

Propostas de projetos de Mestrado

Supervisor: Prof. Dr. Eugenio Massa

Departamento de Matemática
ICMC — USP

Sumário

1	Lane-Emden-Henon problem in radial domains for Pucci operator	2
2	Operador p -Laplaciano, problemas de tipo Ambrosetti-Prodi e côncavo-convexos	2
3	Sistemas de equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N	4
4	Nabla-Theorems e aplicações	5
5	Novas caracterizações variacionais do espectro de Fučík	6
6	O Operador (p, q) -Laplaciano	7
7	Problemas não locais na dinâmica populacional	8
8	Desigualdade de Trudinger-Moser e problemas relacionados	9
9	Análise não-standard, Ultrafunções e aplicações a EDPs e Métodos variacionais	12
10	Algoritmo Mountain Pass para resolução de EDPs	13

1 Problema de Lane-Emden-Henon em domínios radiais para o operador de Pucci

Neste projeto de Mestrado pretendemos estudar em detalhe o trabalho [MNP21], no qual é estudado o problema da busca de soluções radiais positivas para o problema totalmente não linear

$$-\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^{\pm}(D^2u) = |x|^a u^p \quad \in \Omega$$

onde $0 < \lambda \leq \Lambda$, $a > -1$, $p > 1$, $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^{\pm}$ são os operadores extremais de Pucci e Ω um domínio radial simétrico em \mathbb{R}^N (bola ou seu complementar, anel, \mathbb{R}^N inteiro).

O trabalho proposto investiga o problema através da análise de um sistema dinâmico em duas variáveis obtido por uma oportuna transformação da formulação radial do problema original. Esta abordagem permite obter resultado que anteriormente apenas existiam para o caso com operador Laplaciano e $a = 0$.

Este projeto seria de grande importância para um aluno que pretenda iniciar-se na área de equações diferenciais não lineares, por envolver tanto técnicas clássicas da área, quanto outras mais recentes e por abordar tema atuais de pesquisa como a equação de Lane-Emden (ou Lane-Emden-Henon quando $a \neq 0$) e os operadores totalmente não lineares de Pucci.

Dependendo do andamento do projeto, poderemos também complementar o estudo analisando dois trabalhos mais recentes: [MN22; MNP23] que complementaram os resultados de [MNP21] e passaram a considerar o caso bem mais complexo de sistemas.

As técnicas e os problemas com que o aluno terá contato durante o desenvolvimento deste projeto poderão ser aproveitadas em um possível doutorado.

Referências

- [MN22] L. Maia e G. Nornberg. “Radial solutions for Hénon type fully nonlinear equations in annuli and exterior domains”. Em: *Math. Eng.* 4.6 (2022), Paper No. 055, 18.
- [MNP21] L. Maia, G. Nornberg e F. Pacella. “A dynamical system approach to a class of radial weighted fully nonlinear equations”. Em: *Comm. Partial Differential Equations* 46.4 (2021), pp. 573–610.
- [MNP23] L. Maia, G. Nornberg e F. Pacella. “Existence, nonexistence and uniqueness for Lane-Emden type fully nonlinear systems”. Em: *Nonlinearity* 36.3 (2023), pp. 1510–1546.

2 Operador p -Laplaciano, problemas de tipo Ambrosetti-Prodi e côncavo-convexos

Neste projeto de Mestrado pretendemos estudar em detalhe o trabalho [AR06]. Este trabalho estendeu ao operador p -Laplaciano o famoso resultado "de tipo Ambrosetti Prodi", em que

uma situação de nenhuma, uma, ou duas soluções é encontrada para um problema não linear, em dependência da componente do termo de fonte na direção da primeira autofunção.

O problema clássico de tipo Ambrosetti-Prodi é estudado desde o trabalho [AP72] em diferentes contextos, mencionamos entre eles [de 84; dY99; Mas07].

A extensão ao p -Laplaciano é absolutamente não trivial, e requereu o uso e o desenvolvimento de diferentes técnicas, o que faz com que este trabalho seja frequentemente usado e citado em literatura e o seu estudo seja incrivelmente educativo para um aluno cujo objetivo seja inciar-se a esta área e nela, futuramente, desenvolver pesquisa.

