ICMC - USP

Uma Introdução às Equações da Aerodinâmica

Iniciação Científica - Fapesp - processo nº 2010/12870-1

Guilherme Salvador Vieira
Bolsista

Eugenio Tommaso Massa
Orientador

São Carlos
Dezembro - 2012

Sumário

0.1 Introduções 4
0.1.1 1 4
0.1.2 2 4
0.1.3 3 4
0.1.4 4 4

1 Relatório 1 **6**
1.1 Fenômenos ondulatórios 6
1.2 Ondas modeladas por Equações de Primeira Ordem 7
1.2.1 Caso linear 7
1.2.2 Caso não linear 9
1.2.3 Formulação integral dos problemas de conservação 11
1.2.4 Soluções generalizadas e Choque 12
1.2.5 Exemplos de aplicações a problemas físicos 15
1.2.6 Estrutura de Choque: equação de segunda ordem 17
1.3 Gasdinâmica 19
1.3.1 Equações de Movimento 19
1.3.2 Equações de Euler e de Navier-Stokes 22

2 Relatório 2 **24**
2.1 Gasdinâmica 24
2.1.1 Formas alternativas para as Equações de Euler 24
2.1.2 Acústica 27
2.1.3 Ondas não-lineares em dimensão um 30
2.1.4 Ondas simples produzidas pelo movimento de um pistão 33

3 Relatório 3 **36**
3.1 Gasdinâmica 36
3.1.1 Ondas de choque 36
3.1.2 Reescrevendo as condições de choque 38
3.1.3 Resolvendo o sistema do choque 40

3.1.4 Choques fracos 44
3.1.5 Pistão com choque fraco 45

4 Relatório 4 **51**
4.1 Métodos numéricos para problemas lineares 51
4.1.1 Métodos de diferenças finitas 51
4.1.2 Erro global e convergência 56
4.1.3 Erro de truncamento local e consistência 57
4.1.4 Estabilidade (de métodos lineares) 58
4.1.5 Teorema de Equivalência de Lax 60
4.1.6 Condição CFL 62
4.1.7 O caso de sistemas 63
4.2 Comportamento em descontinuidades e equações modificadas 65
4.2.1 Equações modificadas 65
4.3 Métodos conservativos para problemas não lineares 69
4.3.1 Métodos conservativos 71
4.3.2 Consistência de métodos conservativos 72
4.3.3 Verificando a conservação 73
4.3.4 Teorema de Lax-Wendroff 74
4.3.5 A condição de entropia 76
4.4 O Método de Godunov 80
4.4.1 Descrição do método 81
4.4.2 Condição de entropia discreta 84
4.4.3 Alguns resultados da aplicação do método 85

0.1 Introduções

0.1.1 1

Neste relatório de progresso, descrevemos os assuntos estudados no primeiro semestre deste projeto de iniciação científica. Na seção 1.2, consideraremos problemas de conservação em uma dimensão espacial e estudaremos ondas modeladas por equações de primeira ordem. Consideraremos inicialmente as soluções regulares e, em seguida, introduziremos a noção de solução generalizada e estudaremos o fenômeno de formação e propagação de choques. Na seção 1.3, deduziremos as equações da gasdinâmica até chegar ao sistema de Euler.

Esta parte do nosso trabalho foi feita seguindo a referência [1].

0.1.2 2

Neste relatório final do primeiro ano deste projeto de iniciação científica, descrevemos os assuntos estudados nos primeiros quatro meses do segundo semestre de trabalho. Na seção 2.1.1 continuaremos a trabalhar com as Equações de Euler, obtendo algumas formulações alternativas que ajudam a melhor compreendê-las; na seção 2.1.2 obteremos as equações da acústica, isto é, uma versão linearizada das equações de Euler. Enfim, nas seções 2.1.3 e 2.1.4, analisaremos em detalhe o caso não linear em dimensão um e apresentaremos uma aplicação.

Esta parte do nosso trabalho foi feita seguindo a referência [1].

0.1.3 3

Neste relatório de progresso, descrevemos os assuntos estudados no terceiro semestre de trabalho. Na seção 3.1.1, deduziremos as equações que regem os saltos nas variáveis de estado do gás quando ele é atravessado por uma onda de choque.

Na seção 3.1.2, procuraremos reescrever as condições de choque obtidas na seção anterior numa forma que facilite a compreensão das informações que cada uma das equações do choque carrega. Na seção 3.1.3, resolveremos efetivamente o sistema, relacionando as variáveis de estado imediatamente antes e imediatamente após o choque; aproveitaremos os resultados para apresentar algumas propriedades características dos choques.

Na seção 3.1.4, introduziremos algumas hipóteses simplificadoras razoáveis para problemas envolvendo choques fracos; e finalmente, na seção 3.1.5, aplicaremos a teoria desenvolvida na resolução do problema do pistão com choque.

0.1.4 4

Neste relatório final, descrevemos os assuntos estudados no quarto semestre de trabalho. Na seção 4.1, introduzimos alguns métodos numéricos utilizados na solução aproximada da equação da advecção (problema linear), e, junto a eles, conceitos e teoremas importantes para o entendimento das propriedades de convergência desses métodos.

Na seção 4.2, estudamos o comportamento das soluções aproximadas obtidas pelos métodos introduzidos quando aplicados à equação linear com condição inicial descontínua. Observamos e justificamos, particularmente, as características difusivas ou dispersivas dos diferentes métodos nas proximidades da descontinuidade.

Na seção 4.3, avançamos para o estudo do problema não linear, apresentando condições sobre os métodos para convergência a uma solução generalizada do problema. Estudamos então adaptações dos métodos vistos, para resolver o novo problema. No final da seção, introduzimos o importante conceito da condição de entropia, necessária para garantir que o método convirja para a solução "física" (única) do problema.

A seção 4.4 é dedicada especialmente à descrição de um método para o problema não linear: o método de Godunov. Explicamos o método e depois demonstramos que a aproximação por ele obtida satisfaz naturalmente a condição de entropia, convergindo portanto à solução de interesse. Finalmente, terminamos apresentando alguns resultados numéricos, obtidos aplicando esse método a um problema modelo.

Capítulo 1

Relatório 1

1.1 Fenômenos ondulatórios

Podemos distinguir duas principais classes de equações que modelam fenômenos ondulatórios. A primeira pode ser formulada matematicamente em termos de equações diferenciais parciais hiperbólicas, motivo pelo qual nos referiremos às dessa classe como ondas *hiperbólicas*. A segunda classe é a das ondas *dispersivas*.

O protótipo para ondas hiperbólicas, que serão nosso foco nesse início de discussão, é a clássica equação da onda linear

$$\varphi_{tt} = c_0^2 \Delta \varphi, \tag{1.1.1}$$

onde $\varphi(x_1, ..., x_n, t)$ é uma função escalar, $c_0 \neq 0$ é uma constante fixada que veremos representar a velocidade de propagação da onda, e Δ é o operador Laplaciano (que consideramos agindo apenas sobre as variáveis espaciais $x_1, ..., x_n$).

No caso unidimensional $\varphi = \varphi(x, t)$, a equação torna-se

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0, \tag{1.1.2}$$

uma vez que $\Delta\varphi = \varphi_{xx}$.

Esta equação pode ser reescrita em termos de novas variáveis

$$\alpha(x,t) = x - c_0 t, \qquad \beta(x,t) = x + c_0 t,$$

introduzindo uma função $\psi(\alpha, \beta)$ tal que $\psi(\alpha(x,t), \beta(x,t)) = \varphi(x,t)$. Assim, temos

$$\varphi_t = \psi_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \psi_\beta \frac{\partial \beta}{\partial t} = -c_0 \psi_\alpha + c_0 \psi_\beta,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= -c_0 \left(\psi_{\alpha\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \psi_{\alpha\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) + c_0 \left(\psi_{\beta\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \psi_{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \\ &= c_0^2 (\psi_{\alpha\alpha} - 2\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

e ainda

$$\varphi_x = \psi_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi_\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} = \psi_\alpha + \psi_\beta,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \left(\psi_{\alpha\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \psi_{\alpha\beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \left(\psi_{\beta\beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \psi_{\alpha\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) \\ &= \psi_{\alpha\alpha} + 2\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

de forma que

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = (-4c_0^2)\psi_{\alpha\beta} = 0.$$

Como $c_0 \neq 0$, concluímos que

$$\psi_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.1.3}$$

Logo, a solução geral será a soma de uma função que depende apenas de α e outra que depende apenas de β:

$$\varphi(x,t) = \psi(\alpha,\beta) = f(\alpha) + g(\beta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \tag{1.1.4}$$

para f e g funções duas vezes deriváveis arbitrárias.

A solução é, portanto, a sobreposição de duas ondas: uma, descrita pela função f, que se move para a direita com velocidade c_0, e outra, descrita pela função g, movendo-se para a esquerda com velocidade c_0. Uma solução ainda mais simples aconteceria caso houvesse uma única onda. Este caso pode ser visto fatorando (1.1.2) em

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0 \tag{1.1.5}$$

e retendo apenas um dos fatores. Isso nos leva à equação de primeira ordem linear

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0, \tag{1.1.6}$$

que representa o mais simples problema que envolve ondas hiperbólicas, e cuja solução geral é dada por

$$\varphi = f(x - c_0 t). \tag{1.1.7}$$

Exemplos de fenômenos que podem ser modelados por uma equação de primeira ordem parecida com (1.1.6) são ondas de enchente em rios, ondas de tráfego e certos fenômenos em reações químicas, que serão apresentados na próxima seção.

1.2 Ondas modeladas por Equações de Primeira Ordem

1.2.1 Caso linear

Começamos a discussão detalhada de ondas hiperbólicas pelo estudo de equações diferenciais de primeira ordem.

Partimos do mais simples modelo de fenômeno ondulatório, que, conforme visto na seção anterior, é

$$\rho_t + c_0\rho_x = 0, \qquad c_0 = \text{constante}. \tag{1.2.1}$$

A função incógnita $\rho(x,t)$ é, em muitas aplicações, a densidade do meio, motivo pelo qual utilizamos o símbolo ρ.

Uma solução (em sentido clássico) de (1.2.1) será uma função $\rho(x,t)$ que seja derivável e satisfaça a equação em todo ponto. É fácil verificar que a solução geral de (1.2.1) é $\rho(x,t) = f(x - c_0t)$, sendo f uma função arbitrária derivável. Se a condição inicial $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ é conhecida, a solução é, portanto, $\rho(x,t) = \rho_0(x - c_0t)$.

Nessa solução, dependente apenas de $(x - c_0t)$, o estado inicial $\rho_0(x)$ é transladado de uma distância c_0t para a direita no tempo t, sem ter seu perfil alterado. A constante c_0, portanto, representa a velocidade de propagação dessa onda.

Um caso um pouco mais geral, mas ainda linear, ocorre quando a velocidade depende das variáveis x e t, isto é

$$\rho_t + c(x,t)\rho_x = 0. \tag{1.2.2}$$

Para resolver tal equação, dada uma condição inicial $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, podemos proceder da seguinte forma: seja $\gamma(t) = (x(t),t)$ uma curva no plano (x,t); a derivada temporal de $\rho(\gamma(t))$ é, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\rho(\gamma(t)) = \rho_t(\gamma(t)) + \frac{dx}{dt}(t)\rho_x(\gamma(t)). \tag{1.2.3}$$

Portanto, se a função $x(t)$ satisfizer a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = c(x,t), \tag{1.2.4}$$

obtemos, juntando (1.2.3) e (1.2.2), que em cada um dos pontos da curva vale

$$\frac{d}{dt}\rho(\gamma(t)) = 0,$$

isto é, ρ é constante ao longo de γ.

Dada a função $c(x,t)$, podemos então resolver (1.2.4) com condições iniciais $x(0) = x_0$, obtendo, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, uma curva $\gamma_{x_0}(t)$. O teorema de existência, unicidade e dependência contínua dos dados para equações diferenciais ordinárias nos garante que se $c(x,t)$ for suficientemente regular (por exemplo, limitada com derivadas contínuas), estas curvas preenchem o plano sem entrecruzar-se. Elas são chamadas **curvas características** da equação (1.2.2).

Finalmente, como ρ é constante ao longo de γ_{x_0}, obtemos que

$$\rho(\gamma_{x_0}(t),t) = \rho(\gamma_{x_0}(0),0) = \rho_0(x_0).$$

Observe que agora o perfil inicial $\rho_0(x)$ não é apenas transladado, mas também deformado devido à velocidade de propagação $c(x,t)$ ser diferente em cada ponto.

1.2.2 Caso não linear

Consideremos agora um caso não linear da equação discutida:

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \tag{1.2.5}$$

no qual a velocidade de propagação $c(\rho)$ é função da própria incógnita $\rho(x,t)$.

Como fizemos no caso linear (1.2.2), precisamos de uma **curva característica** $\mathcal{C}(t) = (x(t),t)$ de coeficiente angular

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho(x(t),t)) \tag{1.2.6}$$

em cada um de seus pontos.

A princípio, tal curva não pode ser determinada diretamente, uma vez que a equação (1.2.6) envolve valores desconhecidos de ρ ao longo da curva. Por isso, determinaremos a curva característica $\mathcal{C}$ e a solução ρ ao longo dela conjuntamente.

Como anteriormente, deduzimos, a partir de (1.2.5) e (1.2.6), que

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathcal{C}(t)) = 0. \tag{1.2.7}$$

Logo, ρ é constante ao longo de cada curva característica. Segue que $c(\rho)$ é, também, constante ao longo de $\mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{C}$ deve ser uma reta de coeficiente angular $c(\rho)$ no plano (x,t).

Concluímos que a solução de (1.2.5) com condição inicial $\rho(x,0) = f(x)$ será uma função que assume o valor constante $f(\xi)$ ao longo da reta que intercepta o eixo x em $x = \xi$, isto é, a reta característica de equação

$$x = \xi + c(f(\xi))t. \tag{1.2.8}$$

Denotaremos, por simplicidade, $F(\xi) = c(f(\xi))$. Dessa forma, ρ é dada por

$$\rho(x,t) = f(\xi(x,t))\,, \tag{1.2.9}$$

sendo $\xi(x,t)$ definida implicitamente por (1.2.8).

Agora precisamos checar quando essas expressões realmente nos dão a solução. Por (1.2.9),

$$\rho_t = f'(\xi)\xi_t, \qquad \rho_x = f'(\xi)\xi_x$$

e, tomando as derivadas em t e x da (1.2.8), que define $\xi(x,t)$, obtemos

$$0 = F(\xi) + (1 + F'(\xi)t)\xi_t,$$

$$1 = (1 + F'(\xi)t)\xi_x.$$

Logo

$$\rho_t = -\frac{F(\xi)f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \qquad \rho_x = \frac{f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \tag{1.2.10}$$

que de fato satisfazem

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$$

(uma vez que $c(\rho) = F(\xi)$), desde que $1 + F'(\xi)t \neq 0$.

Esta condição significa que se $M = \max\{-F'(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}\} > 0$, temos uma solução para valores pequenos de $t > 0$, mas a solução deixará de existir para $t \geq 1/M$. Se $M \leq 0$, isto é, $F'(\xi) \geq 0$ sempre, teremos uma solução para todo $t > 0$.

