo cujo lado tem comprimento $2h$ centrado em a.

Teorema 5.7.5. *Suponha que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e que $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um C^1-difeomorfismo.*

a) Se f é uma função Lebesgue mensurável em $G(\Omega)$, então $f \circ G$ é Lebesgue mensurável em Ω. Se $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então

$$\int f(x)dx = \int f \circ G(x)|\text{det}D_xG|dx \tag{5.4}$$

b) Se $E \in \mathcal{L}^n$, então $G(E) \in \mathcal{L}^n$ e

$$m(T(E)) = \int_E |\text{det}DxG| \, dx.$$

Prova: Suponha que f é Borel mensurável, então $f \circ G$ é Borel mensurável pois G é contínua. Se E é Borel mensurável então $G(E)$ é Borel mensurável pois G^{-1} é contínua.

Seja Q um cubo em Ω, digamos que $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq h\}$. Do teorema do valor médio

$$g_j(x) - g_j(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_j - a_j)(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(y))$$

para algum a no segmento que une x a a. Logo, para $x \in Q$

$$\|G(x) - G(a)\| \leq h(\sup_{y \in Q} \|D_y G\|).$$

Em outras palavras $G(Q)$ está contido num cubo de lado $2h \sup_{y \in Q} \|D_y G\|$ centrado em $G(a)$. Logo

$$m(G(Q)) \leq (\sup_{y \in Q} \|D_y G\|)^n m(Q).$$

Se $T \in GL(n, \mathbb{R})$ podemos aplicas esta fórmula e o Teorema anterior a $T^{-1}G$ para obter

$$m(G(Q)) \leq |\mathrm{det} T| m(T^{-1}(G(\Omega)) \leq |\mathrm{det} T| (\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D_y G\|)^n m(Q). \tag{5.5}$$

Como $D_y G$ é contínua em y, para cada $\epsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\|(D_z G)^{-1} D_y G\| \leq 1 + \epsilon, \quad \forall y, z \in Q, \quad \|y - z\| \leq \delta.$$

Subdividimos Q em subcubos $Q_1, \ldots, Q_N$ cujos interiores são disjuntos, cujos lados são no máximo δ e cujos centros são $x_1, \ldots, x_N$. Aplicando (5.5) com Q substituido por Q_j e com $T = D_{x_j} G$ obtemos

$$\begin{aligned} m(G(Q)) &\leq \textstyle\sum_{j=1}^N m(G(Q_j)) \\ &\leq \textstyle\sum_{j=1}^N |\mathrm{det} D_{x_j} G| (\sup_{y \in Q_j} \|(D_{x_j} G)^{-1} D_y G\|)^n m(Q_j) \\ &\leq (1 + \epsilon) \textstyle\sum_{j=1}^N |\mathrm{det} D_{x_j} G| m(Q_j). \end{aligned}$$

Esta última soma é a integral de $\sum_{j=1}^N |\mathrm{det} D_{x_j} G| \mathcal{X}_{Q_j}$, que tende uniformemente em Q para $|\mathrm{det} D_x G|$ quando $\delta \to 0$ (já que $D_x G$ é contínua). Portanto, fazendo $\delta \to 0$ e $\epsilon \to 0$ encontramos que

$$m(G(Q)) \leq \int_Q |\mathrm{det} D_x G| \, dx.$$

Afirmamos que esta estimativa vale para Q substituido por qualquer conjunto Borel mensurável em Ω. De fato, se $U \subset \Omega$ é aberto podemos escrever $U =$

$\cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ onde os Q_j's são cubos com interiores disjuntos. Como as fronteiras dos cubos tem medida nula, temos

$$m(G(U)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(G(Q_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |\text{det} D_x G| \, dx \leq \int_U |\text{det} D_x G| \, dx.$$

Além disso, se $E \subset \Omega$ é um conjunto Borel mensurável com medida finita existe uma seqüência de abertos $U_j \subset \Omega$ com medida finita tal que $E \subset \cap_{j=1}^{\infty} U_j$ e $m(\cap_{j=1}^{\infty} U_j \backslash E) = 0$. Logo, do Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} m(G(E)) &\leq m(G(\cap_{j=1}^{\infty} U_j)) \leq \lim_{j \to \infty} m(G(U_j)) \\ &\leq \lim_{j \to \infty} \int_{U_j} |\text{det} D_x G| \, dx \leq \int_E |\text{det} D_x G| \, dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como m é $\sigma-$finita, segue que $m(G(E)) \leq \int_E |\text{det} D_x G| \, dx$ para todo $E \subset \Omega$ Borel mensurável.