Outro trabalho fundamental no que diz respeito às técnicas indispensáveis para trabalhar com o operador p -Laplaciano é [dGU09], onde o objetivo é obter para este operador resultados envolvendo não linearidades de tipo "côncavo-convexo", com as condições impostas apenas localmente. Este trabalho poderia ser abordado no final do mestrado, como complemento ao trabalho anterior.

As técnicas que o aluno aprender durante o desenvolvimento deste projeto poderão ser aproveitadas em um possível doutorado.

Referências

- [AP72] A. Ambrosetti e G. Prodi. "On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces". Em: *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 93 (1972), pp. 231–246.
- [AR06] D. Arcoya e D. Ruiz. "The Ambrosetti-Prodi problem for the p -Laplacian operator". Em: *Comm. Partial Differential Equations* 31.4-6 (2006), pp. 849–865.
- [de 84] D. G. de Figueiredo. "On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem". Em: *Nonlinear Anal.* 8.6 (1984), pp. 655–665.
- [dGU09] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez e P. Ubilla. "Local 'superlinearity' and 'sublinearity' for the p -Laplacian". Em: *J. Funct. Anal.* 257.3 (2009), pp. 721–752.
- [dY99] D. G. de Figueiredo e J. Yang. "Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems". Em: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 14.1 (1999), pp. 59–80.
- [Mas07] E. Massa. "Multiplicity results for a superlinear elliptic system with partial interference with the spectrum". Em: *Nonlinear Anal.* 67.1 (2007), pp. 295–306.
-

3 Sistemas de equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N

Neste projeto pretendemos introduzir o aluno ao estudo de sistemas de equações de Schrödinger em \mathbb{R}^N , que modelam a propagação de ondas em meios não lineares.

Pretendemos iniciar o estudo através do trabalho [MMP06], no qual os autores consideram o sistema em \mathbb{R}^N

$$(S) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{2q-2}u + b|v|^q|u|^{q-2}u \\ -\Delta v + \omega^2 v = |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v \end{cases}$$

e encontram soluções de energia mínima, inclusive garantindo, em oportunas situações, que as soluções sejam realmente vetoriais (isto é, com ambas as componentes u, v não triviais).

O trabalho usa técnicas importantes na área de Equações Diferenciais Elípticas como o uso da variedade de Nehari, o Teorema do Passo de Montanha e o Princípio variacional de Ekeland. Por este motivo seu estudo torna-se de grande importância para um aluno que queira, futuramente, desenvolver pesquisa nesta área.

Além disso, este trabalho foi o inicial de uma série de artigos envolvendo sistemas como (S), como pode ser verificado pelas muitas citações que recebeu, tornando-o um conhecimento indispensável para poder estudar os resultados mais atuais e contribuir com novos resultados.

Um possível complemento deste estudo seria o trabalho [MMP08], no qual é considerado o caso de soluções nodais.

Referências

- [MMP06] L. A. Maia, E. Montefusco e B. Pellacci. “Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system”. Em: *J. Differential Equations* 229.2 (2006), pp. 743–767.
- [MMP08] L. A. Maia, E. Montefusco e B. Pellacci. “Infinitely many nodal solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system”. Em: *Commun. Contemp. Math.* 10.5 (2008), pp. 651–669.
-

4 Nabla-Theorems e aplicações

Neste projeto nos propomos de estudar certos "Teoremas variacionais de tipo mixto" (ou "nabla-theorems"), assim chamados por envolverem condições não apenas sobre os valores do funcional envolvido, mas também do seu gradiente.

Pretendemos estudar o enunciado e a prova destes resultados abstratos, seguindo principalmente o trabalho [MS97]. Em seguida, estudaremos algumas aplicações: no próprio [MS97] estes resultados são aplicados a um problema da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde f é assintoticamente linear a $+\infty$ e a $-\infty$.

Outra aplicação interessante é feita em [Mug04], num problema superlinear a $+\infty$.

Destacamos que a técnicas citadas parecem promissoras também para obter mais soluções em problemas de quase-ressonância, como os tratados em [PM08; MR14], levando a uma possível aplicação em problemas abertos, que poderá ser feita no final do mestrado ou num eventual doutorado.