O que acontece no instante $t = 1/M$ é que algumas das retas características em (1.2.8) chegam a cruzar-se e a construção feita deixa de produzir uma função ρ regular.

O referido cruzamento das retas pode ser observado na Figura 1.1, na qual nosso $M = -F'(\xi_B)$, e o instante correspondente é $t_B = -1/F'(\xi_B)$

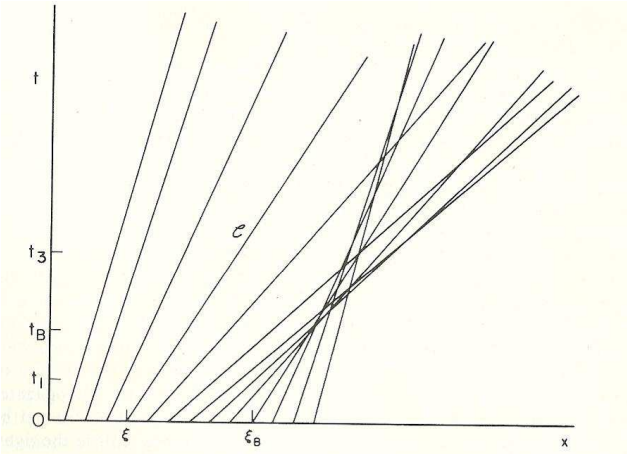

Figura 1.1: Cruzamento de retas características

Podemos também interpretar este comportamento da seguinte maneira alternativa: no caso linear, c não é função de ρ, de forma que o perfil é apenas transladado e deformado, mas ao longo de curvas preestabelecidas que não dependem da solução e não podem se cruzar. Ao contrário, para (1.2.5), os diferentes valores de ρ se "propagam"com velocidade $c(\rho)$. Assim, a solução a um tempo t qualquer pode ser construída movendo cada ponto da curva inicial $\rho(x, 0) = f(x)$ de uma distância $c(\rho)t$ para a direita, e essa distância será diferente para diferentes valores de ρ.

O fato de c depender de ρ então provoca uma distorção na onda, à medida que ela se propaga: tomemos o caso em que $c(\rho)$ é crescente, assim f' e F' têm o mesmo sinal: pontos onde ρ é maior se propagam com maior velocidade do que outros de menor ρ, como podemos observar na Figura 1.2: as partes compressivas da onda, isto é, as partes em que a velocidade de propagação decresce, evoluem até "quebrar", de forma que não pode mais existir uma solução regular: teríamos inicialmente que a reta tangente se torna vertical (derivada infinita), e mais tarde uma função a três valores.

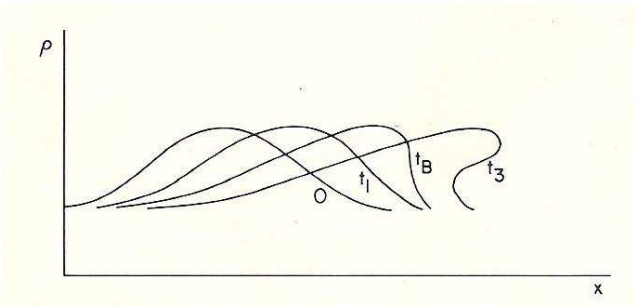

Figura 1.2: Quebra de uma onda compressiva

Como a partir desse instante deixa de existir uma solução regular, torna-se interessante entender se faz sentido (e tem correspondência no problema físico modelado), considerar um tipo diferente de solução, que admita algum tipo de descontinuidade.

Em gasdinâmica, por exemplo, é comum encontrar situações nas quais as variáveis que descrevem o gás apresentam um salto em um espaço muito pequeno (da mesma ordem da distância entre as moléculas): é o caso das ondas de choque. Para podermos considerar soluções descontínuas, não podemos mais considerar a formulação diferencial do problema (1.2.5), mas precisamos achar uma formulação diferente.

1.2.3 Formulação integral dos problemas de conservação

Nesta seção, introduziremos os chamados **problemas de conservação** e veremos que as equações consideradas até agora podem ser deduzidas deles.

Em muitos problemas físicos, observa-se uma distribuição contínua de algum material. No caso de um problema unidimensional, podemos definir uma densidade linear $\rho(x,t)$ (quantidade de material por unidade de comprimento) e o fluxo do material $q(x,t)$ (quantidade de material que transita pela seção x, por unidade de tempo).

Assumindo que o material é conservado durante o movimento, devemos estipular que a taxa de variação da quantidade total deste numa seção $x_2 < x < x_1$ deve ser balanceada pela entrada de material nessa mesma seção. Equacionando, obtemos a **equação da conservação na forma integral**:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho(x,t)dx = q(x_2,t) - q(x_1,t). \tag{1.2.11}$$

Se $\rho(x,t)$ e $q(x,t)$ possuem derivadas contínuas, podemos escrever (1.2.11) na forma

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx + q(x_1,t) - q(x_2,t) = 0$$

e tomar o limite para $x_1 \to x_2$, de forma a obter a **equação da conservação na forma diferencial**,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{1.2.12}$$

A equação (1.2.5) ocorre quando é possível postular (pelo menos como uma primeira aproximação), uma relação funcional entre q e ρ. Se escrevemos

$$q = Q(\rho), \tag{1.2.13}$$

com Q função derivável, substituindo (1.2.13) em (1.2.12) e nomeando $Q'(\rho) = c(\rho)$, obtemos

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0.$$

1.2.4 Soluções generalizadas e Choque

Voltemos a considerar o caso em que uma solução regular de (1.2.5) deixa de existir. Podemos, agora, usar a formulação integral (1.2.11), que não exige que ρ e q sejam deriváveis nem contínuas para fazer sentido.

Suponhamos que ρ e q tenham um salto (descontinuidade) ao longo de uma curva (**choque**) de equação $x = s(t)$, e que x_1 e x_2 sejam tais que $x_2 < s(t) < x_1$. Suponhamos ainda que ρ e q e suas primeiras derivadas sejam contínuas em $x_1 \geq x > s(t)$ e em $s(t) > x \geq x_2$, e que tenham limites finitos quando $x \to s(t)$ por ambos os lados. Assim, (1.2.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} q(x_2,t) - q(x_1,t) &= \frac{d}{dt}\int_{x_2}^{s(t)} \rho(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_{s(t)}^{x_1} \rho(x,t)dx \\ &= \rho(s^-,t)s'(t) - \rho(s^+,t)s'(t) + \int_{x_2}^{s(t)} \rho_t(x,t)dx + \int_{s(t)}^{x_1} \rho_t(x,t)dx, \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

onde $\rho(s^-,t)$ e $\rho(s^+,t)$ são os valores de $\rho(x,t)$ quando $x \to s(t)$ pela esquerda e pela direita, respectivamente.

Como $\rho_t(x,t)$ é limitada em cada um dos intervalos separadamente, as integrais tendem a zero quando $x_2 \to s^-$ e $x_1 \to s^+$. Então obtemos

$$q(s^-,t) - q(s^+,t) = s'(t)[\rho(s^-,t) - \rho(s^+,t)].$$

Usaremos a notação de adotar o índice 1 para os valores que estão à frente (à direita) do choque e o índice 2 para os valores de trás (à esquerda). Assim, chamando de U a velocidade de propagação da onda de choque, $s'(t)$, temos

$$q_2 - q_1 = U(\rho_2 - \rho_1). \tag{1.2.15}$$

Denotando o salto nas quantidades pelo símbolo $[\ \ ]$, podemos reescrever (1.2.15) como

$$U = \frac{[\,q\,]}{[\,\rho\,]}.$$

Esta fórmula é conhecida como relação de **Rankine-Hugoniot**, e expressa a relação entre a velocidade do choque e o salto nas quantidades envolvidas, como consequência da equação integral (1.2.11).

Se $q = Q(\rho)$, temos que $q_2 = Q(\rho_2)$ e $q_1 = Q(\rho_1)$ em cada lado do choque, assim, a condição de choque (1.2.15) pode ser reescrita como

$$U = \frac{Q(\rho_1) - Q(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{1.2.16}$$

Podemos então definir **soluções em sentido generalizado** de (1.2.5), de forma a permitir descontinuidades: para quaisquer x_1, x_2, t, uma solução generalizada deverá satisfazer (1.2.11). Onde ela for regular, isso é equivalente a satisfazer (1.2.12) (ou (1.2.5)), enquanto em caso de descontinuidade, isso implicará na relação de Rankine-Hugoniot.

Já que estamos admitindo soluções com descontinuidade, podemos considerar um problema modelo em que a distribuição inicial tenha uma descontinuidade em $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \rho_1, & x > 0, \\ \rho_2, & x < 0\,, \end{cases} \tag{1.2.17}$$

logo

$$F(x) = c(f(x)) = \begin{cases} c_1 = c(\rho_1), & x > 0, \\ c_2 = c(\rho_2), & x < 0. \end{cases}$$

Vamos analisar os dois casos possíveis.

Se $c_2 > c_1$, as retas características construídas em (1.2.8) se cruzariam imediatamente, como podemos observar na Figura 1.3.

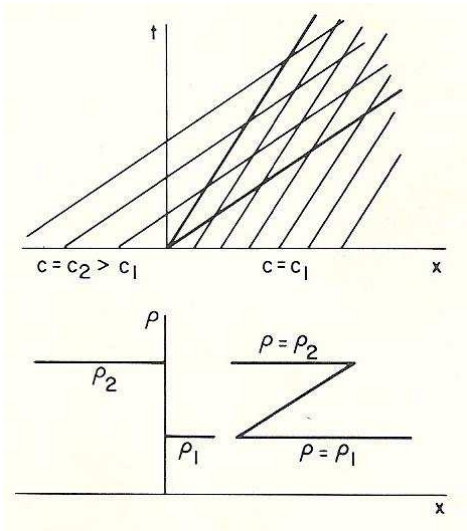

Figura 1.3:

Por outro lado, se $c_2 < c_1$, então as retas características (1.2.8) nunca cruzariam, mas deixariam uma região vazia entre as retas $x = c_2 t$ e $x = c_1 t$. Podemos tentar preencher esta

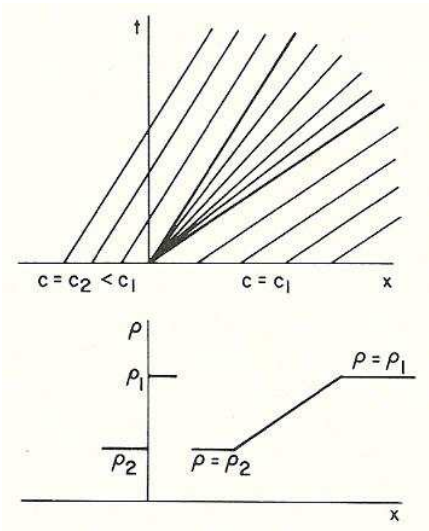

Figura 1.4: Solução generalizada expansiva

região com retas pela origem $x = \gamma t$, sendo $c_2 < \gamma < c_1$, pondo $\rho = c^{-1}(\gamma)$ ao longo delas. Obtemos então a função contínua para $t > 0$, cujas retas características são representadas na Figura 1.4,

$$\rho = \begin{cases} \rho_2, & \frac{x}{t} \leq c_2, \\ c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & c_2 < \frac{x}{t} < c_1, \\ \rho_1, & c_1 \leq \frac{x}{t}. \end{cases} \tag{1.2.18}$$

Podemos observar que esta função satisfaz (1.2.11). Para isso, consideremos um intervalo $[x_2, x_1]$ com $x_2 \leq c_2 t < c_1 t \leq x_1$ (os outros casos seguem por contas análogas).

Então

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{x_2}^{c_2 t} \rho_2 dx + \frac{d}{dt}\int_{c_2 t}^{c_1 t} c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) dx + \frac{d}{dt}\int_{c_1 t}^{x_1} \rho_1 dx,$$

que leva a

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho(x,t)dx = \rho_2 c_2 + \frac{d}{dt}\int_{c_2 t}^{c_1 t} c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) dx - \rho_1 c_1; \tag{1.2.19}$$

pondo $\gamma = x/t$ calculamos

$$\frac{d}{dt}\int_{c_2 t}^{c_1 t} c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) dx = \frac{d}{dt}\left[t\int_{c_2}^{c_1} c^{-1}(\gamma)d\gamma\right] = \int_{c_2}^{c_1} c^{-1}(\gamma)d\gamma$$
$$= \left[c^{-1}(\gamma)\gamma\right]_{c_2}^{c_1} - \int_{c_2}^{c_1} (c^{-1})'(\gamma)\gamma\, d\gamma;$$

agora pondo $r = c^{-1}(\gamma)$ e em seguida lembrando que $c = Q'$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{c_2 t}^{c_1 t} c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) dx = \left[c^{-1}(\gamma)\gamma\right]_{c_2}^{c_1} - \int_{\rho_2}^{\rho_1} c(r)dr =$$

$$= \rho_1 c_1 - \rho_2 c_2 - \int_{\rho_2}^{\rho_1} c(r)dr = \rho_1 c_1 - \rho_2 c_2 - Q(\rho_1) + Q(\rho_2). \tag{1.2.20}$$

Finalmente, fazendo uso de (1.2.19) e (1.2.20), concluímos

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho(x,t)dx = Q(\rho_2) - Q(\rho_1) = q(x_2,t) - q(x_1,t),$$

que é o resultado procurado. Logo, (1.2.18) é uma solução generalizada, contínua, mas não derivável ao longo das retas $x = c_2 t$ e $x = c_1 t$.

Tanto no caso $c_2 > c_1$, quanto no caso $c_1 > c_2$ existe também uma solução generalizada com duas regiões de ρ constantes separadas por um choque de inclinação dada por (1.2.16). Esta solução é a única possível no primeiro caso (compressivo), enquanto no segundo caso (expansivo) seria uma solução alternativa à (1.2.18). Nos fenômenos físicos modelados por estas equações, porém, o choque aparece apenas no caso compressivo, enquanto no caso expansivo a solução é do tipo da (1.2.18).

Uma explicação deste fato pode ser obtida imaginando que a condição inicial descontínua (1.2.17) seja substituída por uma sua aproximação regular: no caso expansivo existiria uma solução clássica para todo $t > 0$, parecida à (1.2.18), pois as características seriam divergentes e nunca chegariam a cruzar-se. Ao contrário, no caso compressivo, a regularidade da condição inicial apenas implicaria na existência de uma solução clássica para $t > 0$ muito pequeno, mas logo as características desta solução cruzariam e a partir deste instante voltaria a existir apenas uma solução com choque.

1.2.5 Exemplos de aplicações a problemas físicos

Exemplo 1 (Modelo de trânsito em rodovia)**.** *Um exemplo interessante que ilustra nossa teoria é a movimentação de carros numa rodovia. É razoável supor que algumas ideias do comportamento do tráfego podem ser obtidas tratando-o como contínuo, com uma densidade $\rho(x,t)$ igual ao número de carros por unidade de comprimento, e um fluxo $q(x,t)$ igual ao número de carros atravessando a posição x por unidade de tempo.*

Para um trecho de rodovia sem entradas ou saídas, o número de carros é conservado! Portanto, podemos considerar a equação (1.2.11).

O fluxo q será o produto da velocidade dos carros pela densidade, e em primeira aproximação é razoável supor que a velocidade dependa da própria densidade local ρ (quanto mais trânsito, menor a velocidade), logo temos (1.2.13) como primeira aproximação.