Se $f = \sum a_j \mathcal{X}_{A_j}$ é uma função simples não negativa em $G(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{G(\Omega)} f(x) \, dx &= \sum a_j m(A_j) \leq \sum a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\text{det} D_x G| \, dx \\ &= \int_\Omega f \circ G(x) |\text{det} D_x G| \, dx. \end{aligned}$$

O Teorema 5.1.1 e o Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\int_{G(\Omega)} f(x) \, dx \leq \int_\Omega f \circ G(x) |\text{det} D_x G| \, dx$$

para qualquer função não negativa f. Mas o mesmo raciocínio se aplica com G substituído por G^{-1} e f substituída por $f \circ G |D_x G|$, de forma que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f \circ G(x) |\text{det} D_x G| \, dx &\leq \int_{G(\Omega)} f \circ G \circ G^{-1} |\text{det} D_{G^{-1}(x)} G| |\text{det} D_x G^{-1}| dx \\ &= \int f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Isto estabelece a) para $f \geq 0$ e o caso $f \in L^1$ segue imediatamente. Como b) é o caso especial de a) quando $f - \mathcal{X}_{G(E)}$ o teorema está provado para f

Borel mensurável e E Borel mensurável. O caso geral segue como no Teorema 5.7.4. $\square$

Vigésima-Quarta Aula (100 minutos) $\uparrow$

Vigésima-Quinta Aula (100 minutos) ↓

5.8 Integração em Coordenadas Polares

O sistemas de coordenadas não lineares mais importantes em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são as coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta$) e esféricas ($x = r\text{sen}\phi\cos\theta$, $y = r\text{sen}\phi\text{sen}\theta$ e $z = r\cos\phi$). O Teorema 5.7.5, aplicado a estes sistemas de coordenadas, resultam nas fórmulas familiares (informalmente) $dx\,dy = rdr\,d\theta$ e $dx\,dy\,dz = r^2\text{sen}\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$. Sistemas de coordenadas semelhantes existem em $\mathbb{R}^n$ mas eles se tornam mais e mais complicados a medida que a dimensão cresce. Para a maioria dos propósitos, contudo, é suficiente saber que a medida de LEbesgue é efetivamente o produto da medida $r^{n-1}dr$ em $(0,\infty)$ com uma certa medida de superfície na esfera unitária ($d\theta$ para $n=2$, $\text{sen}\phi\,d\theta\,d\phi$ para $n=3$).

Denotaremos a esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ por S^{n-1}. Se $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, as coordenadas polares de x são

$$r = |x| \in (0,\infty), \qquad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

A transformação $\Phi(x) = (r, x')$ é uma bijeção contínua de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ em $(0,\infty)\times S^{n-1}$ cuja inversa contínua é $\Phi^{-1}(r,x') = rx'$. Denotamos por m_* a medida de Borel em $(0,\infty)\times S^{n-1}$ unduzida por Φ pela medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E)).$$

Mais ainda, definimos a medida $\rho = \rho_n$ em $(0,\infty)$ por $\rho(E) = \int_E r^{n-1}dr$.

Teorema 5.8.1. *Existe uma única medida e Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ em S^{n-1} tal que $m_* = \rho\times\sigma$. Se f é Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $f \geq 0$ ou $f \in L^1(m)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}d\sigma(x'\,dr. \tag{5.6}$$

Prova: A equação (5.6), quando f é uma função caracterísitica, é simplesmente uma forma diferente de escrever $m_* = \rho\times\sigma$ e ela segue para uma função geral por linearidade e aproximação. Portanto precisamos apenas construir σ.