Referências

- [MR14] E. Massa e R. A. Rossato. "Multiple solutions for an elliptic system near resonance". Em: *J. Math. Anal. Appl.* 420.2 (2014), pp. 1228–1250.
- [MS97] A. Marino e C. Saccon. "Some variational theorems of mixed type and elliptic problems with jumping nonlinearities". Em: *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 25.3-4 (1997). Dedicated to Ennio De Giorgi, 631–665 (1998).
- [Mug04] D. Mugnai. "Multiplicity of critical points in presence of a linking: application to a superlinear boundary value problem". Em: *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 11.3 (2004), pp. 379–391.
- [PM08] F. O. de Paiva e E. Massa. "Semilinear elliptic problems near resonance with a non-principal eigenvalue". Em: *J. Math. Anal. Appl.* 342.1 (2008), pp. 638–650.
-

5 Novas caracterizações variacionais do espectro de Fučík

Neste projeto pretendemos estudar os recentes resultados sobre caracterização variacional do chamado Espectro de Fučík obtidos em [MP14; MP15a; MP15b]. Estes resultados, de fato, forneceram novas e talvez inesperadas informações sobre o aspecto do espectro de Fučík.

O orientador deste projeto tem vários trabalhos sobre o espectro de Fučík: veja [Mas04b; Mas04a; MR06; MR07; MR09]. Esperamos que com as novas técnicas aprendidas, será possível, num eventual doutorado, prosseguir nesta linha de pesquisa e responder às muitas perguntas ainda abertas sobre este importante espectro não linear.

No projeto precisará inicialmente aprender os conhecimentos de base sobre espectro de Fučík, por exemplo através da dissertação [Ros10], para em seguida iniciar o estudo das novas caracterizações.

Referências

- [Mas04a] E. Massa. “On a variational characterization of a part of the Fučík spectrum and a superlinear equation for the Neumann p -Laplacian in dimension one”. Em: *Adv. Differential Equations* 9.5-6 (2004), pp. 699–720.
- [Mas04b] E. Massa. “On a variational characterization of the Fučík spectrum of the Laplacian and a superlinear Sturm-Liouville equation”. Em: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 134.3 (2004), pp. 557–577.
- [MP14] R. Molle e D. Passaseo. “On the first curve of the Fučík spectrum for elliptic operators”. Em: *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* 25.2 (2014), pp. 141–146.
- [MP15a] R. Molle e D. Passaseo. “Infinitely many new curves of the Fučík spectrum”. Em: *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 32.6 (2015), pp. 1145–1171.
- [MP15b] R. Molle e D. Passaseo. “Variational properties of the first curve of the Fučík spectrum for elliptic operators”. Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 54.4 (2015), pp. 3735–3752.
- [MR06] E. Massa e B. Ruf. “On the Fučík spectrum for elliptic systems”. Em: *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 27.2 (2006), pp. 195–228.
- [MR07] E. Massa e B. Ruf. “A global characterization of the Fučík spectrum for a system of ordinary differential equations”. Em: *J. Differential Equations* 234.1 (2007), pp. 311–336.
- [MR09] E. Massa e B. Ruf. “On the Fučík spectrum of the Laplacian on a torus”. Em: *J. Funct. Anal.* 256.5 (2009), pp. 1432–1452.
- [Ros10] R. A. Rossato. “Espectro de Fučík e equações elípticas com não linearidade de salto”. Diss. de mest. ICMC - USP, Brazil, 2010, <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-19052010-133927/pt-br.php>.

6 O Operador (p, q) -Laplaciano

O objetivo deste projeto é estudar alguns trabalhos que introduzam o aluno às propriedades do operador chamado (p, q) -Laplaciano, aprendendo as principais técnicas usadas no seu estudo.

Entre os trabalhos recentes que envolvem este operador, mencionamos [YY11], onde é considerado o problema de estender resultados com não linearidades de tipo côncavo-convexo, e os trabalhos [Tan14; BT15; BT18], que se ocupam de problemas aos autovalores e busca de soluções positivas ou nodais com diferentes não linearidades.

No projeto nos propomos de estudar alguns destes trabalhos, com o objetivo que, no final, o aluno estará em condição de desenvolver, num eventual doutorado, pesquisa original nesta área.