Exemplo 2 (Ondas de enchente)**.** *Podemos também aplicar a teoria estudada para modelar ondas de enchentes em longos rios. Nesse caso, consideramos como incógnita a seção transversal do canal, A, que varia com x e t à medida que o nível do rio cresce. A variação da quantidade de agua no intervalo $[x_2, x_1]$ deve ser balanceada pelo fluxo q de água pelas seções extremas. Dessa forma, considerando unitária a densidade da agua, obtemos a relação*

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} A(x,t)dx = q(x_2,t) - q(x_1,t),$$

análoga a (1.2.11), e que expressa a conservação da água.

Ainda, embora modelar o fluxo de fluido q seja bastante complexo e envolva grande número de variáveis, é razoável assumir, em primeira aproximação, que q seja o produto de A pela velocidade média na seção v, e que v seja uma função crescente de A. Obtemos assim $q = Q(A)$ e, supondo $A(x,t)$ derivável, a equação da conservação na forma diferencial torna-se

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q'(A)\frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

Exemplo 3 (Cromatografia)**.** *Uma formulação um pouco mais complexa envolvendo a mesma teoria pode ser aplicada à cromatografia. Neste problema, um fluido carregando substâncias, partículas ou íons dissolvidos, flui sobre um determinado sólido fixo, e o material por ele carregado é parcialmente adsorvido pelo sólido. Por simplicidade, consideremos que o fluido tenha velocidade constante v. Assim, sendo ρ_f a densidade de material carregado no fluido e ρ_s a densidade de material depositado no sólido, temos:*

$$\rho = \rho_f + \rho_s, \qquad q = v\rho_f,$$

onde ρ é a densidade total de material e q é o fluxo deste, dependente apenas de v e ρ_f, pois apenas o material ainda dissolvido escoa.

Assim, a equação da conservação na forma diferencial aplicada ao material nos dá

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f + \rho_s) + \frac{\partial}{\partial x}(v\rho_f) = 0. \tag{1.2.21}$$

Para fechar o problema precisamos de uma segunda relação que nos forneça a taxa de deposição do material no sólido. A equação

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = k_1(A - \rho_s)\rho_f - k_2\rho_s(B - \rho_f),$$

com k_1, k_2, A e B constantes positivas, é o modelo mais simples para este fenômeno. O primeiro termo representa a deposição do material do fluido para o sólido, proporcional à densidade no fluido ρ_f, mas limitada pela quantidade já depositada no sólido, que tem uma capacidade máxima A. O segundo termo, análogo, diz respeito à transferência contrária, do sólido para o fluido.

No equilíbrio, a taxa de deposição torna-se zero, isto é,

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0;$$

assim, para a condição de equilíbrio, temos

$$\rho_s = A\frac{k_1\rho_f}{k_2B + (k_1 - k_2)\rho_f}.$$

Note que, agora, obtivemos ρ_s em função de ρ_f, e portanto $\rho = (\rho_f + \rho_s)$ é $\rho = \rho(\rho_f)$. Tomando a inversa, temos $\rho_f = \rho_f(\rho)$, e dessa forma, na equação (1.2.21), $q = Q(\rho)$, como na teoria discutida anteriormente.

1.2.6 Estrutura de Choque: equação de segunda ordem

Quando na equação de primeira ordem ocorre o choque, torna-se interessante questionar a hipótese de que $q = Q(\rho)$ em (1.2.13). Uma melhor aproximação seria supor q não apenas função de ρ, mas também do gradiente da densidade ρ_x. Considerando o exemplo do trânsito, isso significaria assumir que os motoristas reduzam sua velocidade não apenas em função da maior densidade de carros mas também ao perceber que a densidade está maior a frente.

Consideremos então o seguinte modelo:

$$q = Q(\rho) - \nu\rho_x, \tag{1.2.22}$$

onde ν é uma constante positiva. Para ν pequeno, (1.2.13) é uma boa aproximação deste modelo mais completo desde que ρ_x também não seja muito grande. Quando, porém, estamos perto do tempo no qual deixa de existir uma solução regular de (1.2.5) e surgiria o choque, ρ_x torna-se grande e o termo de correção passa a ser essencial, por menor que seja ν.

De (1.2.12) e (1.2.22) obtemos a equação de segunda ordem

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx}, \qquad c(\rho) = Q'(\rho). \tag{1.2.23}$$

Procuramos agora por uma solução clássica de (1.2.23), isto é, uma solução que seja duas vezes derivável e que substitua a solução descontínua da equação (1.2.13). Para conseguirmos integrar (1.2.23), procuraremos por uma solução de perfil constante, isto é, tal que

$$\rho(x, y) = \hat{\rho}(X), \qquad \text{onde } X = x - Ut, \tag{1.2.24}$$

e U é uma constante ainda a ser determinada. De (1.2.23), aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$c(\hat{\rho})\hat{\rho}' - U\hat{\rho}' = \nu\hat{\rho}'';$$

integrando em X esta expressão, obtemos

$$Q(\hat{\rho}) - U\hat{\rho} + A = \nu\hat{\rho}', \tag{1.2.25}$$

onde A é uma constante de integração de valor ainda desconhecido.

Uma relação implícita para $\hat{\rho}(X)$ pode ser obtida a partir da equação anterior reescrevendo-a como

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\hat{\rho}'}{Q(\hat{\rho}) - U\hat{\rho} + A}$$

e integrando novamente com relação a X. Levando em conta que $\hat{\rho}' dX = d\hat{\rho}$, chegamos em

$$\frac{X}{\nu} = \int \frac{d\hat{\rho}}{Q(\hat{\rho}) - U\hat{\rho} + A}. \tag{1.2.26}$$

Como estamos procurando uma solução que substitua o choque, imporemos que ela tenda a estados constantes ρ_1, ρ_2 quando $X \to \pm\infty$, e que $\hat{\rho}' \to 0$ quando $X \to \pm\infty$. Por (1.2.25), isso implica que os parâmetros U e A devem satisfazer

$$Q(\rho_1) - U\rho_1 + A = Q(\rho_2) - U\rho_2 + A = 0. \tag{1.2.27}$$

Em particular, obtemos

$$U = \frac{Q(\rho_1) - Q(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}, \tag{1.2.28}$$

e em seguida, por meio de (1.2.27), obtemos o valor de A.

Observe que (1.2.28) nos mostra que o perfil constante $\hat{\rho}(X)$ deve transladar com a velocidade U que é exatamente a mesma obtida em (1.2.16) para a velocidade do choque!

Agora note que, como estamos considerando $c(\rho)$ crescente, temos que ela é invertível e que sua primitiva $Q(\rho)$ é uma função convexa. Por (1.2.27), ρ_1 e ρ_2 são zeros de $Q(\rho) - U\rho + A$, e pela convexidade de Q eles são então zeros simples. Dessa forma, $Q(\rho) - U\rho + A < 0$ entre eles. Se $\rho_1 < \rho_2$, quando $\hat{\rho} \to \rho_1^+$ em (1.2.26), $Q(\hat{\rho}) - U\hat{\rho} + A \to 0^-$, a integral diverge, e $X \to +\infty$. Analogamente, quando $\hat{\rho} \to \rho_2^-$ tem-se $X \to -\infty$.

Obtemos então que a solução é como a mostrada na Figura 1.5, com ρ monótona decrescente de ρ_2 (em $-\infty$) até ρ_1 (em $+\infty$). Concluímos então que uma solução de perfil constante é possível apenas com o valor de ρ maior a $-\infty$ e menor a $+\infty$ (compressão), enquanto não existe uma solução deste tipo no caso expansivo.

É interessante observar que, por (1.2.26), se $\nu \to 0$, o perfil mostrado na figura 1.5 é comprimido na direção do eixo X. Assim, no limite $\nu \to 0$, o perfil tende à função descontínua $\hat{\rho}(X) = \rho_2$, $X < 0$, $\hat{\rho}(X) = \rho_1$, $X > 0$, que corresponde à solução generalizada com choque da (1.2.5). Podemos então dizer que a solução generalizada com choque é o limite da solução deste modelo mais completo, quando o termo de segunda ordem $\nu\rho_{xx}$ tende a zero.

No caso particular em que a função $Q(\rho)$ é quadrática, podemos escrever:

$$Q(\hat{\rho}) - U\hat{\rho} + A = -\alpha(\hat{\rho} - \rho_1)(\rho_2 - \hat{\rho}),$$

sendo $\alpha > 0$; assim (1.2.26) se torna

$$\frac{X}{\nu} = -\int \frac{d\hat{\rho}}{\alpha(\hat{\rho} - \rho_1)(\rho_2 - \hat{\rho})} = \frac{1}{\alpha(\rho_2 - \rho_1)} ln\left(\frac{\rho_2 - \hat{\rho}}{\hat{\rho} - \rho_1}\right), \tag{1.2.29}$$

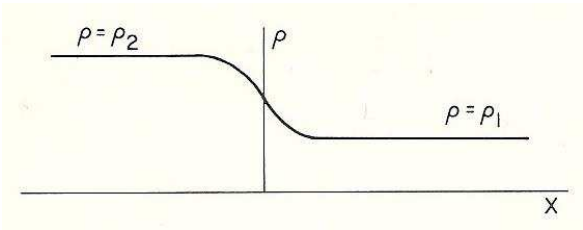

Figura 1.5: Perfil da solução compressiva na aproximação de segunda ordem

isto é,

$$\hat{\rho} = \frac{\rho_2 + \rho_1 e^{\alpha(\rho_2-\rho_1)X/\nu}}{1 + e^{\alpha(\rho_2-\rho_1)X/\nu}} \,. \tag{1.2.30}$$

1.3 Gasdinâmica

1.3.1 Equações de Movimento

As equações de movimento para um fluido compressível são obtidas escrevendo as equações da conservação de massa e de energia, juntamente às equações do momento, para um volume arbitrário V do fluido. Cada uma dessas traz consigo as correspondentes variáveis para descrever o equilíbrio.

A descrição do fluxo de massa requer apenas uma quantidade escalar e uma vetorial: a densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$ e o vetor velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, em cada ponto $\mathbf{x}$ e instante t.

A equação do momento linear requer quantidades adicionais para descrever as forças atuantes no fluido. Podem existir forças de corpo, como a gravidade, que atuam em todo o fluido. A resultante destas forças por unidade de massa será denotada por um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

Há, ainda, o esforço atuante na fronteira S do volume V de fluido, denotado por $\mathbf{p}$, que, em geral, depende também da orientação do elemento de área. Portanto, será uma função da posição $\mathbf{x}$, do tempo t e também do vetor unitário $\mathbf{n}$ normal ao elemento de área.

Para a equação da energia, precisamos de ainda mais quantidades. O fluido possui uma energia interna por unidade de massa $e(\mathbf{x}, t)$, relacionada à agitação térmica das suas moléculas. Há, ainda, o fluxo de calor por unidade de área na fronteira, que será denotado por um vetor $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Estamos agora em condição de escrever as equações em questão, muito embora elas ainda não nos proporcionem um sistema completo, já que temos mais incógnitas do que equações.

Consideremos um volume arbitrário V ocupado pelo fluido, delimitado pela superfície de fronteira S. A massa de fluido contida no volume V pode ser expressa por $\int_V \rho dV$.

A equação de **conservação da massa**

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS \tag{1.3.1}$$

exprime o fato que a variação temporal da massa em V deve ser compensado pelo fluxo de fluido através da fronteira S. Note que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ denota a componente da velocidade de escoamento no sentido normal externo a S.

De forma similar, a **equação do momento** é

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{v} dV = -\oint_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS + \oint_S \mathbf{p} dS + \int_V \rho \mathbf{F} dV, \tag{1.3.2}$$

sendo a i-ésima componente

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathrm{v}_i dV = -\oint_S \rho \mathrm{v}_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS + \oint_S \mathrm{p}_i dS + \int_V \rho \mathrm{F}_i dV, \tag{1.3.3}$$

onde o primeiro termo é a taxa de variação do momento no interior de V, o segundo é o momento transportado através da fronteira pelo escoamento, o terceiro é a força que age sobre V em razão do esforço $\mathbf{p}$ atuante em S, e o último é o total das forças de corpo em V.

A densidade de energia total consiste na soma da energia cinética $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ devida ao movimento macroscópico, mais energia interna ρe devida à agitação molecular. Para o balanço energético, temos, portanto, a equação de **conservação da energia**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right) dV = \\ -\oint_S \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS + \oint_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} dS - \oint_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} dS + \int_V \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} dV.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Isto é, seguindo a ordem dos termos da equação, a variação temporal da energia total no interior de V se deve ao transporte de energia através da fronteira, ao trabalho realizado pelo esforço $\mathbf{p}$ na fronteira, ao calor trocado através da fronteira, bem como ao trabalho realizado pelas forças de corpo no fluido.

Se estas quantidades são contínuas com derivadas contínuas, podemos tomar o limite em que V tende a zero para obter as equações na forma diferencial.

Nestas hipóteses, em (1.3.1)...(1.3.4), as derivadas ordinárias temporais podem ser transferidas para dentro das integrais de volume, como parciais. Ainda, as integrais de superfície podem ser transformadas em integrais de volume aplicando o teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{Q}\cdot\mathbf{n} dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{Q} dV, \tag{1.3.5}$$

para qualquer vetor $\mathbf{Q}$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $\overline{V}$. Seguindo esses dois passos, podemos reescrever (1.3.1) como

$$\int_V \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right\} dV = 0. \tag{1.3.6}$$

Uma vez que, pela hipótese, a função integranda é contínua e (1.3.6) é válida para V arbitrário, podemos deduzir que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{1.3.7}$$

O que justifica essa dedução é o teorema da conservação do sinal. Se a função fosse diferente de zero em algum ponto, ela teria o mesmo sinal em um pequeno volume V devido à continuidade, e assim (1.3.6) não seria verdade.

A equação que acabamos de deduzir é a equação da conservação de massa na forma diferencial.

Antes de considerar a equação do momento, precisamos entender melhor o termo $\oint_S \mathbf{p} dS$ dos esforços na superfície S. Como já dito, o vetor $\mathbf{p}$ depende de $\mathbf{x}, t$ e também da normal $\mathbf{n}$ à superfície no ponto considerado. Assumiremos que a dependência de $\mathbf{n}$ seja linear, isto é,

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = P(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \tag{1.3.8}$$

onde P é uma matriz quadrada

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

que depende unicamente da posição $\mathbf{x}$ e do tempo t.