Se E é um conjunto de Borel em S^{n-1}, para $a > 0$ seja

$$E_a = \Phi^{-1}((0,a] \times E) = \{rx' : 0 \leq r \leq a,\ x' \in E\}.$$

Se (5.6) vale então $f = \mathcal{X}_{E_1}$, temos que

$$m(E_1) = \int_0^1 \int_E r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr = \sigma(E) \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\sigma(E)}{n}.$$

Portanto, definimos $\sigma(E)$ por $n.m(E_1)$. Como a transformação $E \to E_1$ leva conjuntos de Borel em conjuntos de Borel e comuta com uniões, interseções e complementos, é claro que σ é uma medida de Borel. Como E_a é a imagem de E_1 pela aplicação $x \mapsto ax$, segue do Teorema 5.7.5 que $m(E_a) = a^n m(E_1)$, e portanto, se $0 < a < b$,

$$\begin{aligned} m_*((a,b] \times E) &= m(E_b \backslash E_a) = \tfrac{b^n - a^n}{n} \sigma(E) = \sigma(E) \int_a^b r^{n-1} dr \\ &= \rho \times \sigma((a,b] \times E). \end{aligned}$$

Fixe $E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}$ e seja $\mathcal{A}_E$ a coleção das uniões finitas disjuntas de conjuntos da forma $(a,b] \times E$. Pela Proposição 4.1.5, $\mathcal{A}_E$ é uma álgebra em $(0,\infty) \times E$ que gera a $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}_E = \{A \times E : A \in \mathcal{B}_{(0,\infty)}\}$. Pelos cálculos precedentes $M_* = \rho \times \sigma$ em $\mathcal{A}_E$ e portanto, pela unicidade de extensão do Teorema 4.3.2, $m_* = \rho \times \sigma$ em $\mathcal{M}_E$. Mas $\cup\{\mathcal{M}_E : E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$ é precisamente o conjunto de todos os Retângulos de Borel em $(0,\infty) \times S^{n-1}$ e, por outra aplicação da unicidade de extensão do Teorema 4.3.2, segue que $m_* = \rho \times \sigma$ em todos os conjuntos de Borel. $\square$

É claro que o teorema anterior pode ser estendido para funções Lebesgue mensuráveis considerando o completamento da medida σ.

Corolário 5.8.1. *Se f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, não negativa ou integrável e tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g em $(0,\infty$, então*

$$\int f(x)\, dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1}\, dr.$$

Corolário 5.8.2. *Sejam c e C constantes positivas e $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. Suponha que f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$.*

a) *Se $|f(x)| \leq c|x|^{-\alpha}$ em B para alguma $a < n$, então $f \in L^1(B)$. Contudo, se $f(x) > C|x|^{-n}$ em B, então $f \notin L^1(B)$.*

b) *Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ em B^c para algum $a > n$, então $f \in L^1(B^c)$. Contudo, se $f(x) \geq C|x|^{-n}$ em B^c, então $f \notin L^1(B^c)$.*

Prova: Aplique o Corolário 5.8.2 a $|x|^{-a}\mathcal{X}_B$ $|x|^{-a}\mathcal{X}_{B^c}$. □

Agora calcularemos $\sigma(S^{n-1})$. É claro que $\sigma(S^1) = 2\pi$.

Proposição 5.8.1. *Se $a > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Prova: Denote a integral do lado esquerdo por I_n. Para $n = 2$, pelo Corolário 5.8.2 temos

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty re^{-ar^2} dr = -\left(\frac{\pi}{a}\right) e^{-ar^2}\Big|_{r=0}^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

Como $e^{-a|x|^2} = \Pi_{j=1}^n e^{-ax_j^2}$, o Teorema de Tonelli implica que $I_n = I_1^n$. Em particular, $I_1 = (I_2)^{1/2}$ e $I_n = (\pi/a)^{n/2}$. □

Uma vez provado este resultado, o mecanismo usado nesta prova pode ser invertido para calcular $\sigma(S^{n-1})$ para todo m em termos da função Γ.