Referências

- [BT15] V. Bobkov e M. Tanaka. “On positive solutions for (p, q) -Laplace equations with two parameters”. Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 54.3 (2015), pp. 3277–3301.
- [BT18] V. Bobkov e M. Tanaka. “On sign-changing solutions for resonant (p, q) -Laplace equations”. Em: *Differ. Equ. Appl.* 10.2 (2018), pp. 197–208.
- [Tan14] M. Tanaka. “Generalized eigenvalue problems for (p, q) -Laplacian with indefinite weight”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 419.2 (2014), pp. 1181–1192.
- [YY11] H. Yin e Z. Yang. “A class of p - q -Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 382.2 (2011), pp. 843–855.
-

7 Problemas não locais na dinâmica populacional

Problemas da forma

$$(P) \quad \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} u^q \right) \Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde M é uma função real, f alguma não linearidade, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, são caracterizados pelo termo $M \left(\int_{\Omega} u^q \right)$, dito não local, por depender não apenas do ponto no qual a equação é avaliada, mas também da norma da solução. Diferente dos conhecidos problemas de tipo Kirchhoff, onde o termo não local depende da norma de Sobolev da solução e que podem ser tratados variacionalmente, aqui a norma depende da norma de Lebesgue, o que impede o tratamento variacional direto. Isso obriga a usar técnicas diferentes, como a de sub e supersoluções (veja [AC15]) ou técnicas de tipo topológico como teoria do grau, teoremas de ponto fixo ou de bifurcação.

O Problema (P) aparece frequentemente em modelos de difusão de populações biológicas (veja por exemplo um modelo de crescimento bacteriano em [CR92]), onde a velocidade de dispersão dos indivíduos depende da população total, representada pela integral $\int_{\Omega} u^q$.

Neste projeto pretendemos estudar alguns trabalhos relacionados a este problema, como por exemplo [FSRMS18; GSJ19; FSMRS20]), com o objetivo que, no final, o aluno estará em condição de desenvolver, num eventual doutorado, pesquisa original nesta área.

Referências

- [AC15] C. O. Alves e D.-P. Covei. “Existence of solution for a class of nonlocal elliptic problem via sub-supersolution method”. Em: *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 23 (2015), pp. 1–8.
- [CR92] M. Chipot e J.-F. Rodrigues. “On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems”. Em: *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 26.3 (1992), pp. 447–467.
- [FSMRS20] T. S. Figueiredo-Sousa, C. Morales-Rodrigo e A. Suárez. “Some superlinear problems with nonlocal diffusion coefficient”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 482.1 (2020), pp. 123519, 25.
- [FSRMS18] T. S. Figueiredo-Sousa, C. Rodrigo-Morales e A. Suárez. “The influence of a metasolution on the behaviour of the logistic equation with nonlocal diffusion coefficient”. Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57.4 (2018), Art. 100, 26.
- [GSJ19] L. Gasiński e J. R. Santos Júnior. “Multiplicity of positive solutions for an equation with degenerate nonlocal diffusion”. Em: *Comput. Math. Appl.* 78.1 (2019), pp. 136–143.
-

8 Desigualdade de Trudinger-Moser e problemas relacionados

8.1 Apresentação do problema

Dado um conjunto Ω em \mathbb{R}^n limitado e suave, seja $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}$. Para $p < n$ as clássicas imersões de Sobolev garantem a inclusão contínua

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (8.1)$$

quando $1 \leq q \leq p^* := \frac{np}{n-p}$.

O expoente p^* é também chamado expoente crítico para dita imersão. A chamada desigualdade de Moser-Trudinger considera o caso limite $p = n$: neste caso

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo $q \in [1, \infty)$ mas não vale a imersão em L^∞ , por exemplo, no caso $n = 2$, a função $f(x) = \log(1 - \log|x|)$ na bola unitária B centrada na origem está em $W_0^{1,p}(B)$ mas claramente não é limitada.

Por consequência torna-se interessante procurar o crescimento maximal que uma função g pode ter para que se cumpra

$$\int_\Omega g(u) dx < \infty, \quad \forall u \in W_0^{1,n}(\Omega).$$

O resultado a seguir é conhecido como desigualdade de Moser-Trudinger (veja [Mos70; Tru67]):

Theorem 8.1. *Seja $|\Omega| < \infty$, então*

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|u\|_n \leq 1} \int_\Omega \exp(\alpha |u|^{n/(n-1)}) dx < \infty, \quad \text{se e só se } \alpha \leq \alpha_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)} \quad (8.2)$$

onde ω_{n-1} é a medida $(n-1)$ -dimensional da esfera unitária em \mathbb{R}^n e $|\Omega|$ a medida n -dimensional de Ω .