Dessa forma, denotando por $\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ as transpostas das linhas de P, obtemos de (1.3.8) que

$$\mathrm{p}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{n}\,. \tag{1.3.9}$$

Logo, a integral de superfície em (1.3.3) pode ser escrita na forma:

$$\oint_S \mathrm{p}_i dS = \oint_S \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P}_i dV.$$

Finalmente, procedendo de forma análoga à da equação da conservação e fazendo uso de (1.3.9), obtemos as componentes $i = 1, .., 3$ da equação do momento na forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v}_i) + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}_i \mathbf{v} - \mathbf{P}_i) = \rho F_i. \tag{1.3.10}$$

Enfim, para a equação da energia, fazendo uso de (1.3.8) e observando que $P\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = P^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right) + \nabla \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right)\mathbf{v} - P^t\mathbf{v} + \mathbf{q}\right\} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{1.3.11}$$

Em resumo, obtivemos nesta seção as seguintes cinco equações de movimento para o fluido:

(CONSERVAÇÃO DA MASSA)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

(MOMENTO)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v}_i) + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}_i \mathbf{v} - \mathbf{P}_i) = \rho F_i,$$

(ENERGIA)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right) + \nabla \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right)\mathbf{v} - P^t\mathbf{v} + \mathbf{q}\right\} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Vale lembrar que o sistema nesta forma não está completo, pois temos apenas cinco equações. Para podermos obter as cinco incógnitas $\rho, \mathbf{v}, e$, precisamos modelar as outras quantidades. Em geral, as forças de corpo $\mathbf{F}$ serão consideradas dadas, enquanto o fluxo de calor $\mathbf{q}$ e a matriz P dependerão das próprias incógnitas $\rho, \mathbf{v}, e$. Veremos uma maneira de modelar estas quantidades na próxima seção.

1.3.2 Equações de Euler e de Navier-Stokes

Nesta seção veremos como fechar o sistema de equações encontrado, fazendo algumas hipóteses sobre o gás considerado.

1. Suporemos que o esforço atuante em qualquer elemento de área seja sempre normal à área e independa de sua orientação. Fisicamente isso significa desprezar os efeitos da viscosidade do gás, que introduziriam esforços tangenciais. Tal hipótese se traduz em modelar a matriz P anteriormente introduzida como

   $$P = -pI_3,$$

   onde p é a **pressão escalar**, função de x e t apenas, e I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

2. Suporemos desprezíveis as trocas de calor no interior do gás, isto é, consideraremos

   $$\mathbf{q} = \vec{0}.$$

3. Suporemos ainda que a energia interna seja função apenas das quantidades p e ρ, isto é,

$$e = e(p, \rho).$$

   Em particular, considerando o modelo do gás perfeito, temos $e = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$, onde $\gamma > 1$ é a razão entre os calores específicos a pressão constante e a volume constante do gás.

4. Consideraremos, enfim, nulas as forças de corpo.

Inserindo estas hipóteses nas equações obtemos o seguinte sistema, composto por cinco equações nas cinco incógnitas ρ, p e v_i:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v}_i) + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}_i \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i} p = 0, \tag{1.3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right) + \nabla \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1} + p\right)\mathbf{v}\right\} = 0. \tag{1.3.14}$$

Este sistema é chamado **sistema de Euler**. As simplificações feitas são razoáveis por exemplo para fluxos de ar a velocidade subsônica, quando a viscosidade e as variações de temperatura são desprezíveis.

Um sistema de equações bem mais complexo, o **sistema de Navier Stokes**, pode ser obtido modelando o fluxo de calor em função do gradiente da temperatura (a qual também é função de ρ e p para um gás ideal) e somando à matriz dos esforços um termo (devido à viscosidade), que depende das derivadas espaciais da velocidade. Para o sistema de Navier Stokes as expressões consideradas para a matriz dos esforços P e para o fluxo de calor $\mathbf{q}$ são

$$P = -pI_3 - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})I_3 + \mu(D\mathbf{v} + (D\mathbf{v})^t),$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

onde $D\mathbf{v}$ é a matriz das derivadas espaciais de $\mathbf{v}$, enquanto μ e λ são os coeficientes de viscosidade e de condução de calor, respectivamente.

Capítulo 2

Relatório 2

2.1 Gasdinâmica

2.1.1 Formas alternativas para as Equações de Euler

Começamos este capítulo retomando as equações de Euler deduzidas na primeira parte do texto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{2.1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v}_i) + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right) + \nabla \cdot \left\{\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e + p\right)\mathbf{v}\right\} = 0, \tag{2.1.3}$$

onde as funções incógnitas são ρ, p e $\mathbf{v}$ (respectivamente, densidade, pressão e vetor velocidade), enquanto a energia interna e é função de ρ e p.

A fim de simplificar a escritura dessas equações, introduzimos o operador

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

que é chamado operador de *derivada convectiva* e representa a derivada temporal acompanhando a trajetória de uma partícula de fluido, em vez de feita num ponto fixado.

Começando pela equação de conservação da massa (2.1.1), temos

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

logo, podemos escrever (2.1.1) na forma

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \tag{2.1.4}$$

Para a equação do momento (2.1.2), calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{v}_i) + \nabla \cdot (\rho \mathrm{v}_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{v}_i + \rho \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\mathrm{v}_i + \rho\, \mathbf{v} \cdot \nabla \mathrm{v}_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right) \mathrm{v}_i + \rho \left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathrm{v}_i\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i}\,, \end{aligned}$$

mas o primeiro termo é nulo por (2.1.1), e usando o operador de derivada convectiva obtemos

$$\rho \frac{D\mathrm{v}_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \tag{2.1.5}$$

Finalmente, a equação da energia (2.1.3) pode ser reduzida, por meio de contas análogas e fazendo uso das equações (2.1.4) e (2.1.5), à forma

$$\rho \frac{De}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

ou, utilizando novamente (2.1.4), à forma alternativa

$$\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{2.1.6}$$

Uma forma mais significativa da equação da energia pode ser obtida em termos de outra quantidade termodinâmica: a entropia S, que pode ser definida pela relação diferencial

$$TdS = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho,$$

onde T é a temperatura absoluta. Observamos que como T e e são funções de ρ e p apenas, S também será. Em particular, no caso de um gás perfeito, vale

$$e = c_v T\,, \qquad T = \frac{p}{\rho R}\,,$$

onde $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ e $\gamma = c_p/c_v$ é a razão entre o calor específico do gás a pressão constante (c_p) e o a volume constante (c_v). Assim $e = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$ e deduzimos

$$TdS = \frac{p}{R\rho}dS = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho\right) - \frac{p}{\rho^2}d\rho\,,$$

isto é,

$$dS = c_v \frac{dp}{p} - \gamma c_v \frac{d\rho}{\rho}\,,$$

logo

$$S = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)\,. \tag{2.1.7}$$

Usando a entropia, podemos reduzir (2.1.6) a

$$T\frac{DS}{Dt} = 0,$$

isto é,

$$\frac{DS}{Dt} = 0. \tag{2.1.8}$$

Esta equação significa que a entropia de cada partícula permanece constante ao longo de sua trajetória. Escoamentos satisfazendo (2.1.8) são chamados adiabáticos, o que condiz com o fato que em nossa modelagem desconsideramos os fluxos de calor ($\mathbf{q} = 0$).

Como $S = S(\rho, p)$, podemos voltar a usar estas incógnitas escrevendo (2.1.8) como

$$S_\rho(\rho, p)\frac{D\rho}{Dt} + S_p(\rho, p)\frac{Dp}{Dt} = 0,$$

isto é,

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2(\rho, p)\frac{D\rho}{Dt}, \tag{2.1.9}$$

onde definimos

$$c^2(\rho, p) = -\frac{S_\rho}{S_p}(\rho, p). \tag{2.1.10}$$

Esta função corresponde à derivada de p com respeito a ρ ao longo de uma curva a entropia constante:

$$c^2(\rho, p) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=const}. \tag{2.1.11}$$

De fato, se $S(\rho, p) = S_0$ define implicitamente uma curva $p = p(\rho)$ no plano (ρ, p), então, pelo teorema da função implícita,

$$p'(\rho) = -\frac{S_\rho}{S_p}(\rho, p(\rho)). \tag{2.1.12}$$

Observe que é razoável, para um sistema físico estável, que a variação da pressão tenha o mesmo sinal da variação da densidade, assim a quantidade c^2 definida acima será sempre positiva. Para o caso de um gás ideal, deduzimos de (2.1.7)

$$S_\rho(\rho, p) = -\frac{c_v\gamma}{\rho}, \qquad S_p(\rho, p) = \frac{c_v}{p},$$

logo

$$c^2(\rho, p) = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma RT. \tag{2.1.13}$$

Veremos na próxima seção que o modulo de c corresponde à velocidade de propagação do som no gás: a fórmula acima mostra que num gás ideal ela depende apenas da temperatura.

Voltando às equações de Euler, chegamos ao seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0\,, \\ \rho\dfrac{D\mathrm{v}_i}{Dt} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = 0\,, \\ \dfrac{DS}{Dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \dfrac{Dp}{Dt} = c^2(\rho, p)\dfrac{D\rho}{Dt}. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Observamos que a primeira forma da equação da energia apenas nos informa que a entropia de cada partícula permanece constante ao longo de sua trajetória, mas pode ser diferente para cada partícula. Se, no entanto, num instante inicial $t = 0$, todas as partículas do gás apresentam uma entropia uniforme S_0, então a entropia de todo sistema permanece constante ao longo do movimento. Esse tipo de movimento é chamado *isentrópico*. Nesse caso, da identidade $S(\rho, p) = S_0$ obtemos uma relação que liga p com ρ; assim as equações do sistema de Euler em (2.1.14) podem ser reduzidas apenas às primeiras duas.

No caso do movimento isentrópico de um gás ideal, levando em conta a expressão (2.1.7), teremos

$$p = \mathtt{k}\rho^\gamma, \quad \text{sendo } \mathtt{k} = e^{S_0/c_v}. \tag{2.1.15}$$

É bom ressaltar que o argumento acima foi deduzido das equações diferenciais, logo se aplica apenas a regiões nas quais as funções são diferenciáveis. Caso haja choques ou outras descontinuidades não podemos mais assumir o movimento isentrópico, mesmo quando a entropia inicial é constante. De fato, através de uma superfície de descontinuidade a entropia salta, e o valor do salto varia com o tempo e com a posição, à medida que o choque se propaga. Dessa forma, um escoamento inicialmente isentrópico não deve permanecer assim caso haja formação de uma onda de choque.

2.1.2 Acústica

Sabemos que o som se propaga através de ondas de pressão, que em geral são de amplitude pequena com respeito à pressão atmosférica. Podemos, portanto, modelar a propagação do som no ar através das equações obtidas na seção anterior, considerando pequenas perturbações $\widetilde{p}(\mathbf{x}, t)$, $\widetilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ em torno de um estado de equilíbrio p_0, ρ_0, $\mathbf{v}_0$. Consideraremos, ainda, que o gás se encontre em repouso no estado de equilíbrio; isto é, $\mathbf{v}_0 = 0$. Dessa forma, temos:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0 + \widetilde{p}(\mathbf{x}, t), \qquad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \widetilde{\rho}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t).$$

Desprezaremos quaisquer forças de corpo atuantes no gás, bem como fluxos de calor, e admitiremos que a entropia do sistema seja constante no instante inicial, logo permaneça constante durante a propagação das ondas (movimento isentrópico).
Assim, conforme discutido na sessão anterior, $p = P(\rho)$ e, para pequenas perturbações, podemos tomar como boa aproximação desta expressão seu polinômio de Taylor de primeira ordem em ρ_0:

$$p = p_0 + P'(\rho_0)(\rho - \rho_0).$$

Em particular, por (2.1.11), $P'(\rho_0) = c^2(\rho_0, p_0) := c_0^2$. Chegamos então à relação

$$\widetilde{p} = c_0^2 \widetilde{\rho} \tag{2.1.16}$$

entre as perturbações, que podemos ver como uma aproximação linear da equação (2.1.9).

Nosso objetivo, agora, é obter as equações (2.1.4) e (2.1.5) também em sua forma linearizada. Trabalhando a equação (2.1.4), escrevemos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

e substituindo $\rho = \rho_0 + \widetilde{\rho}$ e $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \widetilde{\rho}) + \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\rho_0 + \widetilde{\rho}) + (\rho_0 + \widetilde{\rho})\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}} = 0.$$

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{\rho} + \rho_0(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}) + \widetilde{\rho}(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}) = 0.$$

Faremos agora a hipótese que as perturbações relativas $\widetilde{\rho}/\rho_0$, $\widetilde{p}/p_0$, $\widetilde{\mathbf{v}}/c_0$ e suas derivadas sejam pequenas. Dividindo a última equação por $\rho_0 c_0$, segue

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\right) + \frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{c_0}\nabla\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{c_0}\right) + \frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\nabla \cdot \left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{c_0}\right) = 0,$$

equação na qual o primeiro e o terceiro termo são de primeira ordem na perturbação relativa, enquanto o segundo e o quarto são de segunda ordem. Desprezando os termos de segunda ordem e multiplicando novamente por $\rho_0 c_0$, obtemos

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}}) = 0. \tag{2.1.17}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, vamos trabalhar com a equação (2.1.5):

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho_0 + \widetilde{\rho})\frac{\partial \widetilde{v_i}}{\partial t} + (\rho_0 + \widetilde{\rho})\widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{v_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p_0 + \widetilde{p}) = \\ &= \rho_0\frac{\partial \widetilde{v_i}}{\partial t} + \widetilde{\rho}\frac{\partial \widetilde{v_i}}{\partial t} + \rho_0\widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{v_i} + \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{v_i} + \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Dividimos a expressão acima por $\rho_0 c_0^2 p_0$, obtendo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_0 p_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{v_i}}{c_0}\right) + \frac{1}{c_0 p_0}\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{v_i}}{c_0}\right) + \frac{1}{p_0}\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{c_0} \cdot \nabla\left(\frac{\widetilde{v_i}}{c_0}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{p_0}\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0}\frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{c_0} \cdot \nabla\left(\frac{\widetilde{v_i}}{c_0}\right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\widetilde{p}}{p_0}\right) = 0, \end{aligned}$$

na qual observamos que apenas o primeiro e o quinto termos são de primeira ordem nas perturbações relativas (o segundo e o terceiro são de segunda ordem, enquanto o quarto é de terceira). Desprezando termos de ordem maior que um, obtemos, ao multiplicar novamente por $\rho_0 c_0^2 p_0$,

$$\rho_0\frac{\partial \widetilde{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} = 0. \tag{2.1.18}$$

Desta última equação, integrando em t, temos

$$\widetilde{v}_i(\mathbf{x},t) = \widetilde{v}_i(\mathbf{x},0) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \widetilde{p}(\mathbf{x},\tau)d\tau\right);$$

e se considerarmos $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},0) = 0$, isto é, uma condição inicial com perturbação de velocidade nula, então

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) = \nabla\left(-\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \widetilde{p}(\mathbf{x},\tau)d\tau\right):$$

esta equação nos diz que o campo vetorial $\widetilde{\mathbf{v}}$ é um campo conservativo, pois admite um *potencial* $\phi(\mathbf{x},t)$ dado por

$$\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \widetilde{p}(\mathbf{x},\tau)d\tau. \tag{2.1.19}$$

Queremos agora obter uma equação diferencial para o potencial ϕ: de (2.1.19), derivando no tempo, obtemos

$$\widetilde{p} = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

e, impondo (2.1.16),

$$\widetilde{\rho} = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t};$$

finalmente, substituindo essas expressões na equação de conservação de massa linearizada (2.1.17), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi_t\right) + \rho_0\nabla\cdot(\nabla\phi) = 0,$$

isto é,

$$\phi_{tt} - c_0^2\Delta\phi = 0.$$

O potencial ϕ satisfaz, então, a **equação da onda linear**, que introduzimos no primeiro relatório, onde a velocidade de propagação é o coeficiente c_0, que corresponderá então à velocidade do som neste modelo linearizado.