Proposição 5.8.2. $\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Prova: Pelo Corolário 5.8.2 e pela Proposição 5.8.1 e a substituição $s = r^2$,

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx \; &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \\ &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} ds = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Corolário 5.8.3. *Se* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$*, então* $m(B^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$.

Prova: $m(B^n) = n^{-1}\sigma(S^{n-1})$ pela definição de σ. Isto juntamente com $\frac{1}{2}n\Gamma(\frac{1}{2}n) = \Gamma(\frac{1}{2}n + 1$ implica o resultado. □

Proposição 5.8.3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

Prova: Por propriedades da função Γ temos que

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$$

e pela Proposição 5.8.1 e a substituição $s = r^2$,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty s^{-1/2}e^{-s}ds = 2\int_0^\infty e^{-e^2}dr = \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2}dr = \sqrt{\pi}.$$

□

Vigésima-Quinta Aula (100 minutos) ↑

Capítulo 6

Espaços L^p

Vigésima-Sexta Aula (100 minutos) ↓

Neste capítulo fixamos um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e identificamos funções mensuráveis que são iguais quase sempre.

6.1 Definição e Propriedades Elementares

Definição 6.1.1. *Seja $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$; definimos*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

e para $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \exists\, c \geq 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}$$

Também definimos, para $0 < p < \infty$, $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ por

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

e para $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Mostraremos que, para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. Observamos que se $\Omega = \mathbb{N}$ e μ é a medida da contagem então $L^p(\Omega) = \ell_p$.

Exercício: Mostre que se $f \in L^\infty(\Omega)$ então

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$$

tem medida nula, isto é, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ quase sempre em Ω.

Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por q o número definido por

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $1 < p < \infty$

b) $q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$.

O número q é chamado expoente conjugado de p.

Lema 6.1.1 (A desigualdade de Young)**.** *Se $1 < p < \infty$ e a, b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q$$

a igualdade só ocorre quando $a^p = b^q$.

Prova: Se $\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda \Rightarrow \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ e se $\lambda - 1 < 0$ temos que $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1$ $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$. Logo para $t \neq 1$ temos $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, de onde $(1-\lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$ (a igualdade só vale se $t = 1$). Se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por a^p/b^q e λ por $\frac{1}{p}$. Se $b = 0$ o lema é trivial. $\square$

Lema 6.1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p\, \|g\|_{p'}.$$

Prova: Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem imediatamente. Se $1 < p < \infty$ temos que

$$|f(x)|\, |g(x)| \leq \frac{1}{p}\, |f(x)|^p + \frac{1}{q}\, |g(x)|^q$$

e portanto

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \frac{1}{p}\, \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\, \|g\|_{L^q}^q.$$

mostrando que $fg \in L^1(\Omega)$. Substituindo f por λf, $\lambda > 0$, temos

$$\int |fg|\, d\mu \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\, \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\, \|g\|_{L^q}^q$$

e minimizando o lado direito da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$ temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\, \|g\|_{L^{p'}}^{q/p}$ e o resultado segue. $\square$

Exercício: Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ e $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$, então $f = f_1 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

Em particular se $f \in L^p \cap L^q$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $f \in L^r(\Omega)$, $\forall\ p \leq r \leq q$ e

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Teorema 6.1.1. *$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ é uma norma, $1 \leq p \leq \infty$.*

Prova: Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ são evidentes (exercício).

Suponha que $1 < p < \infty$ e sejam $f, g \in L^p(\Omega)$. Basta mostrar que $f + g \in L^p$ e que a desigualdade triangular para $\|\cdot\|_{L^p}$ vale (o restante é trivial).