No caso da imersão (8.1), ela é também compacta se $q < p^*$, mas apenas contínua para $q = p^*$, de fato é conhecido que não existem funções extremais para o supremo

$$\sup_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p \leq 1} \int_\Omega u^{p^*} dx,$$

em particular, as seqüências maximizantes, apesar de limitadas, não possuem subsequência convergente em L^{p^*} .

Sobre a existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser, foi mostrado por Carleson e Chang, no importantíssimo trabalho [CC86], que existe pelo menos uma função radial que alcança o supremo, quando o domínio é uma bola.

A prova é feita indiretamente mostrando antes que uma sequência maximizante que não seja convergente deve necessariamente concentrar na origem, estimando depois o valor da integral ao longo destas sequências concentrantes, e mostrando enfim que existem funções pelas quais a integral está acima deste nível.

Estes resultados são de altíssima importância para o estudo de equações elípticas envolvendo o n -Laplaciano em dimensão n , como por exemplo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (8.3)$$

pois permitem saber quando o funcional associado está bem definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e quando possui a compacidade necessária para aplicar os métodos variacionais clássicos, além de fornecer instrumentos para abordar os problemas onde tal compacidade vem a faltar.

Neste projeto de Mestrado pretendemos inicialmente estudar os trabalhos fundamentais citados acima, para introduzir o aluno aos problemas conexos com a desigualdade de Trudinger-Moser. Apesar de serem trabalhos já datados, seu conhecimento é imprescindível para um pesquisador que queira trabalhar com problemas deste tipo.

No final do projeto gostaríamos de abordar um trabalho mais recente, para ter uma ideia da pesquisa atual sobre o tema. Uma possibilidade poderia ser o trabalho [CRS17], no qual é considerado o caso radial na bola unitária com um peso logarítmico na forma $|\ln|x||^\beta$ na definição da norma do espaço. Problemas com este peso foram estudados inicialmente em [CR15a; CR15b], mas ainda são pesquisados, veja por exemplo [CMR18; Roy19; Ngu19]

8.2 Objetivos e motivações do projeto

O assunto considerado se encaixa numa área da análise não linear bastante importante e ativa, e envolve diferentes técnicas entre as mais usadas no estudo de equações diferenciais.

Por este motivo, acreditamos que um estudo dos trabalhos citados constitua um caminho formativo interessante e completo para o candidato, que necessitará inicialmente aprender as principais técnicas envolvidas, e terá em seguida a oportunidade de vê-las aplicadas em trabalhos de pesquisa de nível internacional, tendo assim a oportunidade de chegar a um nível de conhecimento do assunto que constituiria uma ótima base para um eventual projeto de doutorado na área de equações elípticas. De fato, ainda existem muitos problemas abertos nesta área: assim sendo, o candidato terá a possibilidade de também propor uma sua contribuição ao tema, ou pelo menos pôr as bases para um futuro projeto de doutorado.

Referências

- [CC86] L. Carleson e A. Chang. “On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser”. Em: *Bull. Sci. Math. (2)* 110.2 (1986), pp. 113–127.
- [CMR18] M. Calanchi, E. Massa e B. Ruf. “Weighted Trudinger-Moser inequalities and associated Liouville type equations”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 146.12 (2018), pp. 5243–5256.

- [CR15a] M. Calanchi e B. Ruf. “On Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights”. Em: *J. Differential Equations* 258.6 (2015), pp. 1967–1989.
- [CR15b] M. Calanchi e B. Ruf. “Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension N ”. Em: *Nonlinear Anal.* 121 (2015), pp. 403–411.
- [CRS17] M. Calanchi, B. Ruf e F. Sani. “Elliptic equations in dimension 2 with double exponential nonlinearities”. Em: *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 24.3 (2017), Art. 29, 18.
- [Mos70] J. Moser. “A sharp form of an inequality by N. Trudinger”. Em: *Indiana Univ. Math. J.* 20 (1970/71), pp. 1077–1092.
- [Ngu19] V. H. Nguyen. “Remarks on the Moser-Trudinger type inequality with logarithmic weights in dimension N ”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 147.12 (2019), pp. 5183–5193.
- [Roy19] P. Roy. “On attainability of Moser-Trudinger inequality with logarithmic weights in higher dimensions”. Em: *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 39.9 (2019), pp. 5207–5222.
- [Tru67] N. S. Trudinger. “On imbeddings into Orlicz spaces and some applications”. Em: *J. Math. Mech.* 17 (1967), pp. 473–483.
-

9 Análise não-standard, Ultrafunções e aplicações a EDPs e Métodos variacionais

Sabemos que se $x < y$ são reais positivos, então existe um natural n tal que $nx > y$. Esta é a propriedade de Arquimedes.