No caso com uma dimensão espacial, a equação acima torna-se

$$\phi_{tt} - c_0^2\phi_{xx} = 0,$$

cuja solução já mostramos que pode ser escrita na forma

$$\phi(x,t) = f(x - c_0t) + g(x + c_0t),$$

com f e g duas vezes deriváveis. Assim, das expressões obtidas para $\widetilde{v}$, $\widetilde{p}$ e $\widetilde{\rho}$ em função de ϕ, obtemos

$$\widetilde{v}(x,t) = f'(x - c_0t) + g'(x + c_0t), \tag{2.1.20}$$

$$\widetilde{p}(x,t) = \rho_0c_0[f'(x - c_0t) - g'(x + c_0t)],$$

$$\widetilde{\rho}(x,t) = \frac{\rho_0}{c_0}[f'(x - c_0t) - g'(x + c_0t)].$$

Lembrando que assumimos $\widetilde{v}(x,0)=0$, se conhecemos a condição inicial da pressão $\widetilde{p}(x,0)=\pi(x)$ podemos calcular

$$f'(x)+g'(x)=0 \qquad e \qquad \rho_0 c_0[f'(x)-g'(x)]=\pi(x)\,,$$

das quais calculamos, a menos de uma constante, o potencial ϕ e logo a solução exata; em particular,

$$\widetilde{p}(x,t)=\frac{1}{2}[\pi(x-c_0t)+\pi(x+c_0t)].$$

2.1.3 Ondas não-lineares em dimensão um

Na seção anterior, linearizamos as equações de Euler em três dimensões espaciais e, no caso em uma dimensão, conseguimos uma solução exata. Nosso objetivo agora é considerar, no caso de escoamentos unidimensionais, as equações não-lineares em sua forma completa.

Considerando a velocidade apenas na direção x, as equações de Euler em (2.1.14) reduzem-se às seguintes três equações escalares nas três incógnitas ρ, p e v:

$$\rho_t+v\rho_x+\rho v_x=0, \tag{2.1.21}$$

$$\rho(v_t+vv_x)+p_x=0, \tag{2.1.22}$$

$$p_t+vp_x-c^2(\rho,p)[\rho_t+v\rho_x]=0, \tag{2.1.23}$$

onde c^2 é definida em (2.1.11).

Alternativamente, podemos substituir a última das equações por

$$S_t+vS_x=0 \tag{2.1.24}$$

e considerar então como incógnita a entropia S, sendo $p=p(\rho,S)$ uma função conhecida.

Tentaremos manipular as equações (2.1.21)-(2.1.23), a fim de obter o sistema em sua *forma característica*, isto é, encontrar três famílias de curvas (*características*) ao longo das quais o sistema se transforme num sistema de equações diferenciais ordinárias; para isso, escrevemos o sistema na forma forma matricial

$$B\mathbf{u}_t+C\mathbf{u}_x=0, \tag{2.1.25}$$

onde

$$\mathbf{u}:=\begin{pmatrix}\rho\\ v\\ p\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho&0\\-c^2&0&1\end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix}v&\rho&0\\0&\rho v&1\\-c^2v&0&v\end{pmatrix}.$$

Como a matriz B é invertível (de fato, $detB=\rho\neq 0$), podemos multiplicar a equação (2.1.25) pela sua inversa B^{-1}, obtendo:

$$\mathbf{u}_t+A\mathbf{u}_x=0, \tag{2.1.26}$$

onde

$$A := B^{-1}C = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo agora é desacoplar o sistema. Calculemos então os autovalores e os autovetores correspondentes para a matriz A: o polinômio característico é $(v-\lambda)[(v-\lambda)-c^2]$, logo os autovalores são

$$\lambda_1 = v, \quad \lambda_2 = v + c, \quad \lambda_3 = v - c,$$

enquanto os autovetores correspondentes são

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \rho/c \\ 1 \\ \rho c \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} \rho/c \\ -1 \\ \rho c \end{pmatrix}.$$

Podemos então construir a matriz G formada pelos autovetores de A e a matriz diagonal dos autovalores L, isto é,

$$G := \begin{pmatrix} 1 & \rho/c & \rho/c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \rho c & \rho c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L := \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v+c & 0 \\ 0 & 0 & v-c \end{pmatrix};$$

assim, vale

$$AG = GL$$

e podemos remanejar a equação (2.1.26) para a forma

$$G^{-1}\mathbf{u}_t + G^{-1}A\mathbf{u}_x = G^{-1}\mathbf{u}_t + LG^{-1}\mathbf{u}_x = 0, \tag{2.1.27}$$

onde

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\rho c} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\rho c} \end{pmatrix}.$$

Escrevendo explicitamente cada equação do sistema (2.1.27) obtemos

$$\begin{cases} \rho_t + v\rho_x - \dfrac{1}{c^2}p_t - \dfrac{v}{c^2}p_x = 0\,, \\ \dfrac{1}{2}v_t + \dfrac{1}{2}(v+c)v_x + \dfrac{1}{2\rho c}p_t + \dfrac{1}{2\rho c}(v+c)p_x = 0\,, \\ -\dfrac{1}{2}v_t - \dfrac{1}{2}(v-c)v_x + \dfrac{1}{2\rho c}p_t + \dfrac{1}{2\rho c}(v-c)p_x = 0, \end{cases}$$

que pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} (p_t - c^2\rho_t) + v(p_x - c^2\rho_x) = 0\,, \\ (p_t + \rho c v_t) + (v+c)(p_x + \rho c v_x) = 0\,, \\ (p_t - \rho c v_t) + (v-c)(p_x - \rho c v_x) = 0\,. \end{cases} \tag{2.1.28}$$

Se considerarmos uma curva na forma $\gamma_1(t) = (x_1(t), t)$ onde $x_1(t)$ satisfaz a equação diferencial $x_1'(t) = v(x_1(t), t)$, e se denotarmos por $\widehat{\rho}$, $\widehat{c}$, $\widehat{p}$, respectivamente, as composições de ρ, c e p com γ_1, então a primeira equação em (2.1.28) equivale a

$$\frac{d\widehat{p}}{dt} - \widehat{c}^2\frac{d\widehat{\rho}}{dt} = 0.$$

O mesmo pode ser feito com as duas equações seguintes, ao longo de curvas $\gamma_2(t)$ e $\gamma_3(t)$ definidas, respectivamente, pelas equações

$$x_2'(t) = [v+c](x_2(t), t) \qquad e \qquad x_3'(t) = [v-c](x_3(t), t).$$

Obtemos então a seguinte interpretação para o sistema (2.1.28):

$$\frac{dp}{dt} - c^2\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{nas curvas } P \text{ em que} \quad \frac{dx}{dt} = v\,, \tag{2.1.29}$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho c\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{nas curvas } C_+ \text{ em que} \quad \frac{dx}{dt} = v + c\,, \tag{2.1.30}$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho c\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{nas curvas } C_- \text{ em que} \quad \frac{dx}{dt} = v - c\,, \tag{2.1.31}$$

onde as funções ρ, p, v, c devem ser entendidas sempre como a composição da função de (x, t) com a curva indicada.

Observe-se que a primeira equação é equivalente a $\frac{dS}{dt} = 0$ e mais uma vez expressa a conservação da entropia ao longo das trajetórias das partículas. As curvas características C_+ e C_- são curvas que se movimentam com velocidade $\pm c$ relativamente à velocidade v do fluido. Elas representam "ondas sonoras", assim c é identificada com a velocidade do som, que agora, no caso não linear, não é mais uma constante mas depende das incógnitas ρ e p.

Consideraremos a partir de agora um escoamento isentrópico, isto é, no qual a entropia S é constante nas condições iniciais e logo, pela equação (2.1.29), torna-se constante em qualquer ponto (x, t); dessa forma, como já vimos na seção 2.1.1, a equação (2.1.29) pode ser substituída com a relação $p = P(\rho)$ e $c^2 = P'(\rho)$.

Substituindo esta relação nas equações (2.1.30-2.1.31) obtemos

$$\frac{d}{dt}P(\rho) \pm \rho c\frac{dv}{dt} = P'(\rho)\frac{d\rho}{dt} \pm \rho c\frac{dv}{dt} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{c(\rho)}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \pm \frac{dv}{dt} = 0,$$

que integrando e mudando de variável torna-se

$$\int \frac{c(\rho)d\rho}{\rho} \pm v = const \quad \text{ao longo de cada } C_{\pm}.$$

Estas quantidades, que são conservadas ao longo das curvas características C_+ e C_- são chamadas **invariantes de Riemann**.

Para o caso de um gás ideal, temos $p = P(\rho) = \mathtt{k}\rho^{\gamma}$, assim

$$c = \sqrt{P'(\rho)} = \sqrt{\mathtt{k}\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\int \frac{c(\rho)d\rho}{\rho} = \int \sqrt{\mathtt{k}\gamma}\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}d\rho = \frac{2\sqrt{\mathtt{k}\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma-1}c,$$

de forma que os invariantes são

$$\frac{2}{\gamma-1}c \pm v = const \quad \text{ao longo de cada } C_{\pm}. \tag{2.1.32}$$

2.1.4 Ondas simples produzidas pelo movimento de um pistão

Se, além de ser isentrópico, o movimento do fluido apresentar um dos invariantes de Riemann constante no plano (x, t) inteiro, a solução do nosso problema torna-se mais simples.

Ter um invariante constante implica que o movimento ondulatório se propaga numa única direção (ondas simples): no caso linearizado (2.1.20), é equivalente a termos uma das funções f ou g identicamente nula.

Estudaremos um modelo no qual se produz esse tipo de onda. Consideremos um pistão no final de um tubo de comprimento infinito, cheio de um gás ideal que se encontre no tempo $t = 0$ em repouso, na condição $v = 0$, $c = c_0$ e $S = S_0$ para todo $x \geq 0$, sendo o pistão localizado em $x = 0$ com velocidade nula no instante inicial, descrevendo uma trajetória $X(t)$ conhecida. Assumiremos que não haja ocorrência de choques, para podermos utilizar a formulação diferencial das equações e suas consequências deduzidas até aqui. Em particular, teremos $S = S_0$ em todo o campo de movimento.

Nosso objetivo é esboçar, no plano (x, t), as trajetórias P das partículas de gás e as características C_+ e C_-.

Uma vez que todas as partículas de gás estão inicialmente em $x \geq 0$, todas as curvas da família P têm origem no semieixo x positivo e, como já comentado, transportam o invariante $S = S_0$ em todo ponto da região do movimento, o que resulta num movimento isentrópico.

Podemos, dessa forma, usar (2.1.32) para as outras duas famílias de características.

Como o gás permanece à direita do pistão, assumiremos que as partículas mais à esquerda acompanhem o movimento do pistão, permanecendo em contato com ele. Assim, a própria trajetória $X(t)$ do pistão será uma característica da família P.

Por (2.1.31), a inclinação dx/dt das curvas C_- é sempre menor que a das curvas P; por isso, não existem C_- originadas no pistão: todas têm origem no eixo x, onde a condição inicial é $v = 0$, $c = c_0$, logo temos que o invariante de Riemann em cada C_- é

$$\frac{2c}{\gamma - 1} - v = \frac{2c_0}{\gamma - 1}. \tag{2.1.33}$$

Assim, (2.1.33) vale em todos os pontos da região do movimento: torna-se outro invariante global do movimento, assim como a entropia S_0.

Agora, vamos utilizar a outra equação característica, (2.1.30), para obter os detalhes que faltam da solução. As características C_+ devem ter origem no semieixo x positivo ou no pistão, já que a velocidade delas é $v + c$, logo viajam mais rápido que o pistão e assim entram na região de movimento. Para aquelas que se originam no semieixo x vale, de (2.1.32) e usando a condição inicial,

$$\frac{2c}{\gamma - 1} + v = \frac{2c_0}{\gamma - 1};$$

em conjunto com (2.1.33), obtemos $v = 0$ e $c = c_0$, isto é, o fluido continua mantendo a condição inicial em toda a região coberta pelas C_+ que têm origem no semieixo x. Em particular, estas C_+ têm velocidade $v + c = c_0$, logo são retas paralelas que cobrem a região $\{x \geq c_0 t\}$, e a solução para essa região é

$$v = 0, \quad c = c_0, \quad S = S_0.$$

Observe que é como se pontos à direita da reta $C_+^0 := \{x = c_0 t\}$ não "percebessem" que o pistão está em movimento.

Consideremos agora as curvas C_+ acima de C_+^0, isto é, aquelas que se originam no pistão: indicaremos por C_+^τ a característica que se origina do pistão no instante τ, logo do ponto $(X(\tau), \tau)$. Temos que ao longo de cada C_+^τ vale

$$\frac{2c}{\gamma - 1} + v = k(\tau),$$

onde indicamos por $k(\tau)$ o invariante de Riemann correspondente à curva.

Usando (2.1.33), podemos substituir $c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} v$ na equação acima, para obter

$$v = \frac{1}{2}\left(k(\tau) - \frac{2c_0}{\gamma - 1}\right) \qquad e \qquad c = \frac{1}{2}\left(c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} k(\tau)\right).$$

Observe que, embora os valores de v e c sejam diferentes entre uma característica e outra, dependendo de onde esta encontra a trajetória do pistão, eles são constantes ao longo de cada curva; além disso, como a velocidade é $v + c$, todas as C_+^τ serão retas. Este fato é consequência da constância do invariante de Riemann da família C_-, e caracteriza a situação chamada de "**ondas simples**".

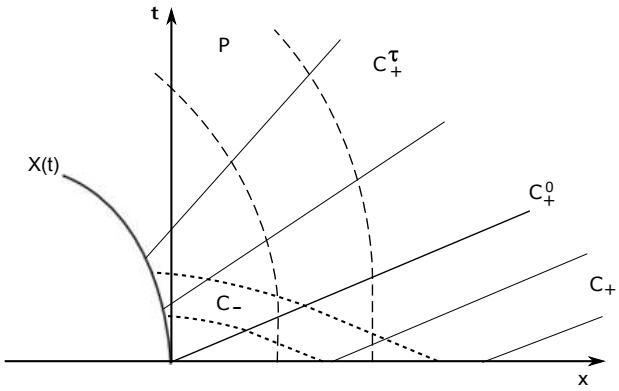

Figura 2.1: Características no problema do pistão.

Podemos, assim, fechar o problema impondo a condição de fronteira no pistão $v = \frac{1}{2}\left(k(\tau) - \frac{2c_0}{\gamma-1}\right) = X'(\tau)$, obtendo

$$k(\tau) = 2X'(\tau) + \frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Dessa forma, a solução para os pontos ao longo de cada C_+^τ é dada por

$$v = X'(\tau), \quad c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}X'(\tau), \quad S = S_0,$$

enquanto cada reta C_+^τ tem equação

$$x_\tau(t) = X(\tau) + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}X'(\tau)\right)(t - \tau). \tag{2.1.34}$$

Uma vez determinadas v e c em todo ponto, é possível traçar também as características C_- e P: elas serão retas na região uniforme $\{x \geq c_0 t\}$, tornando-se curvas acima da reta C_+^0.

Na figura 2.1, esboçamos o possível andamento das características das três famílias.