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}\,)^p \\ &= 2^p \max\{\,|f(x)|^p\,,\, |g(x)|^p\} \;\leq\; 2^p\,(\,|f(x)|^p + |g(x)|^p\,) \end{aligned}$$

Portanto, $f + g \in L^p(\Omega)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |f+g|^{p-1}\, |f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \\ &\leq \|\,|f+g|^{p-1}\,\|_{L^{p'}}\, \|f\|_{L^p} + \|\,|f+g|^{p-1}\|_{L^{p'}}\, \|g\|_{L^p} \\ &\leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\, \|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

Portanto, $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. □

Exercício: Mostre o Teorema 2.8 em Adams [1978]. Mostre também o Corolário 2.9.

Exercício: Mostre que $f_n \to f$ em $L^\infty(\Omega)$ se e somente se existe $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E^c) = 0$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em E.

Note que se $0 < p < 1$ a desigualdade triangular falha para $\|\cdot\|_p$. De fato, suponha que $a > 0$, $b > 0$ e $0 < p < 1$. Para $t > 0$ temos que $t^{p-1} > (a+t)^{p-1}$ e integrando de 0 a b obtemos que $a^p + b^p > (a+b)^p$. Portanto, se E e F são conjuntos disjuntos com medida positiva e finita fazemos $a = \mu(E)^{1/p}$ e $a = \mu(F)^{1/p}$ e vemos que

$$\|\mathcal{X}_E + \mathcal{X}_F\|_p = (a^p + b^p)^{1/p} > a + b = \|\mathcal{X}_E\|_p + \|\mathcal{X}_F\|_p.$$

Vigésima-Sexta Aula (100 minutos) ↑

Vigésima-Sétima Aula (100 minutos) ↓

Teorema 6.1.2 (Teorema de Riesz-Fischer). *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Prova: Suponha primeiramente que $p = \infty$.
Se (f_n) é de Cauchy em L^∞, dado $k \geq 1$ existe N_k tal que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \text{ para todo } m, n \geq N_k.$$

Logo existe E_k com medida nula tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus E_k.$$

Seja $E = UE_k$, então $m(E) = 0$ e $\forall\, x \in \Omega \setminus E$, $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, portanto $(f_n(x))$ é convergente (digamos para $f(x)$) $\forall\, x \in \Omega \setminus E$ e

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus E, \quad n \geq N_k.$$

Logo $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k}$ $\forall\, n \geq N_k$ e $\forall\, k > 1$. Segue que

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0.$$

Se $1 \leq p < \infty$. Seja (f_n) de Cauchy. Basta mostrar que (f_n) tem uma subseqüência convergente em L^p para concluir que (f_n) é convergente em L^p. Seja (f_{n_k}) tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall\, k \geq 1.$$

Sejam $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ e $g = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Logo $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$, $\forall\, n$ e do Teorema da Convergência Monótona

$$g(x) < \infty \text{ quase sempre em } \Omega \text{ e } g \in L^p(\Omega).$$

Por outro lado, para $m \geq n \geq 2$ (por simplicidade escreveremos f_k para denotar f_{n_k})

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) \end{aligned}$$

e segue que $\{f_m(x)\}$ é de Cauchy para quase todo $x \in \Omega$. Se $f(x)$ denota o limite de $\{f_m(x)\}$ quando este limite existir temos que

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} f_m(x) - f(x) \xrightarrow{\text{q.s.}} 0 \\ |f_m(x) - f(x)| \leq g(x) \end{array}\right\} \overset{\text{TCD}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \|f_m - f\|_{L^p} \to 0 \\ f \in L^p \end{array}\right.$$

□

Proposição 6.1.1. *Se $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{E_j}$ ($\mu(E_j) < \infty$, $1 \leq j \leq n$, se $1 \leq p < \infty$) é denso em $L^p(\Omega)$.*