É possível estender o corpo dos reais obtendo outro corpo ordenado (não mais completo) no qual existem elementos infinitos e infinitésimos. Aqui a propriedade de Arquimedes não vale, por isso é dito corpo não arquimediano. Isto é, vale que se $x > 0$ é infinitésimo então $nx < 1$ para todo natural n !

Esta é a base da análise não-standard, da qual pretendemos estudar os fundamentos para chegar a algumas aplicações a EDPs e métodos variacionais, que oferecem uma noção de solução generalizada diferente, por exemplo, da de solução fraca ou de solução distribucional.

A proposta deste projeto é estudar alguns trabalhos introdutivos do prof. V. Benci, começando pelo livro [BL14b] (veja também [BB14; Ben13]) e em seguida desenvolver alguma aplicação, como as em [BL14a; BL17; BLS20].

Esperamos que no final deste caminho estaremos em condição de aplicar estas técnicas em algum problema novo.

Referências

- [BB14] V. Benci e L. L. Baglini. “Ultrafunctions and applications”. English. Em: *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S* 7.4 (2014), pp. 593–616.
 - [Ben13] V. Benci. “Ultrafunctions and generalized solutions”. English. Em: *Adv. Nonlinear Stud.* 13.2 (2013), pp. 461–486.
 - [BL14a] V. Benci e L. Luperi. “A model problem for ultrafunctions”. English. Em: *Electron. J. Differ. Equ.* 2014 (2014), pp. 11–21.
 - [BL14b] V. Benci e L. Luperi Baglini. “Basic properties of ultrafunctions”. English. Em: *Analysis and topology in nonlinear differential equations. A tribute to Bernhard Ruf on the occasion of his 60th birthday. Selected papers based on the presentations at the IX workshop on nonlinear differential equations, João Pessoa, Brazil, September 2012*. Cham: Birkhäuser/Springer, 2014, pp. 61–86.
 - [BL17] V. Benci e L. Luperi Baglini. “Generalized solutions in PDEs and the Burgers’ equation”. English. Em: *J. Differ. Equations* 263.10 (2017), pp. 6916–6952.
 - [BLS20] V. Benci, L. Luperi Baglini e M. Squassina. “Generalized solutions of variational problems and applications”. English. Em: *Adv. Nonlinear Anal.* 9 (2020), pp. 124–147.
-

10 Algoritmo Mountain Pass para resolução de EDPs

No artigo [CM93], os autores propõe um algoritmo para encontrar soluções de tipo Mountain-Pass para problemas elípticos semilineares (veja também [CM96; YY11]).

O algoritmo envolve uma parte baseada em técnicas de otimização e uma parte dedicada à resolução de EDPs através de um método a elementos finitos.

Neste projeto propomos de, primeiramente, estudar a teoria básica dos métodos variacionais, aprendendo em particular o fundamental Teorema do Passo da montanha, através por exemplo do livro [Rab71].

Em seguida precisaremos estudar os fundamentos necessários para implementar uma versão do algoritmo e testá-la em um problema modelo.

Esperamos obter uma ferramenta útil tanto para produzir exemplos e visualizações de soluções de problemas elípticos, quanto para ajudar em pesquisas mais teóricas.

Além disso, esperamos que os conhecimentos adquiridos neste projeto possam ser aplicados, num eventual doutorado, em uma pesquisa original e mais avançada.

Referências

- [CM93] Y. S. Choi e P. J. McKenna. “A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems”. Em: *Nonlinear Anal.* 20.4 (1993), pp. 417–437.
- [CM96] Y. S. Choi e P. J. McKenna. “Numerical mountain pass methods for nonlinear boundary value problems”. Em: *Nonlinear problems in applied mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1996, pp. 86–95.
- [Rab71] P. H. Rabinowitz. “Some global results for nonlinear eigenvalue problems”. Em: *J. Functional Analysis* 7 (1971), pp. 487–513.
- [YY11] H. Yin e Z. Yang. “A class of p - q -Laplacian type equation with concave-convex nonlinearities in bounded domain”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 382.2 (2011), pp. 843–855.
-