Para concluir, precisamos verificar a hipótese de que não haja formação de choques: como a velocidade das C_+^τ cresce com $X'(\tau)$, elas não se cruzarão desde que a velocidade do pistão seja não crescente, isto é, $X''(t) \leq 0$. Isto significa que o pistão, inicialmente parado, deverá acelerar para esquerda e nunca diminuir sua velocidade (expansão). Em caso contrário (compressão), as características, depois de um certo tempo, começariam a se cruzar e haveria necessariamente formação de choque.

Capítulo 3

Relatório 3

3.1 Gasdinâmica

3.1.1 Ondas de choque

Como observamos no relatório 2, ao estudar o problema do pistão na extremidade de um tubo infinito, se o movimento do pistão produzisse uma compressão, observaríamos o cruzamento de características do sistema considerado.

Essa situação, que já foi discutida no primeiro relatório para o caso escalar, levaria à não derivabilidade das quantidades envolvidas, deixando de valer a formulação diferencial do problema. Logo, uma onda de choque será formada.

Para estudar este caso, precisamos rever algumas das simplificações que fizemos, no sistema de Euler, para o caso de soluções regulares. De fato, na onda de choque as hipóteses simplificadoras

$$P = -pI_3, \quad \mathbf{q} = \vec{0}$$

(veja no relatório 1, seção 1.3.2) tornam-se inadequadas, uma vez que as forças viscosas e o fluxo de calor no choque não são desprezíveis, por causa dos saltos na velocidade e na temperatura. Além disso, veremos que a entropia das partículas não permanece constante quando elas atravessam o choque.

O que faremos agora será manter as hipóteses simplificadoras nas regiões regulares e ajustar entre elas descontinuidades que satisfaçam as condições de choque, que serão derivadas a seguir.

Para estudar as descontinuidades, a formulação diferencial usada até agora torna-se imprópria; retomaremos então a formulação integral das equações de movimento (veja no relatório 1, seção 1.3.1). Para o caso unidimensional, ainda desconsiderando forças de corpo, mas considerando o esforço p_{11} e o fluxo de calor q_1, temos:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho dx + [\rho v]_{x_2}^{x_1} = 0, \tag{3.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho v dx + [\rho v^2 - p_{11}]_{x_2}^{x_1} = 0, \tag{3.1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)dx+\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)v-p_{11}v+q_1\right]_{x_2}^{x_1}=0. \tag{3.1.3}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na dedução da relação de Rankine-Hugoniot (vide seção 1.2.4 do relatório 1), consideremos uma descontinuidade que se propague segundo a trajetória $x = s(t)$, com $x_1 > s(t) > x_2$; seja então $U = s'(t)$ a velocidade de propagação do choque; fazendo $x_2 \to s^-(t)$ e $x_1 \to s^+(t)$, obtemos as equações de salto, que relacionam a velocidade de propagação da onda de choque com os saltos nas quantidades envolvidas:

$$-U[\,\rho\,]+[\,\rho v\,]=0,$$

$$-U[\,\rho v\,]+[\,\rho v^2-p_{11}\,]=0,$$

$$-U\left[\,\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\,\right]+\left[\,\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)v-p_{11}v+q_1\,\right]=0.$$

Como as equações acima estabelecem uma relação entre as quantidades à direita e à esquerda do choque (regiões em que elas são regulares), podemos agora reintroduzir as hipóteses $p_{11} = -p$ e $q_1 = 0$, e assim chegamos ao sistema

$$-U[\,\rho\,]+[\,\rho v\,]=0, \tag{3.1.4}$$

$$-U[\,\rho v\,]+[\,\rho v^2+p\,]=0, \tag{3.1.5}$$

$$-U\left[\,\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\,\right]+\left[\,\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)v+pv\,\right]=0. \tag{3.1.6}$$

O sistema acima será usado para as descontinuidades, enquanto nas regiões regulares vale o sistema correspondente na formulação diferencial:

$$\rho_t+(\rho v)_x=0, \tag{3.1.7}$$

$$(\rho v)_t+(\rho v^2+p)_x=0, \tag{3.1.8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)_t+\left(\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)v+pv\right)_x=0. \tag{3.1.9}$$

Observamos que existe uma relação entre as equações (3.1.4)-(3.1.6) e as (3.1.7)-(3.1.9), no sentido que se a equação de salto está na forma $-U[\,F\,]+[\,G\,]=0$ então a correspondente equação diferencial é $F_t+G_x=0$. Isso, porém, não é sempre o caso, como veremos a seguir. Como já vimos no relatório 2, seção 2.1.1, das equações na forma diferencial acima podemos obter uma quarta equação envolvendo a entropia, que pode ser escrita na forma

$$(\rho S)_t+(\rho v S)_x=0;$$

procuremos agora a correspondente equação de salto.
No relatório 2 mostramos também que (3.1.9) pode ser reformulada como

$$\rho\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = 0;$$

se refizermos as contas não desprezando o fluxo de calor q_1 e considerando a tensão $p_{11} = -p+\delta_{11}$, onde p é a pressão termodinâmica ($p = \rho RT$) e δ_{11} é uma parcela relacionada aos efeitos viscosos, obteremos a equação

$$\rho\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \delta_{11}v_x - q_{1x}.$$

Como o termo da esquerda corresponde a $T\frac{D}{Dt}(\rho S) = T[(\rho S)_t + (\rho vS)_x]$ (veja ainda o relatório 2), chegamos à equação

$$(\rho S)_t + (\rho vS)_x = \frac{\delta_{11}v_x - q_{1x}}{T}. \tag{3.1.10}$$

Assim, a formulação integral será

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1} \rho S dx + [\rho vS]_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{\delta_{11}v_x - q_{1x}}{T} dx\,; \tag{3.1.11}$$

fazendo $x_2 \to s^-(t)$ e $x_1 \to s^+(t)$, não podemos mais afirmar que seu valor tenda a zero, pois a integral à direita depende das **derivadas** espaciais de v e q_1, que podem não ser limitadas se tiver um choque. Assim, mesmo que nas regiões regulares a entropia satisfaça a equação $(\rho S)_t + (\rho vS)_x = 0$, em um salto podemos ter

$$-U[\,\rho S\,] + [\,\rho vS\,] \neq 0.$$

Mais à frente mostraremos que, em presença de choque, vale sempre a desigualdade.

3.1.2 Reescrevendo as condições de choque

Visando entender melhor as informações que cada uma das equações do choque carregam, vamos começar por reescrever (3.1.4)-(3.1.6) em termos da velocidade da onda de choque em relação ao meio $w = U - v$. Observe-se que, tendo assumido que o estado 1 esteja à direita do choque e represente a região ainda não atravessada por ele, enquanto o estado 2 está à esquerda e representa a região já atravessada, temos necessariamente que $U > v_i$, logo $w_i > 0$, para $i = 1, 2$ (veja a figura 3.1).

Substituindo $v = U - w$ nas equações (3.1.4)-(3.1.6), o sistema torna-se

$$[\,\rho w\,] = 0,$$

$$[\,p + \rho w^2 - \rho wU\,] = 0,$$

$$\left[\left(\rho e + p + \frac{1}{2}\rho w^2\right)w - (p + \rho w^2)U + \frac{1}{2}\rho wU^2\right] = 0.$$

Podemos reduzir esse sistema através de combinações lineares das equações. Para a segunda, usamos a primeira:

$$[\, p + \rho w^2 - \rho w U \,] = [\, p + \rho w^2 \,] - U[\, \rho w \,] = [\, p + \rho w^2 \,] = 0;$$

para a terceira, usamos as outras duas:

$$\left[\left(\rho e + p + \frac{1}{2}\rho w^2 \right) w - (p + \rho w^2)U + \frac{1}{2}\rho w U^2 \right] = \\ \left[\left(\rho e + p + \frac{1}{2}\rho w^2 \right) w \right] - U[\, p + \rho w^2 \,] + \frac{1}{2}U^2[\, \rho w \,] = \\ \left[\left(\rho e + p + \frac{1}{2}\rho w^2 \right) w \right] = 0;$$

colocando ρ em evidência, obtemos

$$\left[\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}w^2 \right) \rho w \right] = 0;$$

nessa expressão podemos fazer a hipótese de que $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 \neq 0$ (no caso que sejam nulas, significa que $w_1 = w_2 = 0$, isto é, não há partículas passando de um lado para outro do choque, e então as condições de cada lado do choque se conservam independentemente). Neste caso, podemos cortar ρw na equação, restando apenas

$$\left[e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}w^2 \right] = 0.$$

A quantidade

$$e + \frac{p}{\rho} = h,$$

é chamada entalpia do gás; usando-a no lugar da energia, podemos reescrever o sistema que relaciona as variáveis antes (indexadas com 1) e depois da partícula ser atravessada pelo choque (indexadas com 2), como

$$\rho_2 w_2 = \rho_1 w_1, \tag{3.1.12}$$

$$p_2 + \rho_2 w_2^2 = p_1 + \rho_1 w_1^2, \tag{3.1.13}$$

$$h_2 + \frac{1}{2}w_2^2 = h_1 + \frac{1}{2}w_1^2. \tag{3.1.14}$$

Lembramos que, para um gás ideal, a quantidade h, bem como a quantidade c (que voltará a ser utilizada daqui por diante), são funções de p e ρ, dadas pelas expressões

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \qquad c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}. \tag{3.1.15}$$

Dessa forma, o sistema (3.1.12-3.1.14) envolve as três variáveis p, ρ e w apenas.

3.1.3 Resolvendo o sistema do choque

Um problema típico que aparece nas aplicações é quando conhecemos a velocidade de propagação do choque (U) e o estado do fluido ainda não atravessado pelo choque (ρ_1, p_1, w_1), e queremos determinar o estado do fluido depois de ser atingido pela frente de choque.

Outro tipo de problema ocorre quando conhecemos as quantidades de ambos os lados, e queremos determinar a velocidade de propagação do choque.

Para o caso em conhecemos U e o estado 1, é útil modificar a escritura das equações, introduzindo o parâmetro

$$M = \frac{w_1}{c_1} = \frac{U - v_1}{c_1},$$

que é o **número de Mach** do choque, relativo ao fluido ainda não atingido por ele; procuraremos então escrever todas as variações nas grandezas de interesse em função desse parâmetro.

Cálculo dos saltos através do choque

Seja $\kappa = \rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$. Somando $\rho_1 w_2$ aos dois membros de (3.1.12) obtemos

$$\rho_1(w_1 + w_2) = (\rho_1 + \rho_2)w_2;$$

dividindo por ρ_1 chegamos a

$$w_1 + w_2 = \kappa\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right). \tag{3.1.16}$$

Da equação (3.1.13), obtemos

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1^2 - \rho_2 w_2^2 = \kappa(w_1 - w_2),$$

logo

$$w_1 - w_2 = \frac{p_2 - p_1}{\kappa}. \tag{3.1.17}$$

Substituindo as expressões acima na equação (3.1.14) chegamos a

$$2(h_2 - h_1) = w_1^2 - w_2^2 = (w_1 + w_2)(w_1 - w_2) = \kappa\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{p_2 - p_1}{\kappa},$$

donde concluímos

$$2(h_2 - h_1) = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)(p_2 - p_1). \tag{3.1.18}$$

Usando a expressão da entalpia para o gás ideal, obtemos

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)(p_2 - p_1) = \frac{p_2}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2},$$

isto é,

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2}.$$

Renomeando a constante $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \mu$ e multiplicando ambos os membros da equação por ρ_2/p_1 temos

$$\mu\left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1,$$

finalmente, isolando p_2/p_1 obtemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\mu - \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \tag{3.1.19}$$

Voltando à equação (3.1.14), na forma

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = w_1^2 - w_2^2,$$

colocamos em evidência p_1/ρ_1,

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) = w_1^2 - w_2^2.$$

Usando $\gamma\frac{p_1}{\rho_1} = c_1^2$ e substituindo p_2/p_1 de (3.1.19), podemos chegar à expressão

$$w_2^2 = w_1^2 - \frac{2c_1^2}{\gamma-1}\left(\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\mu - \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right). \tag{3.1.20}$$

Enfim, na equação (3.1.13) dividida por ρ_1

$$\frac{p_1}{\rho_1} + w_1^2 = \frac{p_2}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1}w_2^2$$

substituímos w_2^2 da (3.1.20), obtendo

$$\frac{p_1}{\rho_1} + w_1^2 = \frac{p_2}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[w_1^2 - \frac{2c_1^2}{\gamma-1}\left(\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\mu - \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right)\right];$$

dividindo a equação acima por c_1^2 e aplicando as relações

$$\frac{p_1}{\rho_1 c_1^2} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{p_2}{\rho_1 c_1^2} = \frac{p_2}{p_1}\frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{w_1^2}{c_1^2} = M^2$$

e ainda e expressão (3.1.19) para p_2/p_1, chegamos a

$$\frac{1}{\gamma} + M^2 = \left[\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right]\frac{1}{\gamma} + \frac{\rho_2}{\rho_1}M^2 - \frac{2}{\gamma-1}\left[\frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right]. \tag{3.1.21}$$

A fim de obter ρ_2/ρ_1 em função de M^2, multiplicamos (3.1.21) pelo denominador e agrupamos os termos de mesmo grau em ρ_2/ρ_1, chegando à equação de segundo grau :

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} + M^2\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\gamma} + M^2\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + M^2\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 0. \tag{3.1.22}$$

O discriminante da equação é

$$\Delta = \left(\frac{2(M^2-1)}{\gamma-1}\right)^2 \geq 0$$

e as soluções são

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{\gamma M^2}{\gamma-1}\right) \pm \left(\frac{M^2}{\gamma-1}-\frac{1}{\gamma-1}\right)}{\frac{2}{\gamma-1}+M^2}. \tag{3.1.23}$$

A solução com o sinal negativo nos dá $\rho_2/\rho_1 = 1$, que é a solução trivial sem descontinuidade, pois se $\rho_1 = \rho_2$, então, por (3.1.12), também $w_1 = w_2$ e, por (3.1.13), $p_1 = p_2$.

A solução que nos interessa, portanto, é a solução com sinal positivo, isto é,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}. \tag{3.1.24}$$

A partir de (3.1.24) podemos obter facilmente, substituindo nas outras relações que já temos, as variações relativas das outras quantidades em função do número de Mach:

Usando (3.1.19) temos

$$\frac{p_2-p_1}{p_1} = \frac{2\gamma(M^2-1)}{\gamma+1}, \tag{3.1.25}$$

enquanto com (3.1.17) temos

$$\frac{w_1-w_2}{c_1} = \frac{v_2-v_1}{c_1} = \frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M}. \tag{3.1.26}$$

Também a relação entre c_2 e c_1 (e, logo, entre as temperaturas absolutas T_2 e T_1) pode ser obtida diretamente, pois

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2},$$

e as razões entre pressões e densidades já foram obtidas, assim

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\{2\gamma M^2-(\gamma-1)\}^{1/2}\{(\gamma-1)M^2+2\}^{1/2}}{(\gamma+1)M}. \tag{3.1.27}$$

Para o caso em que o estado 1 e p_2 são conhecidos, é interessante obtermos essas relações em função da **força do choque**

$$z := \frac{p_2-p_1}{p_1},$$

isto é, a variação relativa da pressão no fluido causada pela passagem da onda de choque. Para isso, basta substituir z na expressão (3.1.25), obtendo

$$M = \left(1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right)^{1/2}, \tag{3.1.28}$$

e substituir nas outras relações. Temos então

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\gamma+(\gamma+1)z}{2\gamma+(\gamma-1)z}, \tag{3.1.29}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{c_1} = \frac{z}{\gamma\left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right)^{1/2}}, \tag{3.1.30}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} = \left[(1+z)\left(\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.1.31}$$

Algumas propriedades dos choques

Das expressões obtidas acima, podemos notar algumas importantes propriedades dos choques.