Prova: Claramente tais funções estão em $L^p(\Omega)$. Se $f \in L^p(\Omega)$, do Teorema 5.1.1 existe uma seqüência de funções simples $f_n \to f$ quase sempre (uniformemente onde em conjuntos onde f é limitada) em Ω com $|f_n| \leq |f|$. Então o caso $p = \infty$ está demonstrado. Para $1 \leq p < \infty$, $f_n \in L^p$ e $|f_n - f|^p \leq 2^p|f|^p \in L^1(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, $\|f_n - f\|_p \to 0$. Além disso, se $f_n = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{E_j}$ onde os E_j são disjuntos e os a_j são não nulos, devemos ter $\mu(E_j) < \infty$ pois $\sum_{j=1}^N |a_j|^p \mu(E_j) = \int |f_n|^p d\mu < \infty$. □

Corolário 6.1.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função $L^1(m)$ tal que $f(x) = 0$ se $x \in \Omega^c$, então, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\int |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon$. Além disso, a restrição de f a Ω é uma função contínua tal que $\int_\Omega |f - g|\, dx < \epsilon$.*

Corolário 6.1.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$C_B(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ é contínua e limitada}\}$$

é denso em $L^p(\Omega)$ e portanto $L^p(\Omega)$ é separável.

A seguir apresentamos os resultados que permitem concluir que os espaços $L^p(\Omega)$ são reflexivos e identificar o dual dos espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 6.1.3. *Os espaços $L^p(\Omega)$ são uniformemente convexos e portanto reflexivos.*

A prova deste resultado será apresentada no Curso de Análise II. Aqui apenas utilizaremos este resultado para identificar o dual de espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Há outras provas do teorema abaixo que não envolvem a necessidade de se saber a priori que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, são reflexivos mas estas envolvem o Teorema de Radon-Nikodyn que também não será abordado neste curso.

Teorema 6.1.4 (de Representação de Riesz)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in (L^p)^*$, *então existe um único* $u \in L^q$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u\, f\,, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}$. *A aplicação* $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ *definida por* $Tu = \phi$ *é uma isometria sobre* $(L^q(\Omega))^*$. *Isto permite identificar* $L^q(\Omega)$ *e* $(L^p(\Omega))^*$ *o que é adotado sistematicamente.*

Prova: Defina $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ por

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega u\, f \quad \forall\ f \in L^p(\Omega)$$

então

$$|\, \langle Tu, f \rangle\, | \leq \|u\|_{L^q}\, \|f\|_{L^p}$$

e portanto $\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}$. Por outro lado se $f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)$, $(f(x) = 0$ se $u(x) = 0)$. Então $f_0 \in L^p$ e $\langle Tu, f_0 \rangle = \|u\|_{L^q}^q$ e $\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^q}^{q-1}$. Logo

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \geq \frac{|\langle Tu, f_0 \rangle|}{\|f_0\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

e

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Resta mostrar que T é sobrejetora. Seja $X = T(L^q(\Omega))$. Como X é um subespaço fechado resta apenas mostrar que X é denso em $(L^p(\Omega))^*$.
Seja $Jh \in (L^p(\Omega))^{**}$ [$= L^p(\Omega)$ pois este é reflexivo] tal que

$$0 = \langle Jh, Tu \rangle = \langle Tu, h \rangle \quad \forall\ u \in L^q(\Omega) \text{ e}$$

mostremos que $h = 0$ ($\Rightarrow Jh = 0 \Rightarrow X$ é denso em $(L^p(\Omega))^*$). Note que

$$\langle Jh, Tu \rangle = \langle Tu, h \rangle = \int_\Omega u\, h = 0 \quad \forall\ u \in L^q(\Omega).$$

Concluímos que $h = 0$ escolhendo $u = |h|^{p-2}h$. $\square$

Vigésima-Sétima Aula (100 minutos) ↑

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Folland, G. B. - *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Willey & Sons, New York, (1999) [Livro Texto].

[2] Goffman, C.; Pedrick, G. - *First Course in Functional Analysis*, Chelsea Publishin Company, New York, 1983.

[3] Pfaffenberger, W.E. A converse to a completeness theorem, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, 216 (1980).

[4] Royden, H. L. - Real Analysis, Macmilan Publishing Company, New York, 1988.

[5] Simmons, G. F. - *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Tokyo 1963.