A entropia no gás ideal é dada por $S = c_v \ln(p/\rho^\gamma)$; assim, o salto na entropia do gás após o choque é dado por

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln\left\{\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right\} = \ln\left[(1+z)\left(\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z}\right)^\gamma\right]. \tag{3.1.32}$$

Mostraremos agora que a função $(S_2 - S_1)(z)$ é estritamente crescente, para a partir desse fato tirar algumas importantes conclusões. Lembramos que, por definição, temos sempre $\gamma > 1$ e $z > -1$.

Calculemos então

$$\frac{d(S_2 - S_1)}{dz} = \frac{c_v}{1+z}\left(\frac{2\gamma + (\gamma+1)z}{2\gamma + (\gamma-1)z}\right)^\gamma$$
$$\left\{\left(\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z}\right)^\gamma + (1+z)\left[\gamma\left(\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z}\right)^{\gamma-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{(\gamma-1)(2\gamma + (\gamma+1)z) - (\gamma+1)(2\gamma + (\gamma-1)z)}{(2\gamma + (\gamma+1)z)^2}\right)\right]\right\}.$$

Os termos de fora das chaves são sempre positivos, basta observar que $2\gamma + (\gamma \pm 1)z > 0$ para $z > -1$, $\gamma > 1$.

Para o termo dentro das chaves, podemos colocar o termo positivo elevado a $(\gamma - 1)$ em evidência. Como o numerador da última fração se reduz a -4γ, obtemos

$$\left(\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z}\right)^{\gamma-1}\left[\frac{2\gamma + (\gamma-1)z}{2\gamma + (\gamma+1)z} - \frac{4\gamma^2(1+z)}{(2\gamma + (\gamma+1)z)^2}\right].$$

Finalmente, o termo dentro dos colchetes pode ser escrito como

$$\frac{(\gamma^2 - 1)z^2}{(2\gamma + (\gamma+1)z)^2}.$$

Assim, $d(S_2 - S_1)/dz$ é uma multiplicação de termos estritamente positivos com z^2, logo o sinal é o mesmo de z^2, que é sempre positivo, a menos do ponto $z = 0$, em que se anula. Concluímos que

a função $(S_2 - S_1)(z)$ é estritamente crescente para $z > -1$.

É fácil ver que, para $z = 0$, $S_2 - S_1 = 0$, e portanto a entropia se conserva. Mas como a função é estritamente crescente, sempre que tivermos $z \neq 0$, $S_2 \neq S_1$, isto é, a entropia salta no choque; em particular, $S_2 > S_1$ para $z > 0$ e $S_1 > S_2$ para $z < 0$. Pela segunda lei da termodinâmica, a entropia das partículas só pode aumentar ao longo de suas trajetórias. Dessa forma, quando uma partícula passa do lado 1 para o lado 2, devemos ter $S_2 > S_1$. Isso implica que o choque só pode existir com $z > 0$, isto é, com $p_2 > p_1$: **todo choque deve ser compressivo**. Analogamente, das relações (3.1.28)-(3.1.31) deduzimos o comportamento das outras quantidades ao atravessar o choque:

$$\rho_2 > \rho_1, \qquad c_2 > c_1, \qquad T_2 > T_1, \qquad w_1 > w_2, \qquad v_2 > v_1, \qquad M > 1. \tag{3.1.33}$$

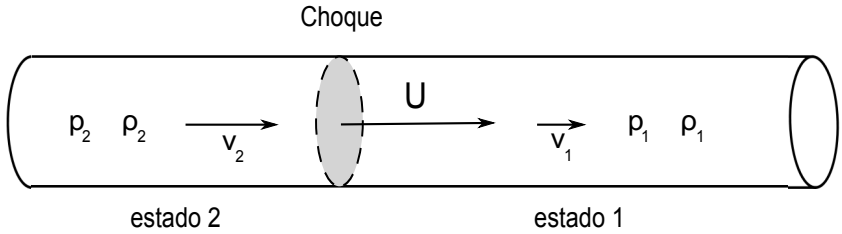

Figura 3.1: Esquema da propagação do choque no interior do tubo.

Observe que $z > 0$ também implica que a velocidade de propagação da onda sonora vista de um referencial estático, composição das velocidades do som e do meio, $\widetilde{c} = c + v$, deve ser tal que

$$\widetilde{c}_2 = c_2 + v_2 > U > c_1 + v_1 = \widetilde{c}_1,$$

ou, equivalentemente,

$$M_2 = \frac{U - v_2}{c_2} = \frac{w_2}{c_2} < 1, \qquad M_1 = \frac{U - v_1}{c_1} = \frac{w_1}{c_1} > 1,$$

isto é, o choque é supersônico visto da frente e subsônico visto de trás. A desigualdade da direta sai diretamente de (3.1.28) com $z > 0$, enquanto a da esquerda pode ser deduzida combinando (3.1.28), (3.1.30) e (3.1.31). Este fato é coerente com o que vimos no relatório 1: os choques acontecem apenas quando a velocidade das características (que veremos ser igual a $\widetilde{c} = c + v$) é tal que seja impossível uma solução na qual elas não cruzem.

3.1.4 Choques fracos

Vimos na seção anterior que o salto na entropia causado pela onda de choque depende de sua força conforme (3.1.32); por consequência, o escoamento atravessado por um choque de força não nula não será isentrópico, o que deixa bem mais difícil estudá-lo, já que, como vimos no relatório 2, a isentropicidade permite simplificar bastante o sistema da gasdinâmica, eliminando uma equação.

Além disso, para o problema do pistão, também o invariante de Riemann

$$k^- = \frac{2c}{\gamma - 1} - v,$$

terá um salto atravessando o choque, e logo não será, em geral, constante no campo de movimento. Lembramos que, na seção 2.1.4 do relatório 2, a invariância de k^- nos permitiu mostrar que as características C^+ são retas (ondas simples) e logo calcular a solução.

A solução por ondas simples, portanto, não será possível, a rigor, caso se forme uma onda de choque.

No entanto, observa-se que a solução por ondas simples é ainda uma boa aproximação para choques fracos. De fato, os saltos nas duas quantidades, entropia e invariante de Riemann, são pequenos em choques suficientemente fracos.

A fim de observar como as expressões dos saltos em (3.1.29)-(3.1.32) se comportam para z pequeno, podemos expandi-las em potências de z calculando seus polinômios de Taylor em torno de $z = 0$. Omitindo os cálculos, os desenvolvimentos são:

$$\begin{aligned}
\frac{v_2 - v_1}{c_1} &= \frac{1}{\gamma} z - \frac{\gamma + 1}{4\gamma^2} z^2 + \frac{3(\gamma+1)^2}{32\gamma^3} z^3 + O(z^4), \\
\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} &= \frac{1}{\gamma} z - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} z^2 + O(z^3), \\
\frac{c_2 - c_1}{c_1} &= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z - \frac{\gamma^2 - 1}{8\gamma^2} z^2 + O(z^3), \\
\frac{S_2 - S_1}{c_v} &= \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} z^3 + O(z^4), \\
\frac{k_2^- - k_1^-}{c_1} &= \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_2 - c_1}{c_1} - \frac{v_2 - v_1}{c_1} = \frac{1}{32} \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma^3} z^3 + O(z^4).
\end{aligned}$$

Observamos que, em geral, os saltos dependem de z em primeira ordem, mas nos saltos de S e k^- a dependência é da ordem de z^3. Assim, para choques fracos, os saltos de entropia e do invariante de Riemann permanecem muito pequenos.

Com base nesse fato, desprezar os saltos nessas duas quantidades parece uma aproximação bastante razoável para z relativamente pequeno.

3.1.5 Pistão com choque fraco

Nesta seção, retomaremos o problema do pistão, agora supondo que seu movimento seja tal que ele provoque uma compressão do ar no interior do tubo, e não uma expansão como foi estudado na seção 2.1.4 do relatório 2. Suporemos porém que o choque seja suficientemente fraco, para podermos aplicar algumas simplificações e usar ainda a técnica das ondas simples.

Vamos supor que o pistão se encontre em repouso em $t = 0$ e, a partir desse instante, seja acelerado no sentido positivo do eixo x. Dessa forma, se sua trajetória for descrita pela função suave $X(t)$, teremos $X(0) = X'(0) = 0$ e $X''(t) > 0$ para $t \geq 0$.

Para esse caso, podemos construir um desenho semelhante ao utilizado no caso expansivo, esboçando as características C_+ e C_-, ao longo das quais se conservam os respectivos invariantes de Riemann $k^\pm = \frac{2c}{\gamma-1} \pm v$, pelo menos até quando elas não atravessarem um choque; veja a figura 3.2.

O estudo realizado na última seção, no entanto, nos levou à conclusão de que, para choque fraco, é uma aproximação bastante satisfatória desprezar os saltos na entropia e no invariante k^-, de forma que, das condições iniciais do ar no interior do tubo, deduzimos que

$$S = S_0, \qquad k^- = \frac{2c}{\gamma - 1} - v = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \tag{3.1.34}$$

em todo o plano (x, t). A segunda equação acima pode ser reescrita, relacionando c com v, como

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} v.$$

Munidos dessas relações, juntamente à do invariante k^+, que se conserva nas C_+, poderemos, a menos do ajuste do choque, determinar o estado de cada ponto do plano.

Em particular, conforme vimos no relatório 2, teremos $v = 0$ e $c = c_0$ em toda a região na qual as três famílias de características têm origem no semieixo x, e ainda não atravessaram o choque (a região do campo de movimento à qual ainda não chegou a perturbação produzida pelo pistão).

Além disso, a invariância global de S e k^-, junto com a de k^+ em cada característica C_+, implica de novo que, enquanto elas não cruzem o choque, v e c são constantes ao longo destas características e logo elas são retas (ondas simples); de fato, temos

$$v = \frac{k^+}{2} - \frac{c_0}{\gamma - 1}, \qquad c = \frac{c_0}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} k^+,$$

logo $v + c$ (velocidade da característica C_+) depende apenas do invariante k^+, que pode ser obtido da condição de contorno ao pistão $v(X(t), t) = X'(t)$. Para cada instante τ denotaremos por $k^+(\tau)$ o invariante da C_+ que deixa o pistão no instante τ: desta maneira a equação da C_+ correspondente será

$$x = X(\tau) + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X'(\tau) \right) (t - \tau); \tag{3.1.35}$$

as contas são análogas às feitas no relatório 2.
A equação (3.1.35) nos dá implicitamente τ em função de (x, t) para toda a região na qual as características C^+ têm origem no pistão, e ainda não atravessaram o choque (a região do campo de movimento que já foi atingida pela perturbação produzida pelo pistão).

Observe-se que a inclinação das características é $c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(\tau)$: como a velocidade do pistão é crescente, haverá necessariamente cruzamento destas retas, justificando a necessidade de formação de um choque. (ver figura 3.2).

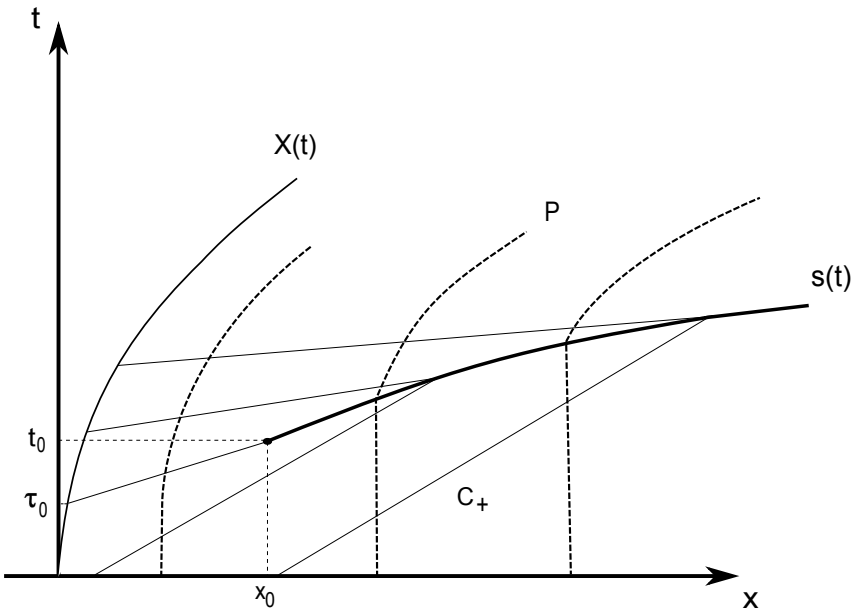

Figura 3.2: Choque produzido pelo movimento do pistão.

O problema agora é determinar a trajetória do choque, que será dada pela equação $x = s(t)$, sendo s uma função incógnita. Procuraremos uma equação diferencial e uma oportuna condição inicial para determinar $s(t)$.

Aproximaremos a velocidade do choque U como a média das velocidades das características que entram nele.

Mostremos primeiro que esta é uma aproximação satisfatória para o choque fraco. De fato, indexando com 1 as quantidades da região ainda não atravessada pelo choque e com 2 as da região já atravessada, temos

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(C_+)_i} = c_i + v_i = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}v_i, \qquad i = 1, 2;$$

assim a aproximação para U será

$$U = s'(t) = \frac{1}{2}(c_1 + v_1 + c_2 + v_2) = c_0 + \frac{\gamma+1}{4}(v_1 + v_2). \tag{3.1.36}$$

Da equação (3.1.28) obtemos a expansão de Taylor,

$$M = \frac{U - v_1}{c_1} = 1 + \frac{\gamma+1}{4\gamma}z - \frac{(\gamma+1)^2}{32\gamma^2}z^2 + O(z^3); \tag{3.1.37}$$

por outro lado, para U conforme (3.1.36), temos

$$\frac{U - v_1}{c_1} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2 - c_1}{c_1} + \frac{v_2 - v_1}{c_1}\right) :$$

subtraindo as respectivas relações obtidas na seção anterior, obtemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_2-c_1}{c_1}+\frac{v_2-v_1}{c_1}\right)=\frac{\gamma+1}{4\gamma}z-\frac{(\gamma+1)^2}{16\gamma^2}z^2+O(z^3). \tag{3.1.38}$$

Comparando (3.1.37) e (3.1.38), observamos que a diferença se dá apenas nos termos de segunda ordem, de forma que, para z pequeno, a aproximação (3.1.36) é razoável.

No caso que estamos considerando, $v_1=0$, e $v_2=X'(\tau)$ sendo τ o parâmetro que identifica a característica que que entra no choque no ponto $(s(t),t)$, logo obtemos a equação diferencial para s

$$s'(t)=c_0+\frac{\gamma+1}{4}X'(\widetilde{\tau}(t)), \tag{3.1.39}$$

sendo $\widetilde{\tau}(t)$ dada implicitamente (em função de $s(t)$) por

$$s(t)=X(\widetilde{\tau})+\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}X'(\widetilde{\tau})\right)(t-\widetilde{\tau}). \tag{3.1.40}$$

Para resolver o problema ainda precisamos de uma condição inicial para (3.1.39, 3.1.40). Precisamos então descobrir em qual ponto a solução regular não pode mais existir.
Lembre que de (3.1.35) podíamos obter implicitamente a função $\tau(x,t)$ que indica qual característica C_+ passa pelo ponto (x,t); logo podemos identificar o cruzamento das características pela explosão das derivadas de τ. Definamos então

$$F(\xi,\theta,\Omega)=X(\Omega)+\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}X'(\Omega)\right)(\theta-\Omega)-\xi, \tag{3.1.41}$$

de maneira que (3.1.35) se torna equivalente a

$$F(x,t,\tau(x,t))=0. \tag{3.1.42}$$

Para calcular $\tau_x(x,t)$, derivamos (3.1.42) na direção x:

$$0=F(x,t,\tau(x,t))_x=F_\xi(x,t,\tau(x,t))+F_\Omega(x,t,\tau(x,t))\,\tau_x(x,t).$$

Logo

$$\tau_x(x,t)=-\frac{F_\xi}{F_\Omega}(x,t,\tau(x,t)), \tag{3.1.43}$$

onde

$$F_\xi(x,t,\tau)=-1,$$
$$F_\Omega(x,t,\tau)=X'(\tau)+\frac{\gamma+1}{2}X''(\tau)(t-\tau)-\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}X'(\tau)\right).$$

Podemos ver que para $t-\tau$ pequeno (quando a característica acaba de sair do pistão) o denominador de (3.1.43) é próximo do valor negativo
$\left[-\left(c_0+\frac{\gamma-1}{2}X'(\tau)\right)\right]$; como $X''>0$, no instante

$$t_s(\tau)=\tau+\frac{c_0+\frac{\gamma-1}{2}X'(\tau)}{\frac{\gamma+1}{2}X''(\tau)}$$

o denominador tende a zero e a derivada τ_x diverge: a este instante as características que saem perto do ponto $(X(\tau), \tau)$ cruzariam, a menos que já tenham atravessado um choque proveniente de outro ponto.

Logo, o instante t_0 no qual o choque começa a formar-se será o menor $t_s(\tau)$:

$$t_0 = \min_{\tau \geq 0} t_s(\tau) = t_s(\tau_0),$$

enquanto o ponto onde o choque começa será obtido de (3.1.35) com $\tau = \tau_0$ e $t = t_0$.

Como exemplo, consideremos o caso simples em que a trajetória do pistão é a parabola $X(t) = t^2$. A expressão para t_s é

$$t_s = \tau + \frac{c_0 + (\gamma - 1)\tau}{\gamma + 1},$$

logo $t_0 = \frac{c_0}{\gamma+1}$, $\tau_0 = 0$ e $x_0 = c_0 t_0$.

Como a resolução de (3.1.39-3.1.40) é muito complicada analiticamente, faremos ulteriores simplificações que nos permitirão obter a função $\widetilde{\tau}(t)$: suporemos que

i) a velocidade com que o pistão se movimenta é muito inferior à do som, i.e., $X'(\tau) \ll c_0$ e $X(\tau) \ll c_0\tau$;

ii) a característica encontra o choque num instante t muito superior ao instante τ em que sai do pistão, i.e., $t \gg \tau$.

Essas duas hipóteses permitem simplificar a equação (3.1.40). Começamos por dividi-la por $c_0\tau$ e reagrupar os termos de forma conveniente:

$$\frac{s(t)}{c_0\tau} = \frac{X(\tau)}{c_0\tau} + \frac{t}{\tau} - 1 + \frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{X'(\tau)t}{c_0\tau} - \frac{X'(\tau)}{c_0}\right);$$

observando que $X(\tau)/(c_0\tau) \sim 0$ e $X'(\tau)/c_0 \sim 0$, desprezamos esses termos e obtemos a expressão simplificada

$$s(t) = \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}X'(\tau)\right)t - c_0\tau \tag{3.1.44}$$

como boa aproximação para (3.1.40).

Agora usamos (3.1.44) para definir implicitamente a função $\widetilde{\tau}(t)$; derivando a expressão acima com respeito a t, obtemos

$$s'(t) = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}X'(\widetilde{\tau}(t)) + \left(\frac{\gamma+1}{2}X''(\widetilde{\tau}(t))t - c_0\right)\widetilde{\tau}'(t). \tag{3.1.45}$$

Comparando a expressão acima com (3.1.39), concluímos que

$$\frac{\gamma+1}{4c_0}X'(\widetilde{\tau}(t)) + \frac{\gamma+1}{2c_0}X''(\widetilde{\tau}(t))t\widetilde{\tau}'(t) = \widetilde{\tau}'(t).$$

Multiplicando esta última equação por $X'(\widetilde{\tau}(t))$ e integrando na variável t entre t_0 e t, obtemos uma relação entre $\widetilde{\tau}$ e t, que não envolve mais $s(t)$:

$$\frac{\gamma+1}{4c_0}[X'(\widetilde{\tau}(t))^2 t - X'(\tau_0)^2 t_0] = \int_{\tau_0}^{\widetilde{\tau}(t)} X'(\eta) d\eta. \tag{3.1.46}$$

A solução pode ser terminada obtendo $\widetilde{\tau}(t)$ de (3.1.46) e substituindo em (3.1.44) para obter $s(t)$.

A solução poderá então ser representada no plano (x, t), desenhando a trajetória do choque e sendo que vale a solução por ondas simples dos dois lados do choque. É interessante notar que, ao atravessar o choque, a velocidade v da partícula salta de $v = 0$ para $v = X'(\tau)$ da C_+ que sai do pistão e termina no choque - vide figura 3.2.

Capítulo 4

Relatório 4

4.1 Métodos numéricos para problemas lineares

Uma vez tendo já estudado parte da teoria de equações de conservação não lineares, queremos agora obter métodos numéricos que aproximem de forma precisa os problemas considerados. Em vias de introduzir a notação que será adotada daqui por diante, bem como alguns conceitos e teoremas que nos serão úteis à frente, vamos dedicar essa seção ao estudo do caso linear do nosso problema.

4.1.1 Métodos de diferenças finitas

Nesta seção, estudaremos o problema de aproximar via diferenças finitas o problema linear a coeficientes constantes (conhecido como equação escalar da advecção)

$$\begin{aligned} &u_t + au_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

com a constante.

Para aplicar métodos de diferenças finitas e aproximar a solução $u(x,t)$ da equação (4.1.1), precisamos inicialmente discretizar o semiplano

$$\Pi = \{(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}\,.$$

Construímos então uma malha uniforme com passo espacial $\Delta x = h$ e passo temporal $\Delta t = k$. Dessa forma, sendo

$$\begin{aligned} X &= \{x_j = jh, j = ..., -1, 0, 1, ...\} \\ \Theta &= \{t_n = nk, n = 0, 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

definamos a função, candidata a aproximar a solução de (4.1.1),

$$U : X \times \Theta \to \mathbb{R} : (x_j, t_n) \mapsto U_j^n\,.$$

Indicaremos também por

$$U^n := (U_j^n,\ j = ..., -1, 0, 1, ...) \tag{4.1.2}$$

o vetor (de dimensão infinita) contendo os valores de U no instante t_n.

Podemos definir ainda pontos intermediários dados por

$$x_{j\pm 1/2} = jh \pm \frac{h}{2}.$$

Os métodos de diferenças que vamos desenvolver produzirão os valores $\{U_j^n\}$, com o objetivo de aproximar os valores da solução exata de (4.1.1) calculada nos respectivos pontos da malha, isto é, os valores $\{u_j^n := u(x_j, t_n)\}$.

Às vezes, porém, será melhor ter como objetivo aproximar a média de $u(x, t_n)$ no intervalo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ em vez do valor pontual $u(x_j, t_n)$: definamos então

$$\overline{u}_j^n = \frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n)dx. \tag{4.1.3}$$

Essa interpretação pode ser mais apropriada já que as equações de conservação na forma integral descrevem a variação temporal de integrais semelhantes à que aparece em (4.1.3).

Também nos será útil tomar uma função $\mathcal{U}(x, t)$, definida por partes para todo ponto do semiplano Π a partir dos valores discretos U_j^n:

$$\mathcal{U}(x, t) = U_j^n, \quad \text{para } (x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times [t_n, t_{n+1}). \tag{4.1.4}$$

Para começar o calculo da solução aproximada U, utilizamos a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ para definir U^0. Conforme descrito acima, podemos utilizar o valor da u no ponto, pondo $U_j^0 = u_j^0$, ou ainda o valor médio, isto é, $U_j^0 = \overline{u}_j^0$.

Utilizaremos, agora, um método de avanço temporal para construir U^{n+1} a partir de U^n, U^{n-1}, ..., U^{n-r} (método explícito de $(r + 2)$ níveis). Consideraremos aqui quase exclusivamente métodos explícitos de 2 níveis, assim podemos introduzir uma notação específica

$$U^{n+1} = H(U^n), \tag{4.1.5}$$

onde H é um operador que atua sobre U^n. Para U_j^{n+1}, escrevemos, alternativamente,

$$U_j^{n+1} = \widetilde{H}(U^n; x_j), \tag{4.1.6}$$

em vias de especificar que cada entrada U_j^{n+1} de U^{n+1} depende de várias entradas de U^n.

Podemos ainda definir um operador $\mathcal{H}$ que atua sobre uma uma função $v(x)$, aplicando o método de diferenças aos valores pontuais de v, em cada ponto x.

Assim, o análogo da expressão (4.1.6) é dado por

$$\mathcal{U}(x, t + k) = \mathcal{H}(\mathcal{U}(\cdot, t); x). \tag{4.1.7}$$

Apresentando alguns métodos

Descrevemos aqui três métodos de dois níveis que serão usados nos exemplos a seguir.

Comecemos pelo método de **Lax-Friedrichs**, cuja equação de diferenças é dada por:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \tag{4.1.8}$$

A ideia atrás desse método é de discretizar a equação (4.1.1), aproximando u_t por diferenças progressivas no tempo e u_x por diferenças centradas espaciais,

$$\frac{1}{k}(U_j^{n+1} - U_j^n) + \frac{a}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) = 0,$$

substituindo, em seguida, U_j^n por $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$, de maneira que U_j^{n+1} dependa apenas do valor de U no instante t_n nos dois pontos x_{j-1} e x_{j+1}.

As notações introduzidas anteriormente, para este método, tornam-se então

$$\widetilde{H}(U^n; x_j) = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ah}{2k}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n), \tag{4.1.9}$$

$$\mathcal{H}(\mathcal{U}(\cdot,t); x) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}(x-h,t) + \mathcal{U}(x+h,t)) - \frac{ah}{2k}(\mathcal{U}(x+h,t) - \mathcal{U}(x-h,t)) \tag{4.1.10}$$

Outro método, chamado **Upwind**, é baseado na ideia de aproximar a derivada temporal usando os pontos (x_j, t_{n+1}) e (x_j, t_n), e a derivada espacial usando ainda o ponto (x_j, t_n) junto com o ponto imediatamente à direita ou à esquerda dele, dependendo do sinal do coeficiente a em (4.1.1):

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n), \qquad \text{se} \quad a \geq 0, \tag{4.1.11}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}(U_{j+1}^n - U_j^n), \qquad \text{se} \quad a \leq 0. \tag{4.1.12}$$

O nome do método, que podemos traduzir com "vento acima", deve-se ao fato de que a aproximação da derivada u_x é feita sempre do lado do qual "provém" o sinal transportado pela equação de advecção. Veremos posteriormente a motivação para esta escolha.

O terceiro e último método que introduziremos nesta seção é o método de **Lax-Wendroff**: a ideia aqui é de melhorar a aproximação, usando três pontos no tempo t_n e uma expansão em polinômio de Taylor:

$$u(x, t+k) = u(x,t) + ku_t(x,t) + \frac{1}{2}k^2 u_{tt}(x,t) + O(k^3); \tag{4.1.13}$$

como $u_t = -au_x$ por (4.1.1), obtemos

$$u_{tt} = -au_{xt} = -au_{tx} = a^2 u_{xx}; \tag{4.1.14}$$

substituindo em (4.1.13) e desprezando os termos de ordem maior que 2, obtemos

$$u(x, t+k) = u(x,t) - kau_x(x,t) + \frac{1}{2}k^2 a^2 u_{xx}(x,t);$$

nesta fórmula aproximamos u_x e u_{xx} usando os três pontos x_{j-1}, x_j, x_{j+1} e obtemos o método

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{ak}{h}\right)^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n). \tag{4.1.15}$$

Restrição do domínio e condições de fronteira

Na prática, devendo implementar um método num computador, precisamos ter um número finito de incógnitas; para isso, restringiremos o problema a um intervalo espacial finito e deveremos pôr oportunas condições de fronteira nos extremos deste intervalo, que nos dêem uma fórmula alternativa para U_j^{n+1} nos casos que a equação do método envolveria pontos fora do intervalo considerado.

Para problemas com condições iniciais periódicas, podemos esperar soluções com a mesma periodicidade T e então resolver apenas num período e aplicar condições de periodicidade nos extremos. Isso significa que quando aparecer na equação para U_j^{n+1} um ponto fora do intervalo, podemos substituí-lo com o correspondente ponto do intervalo posto a distância T.

Outro caso interessante ocorre quando a condição inicial é constante para valores grandes de $|x|$. Podemos então fixar um intervalo I com extremos onde a condição inicial é constante, e então a solução também será constante perto da fronteira de I pelo menos até um certo tempo T. Aplicando o método em I, podemos agora usar o valor destas constantes no lugar do valor da incógnita nos pontos que não estão no intervalo. Cabe observar que, neste caso, a solução calculada estará aproximando a exata apenas até o tempo em que a exata permanece constante na vizinhança dos extremos: depois deste tempo a condição de fronteira imposta fará o método convergir a uma solução diferente.

Uma vez que o problema esteja restrito a um domínio espacial finito, o vetor U^n definido em (4.1.2) passa a ter um número finito de elementos. Dessa forma, se H é um operador linear, a equação (4.1.5) pode ser escrita na forma de produto de uma matriz quadrada $H_{h,k}$ pelo vetor U^n:

$$U^{n+1} = H_{h,k}U^n, \tag{4.1.16}$$

sendo que a matriz, de ordem igual ao número de pontos na discretização espacial, conterá apenas coeficientes numéricos que dependem de h, k.

Escrevemos a seguir as matrizes $H_{h,k}$ para os métodos apresentados, para uma discretização do intervalo $[a, b]$ feita por $N + 1$ pontos igualmente espaçados (passo h), sendo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$.

Caso 1) Consideremos o caso em que nossa solução é $(b-a)$-periódica, assim $u(a+jh, t_n) = u(b + jh, t_n)$ e o número de incógnitas é apenas N pois $u(x_0, t_n) = u(x_N, t_n)$.

Escrevendo o vetor

$$U^n = \begin{bmatrix} U_0^n & U_1^n & \ldots & U_{N-2}^n & U_{N-1}^n \end{bmatrix}^t,$$

e usando a condição de periodicidade $U_j^n = U_{N+j}^n$ quando apareçam pontos de fora da malha ao aplicar as fórmulas de diferenças, as matrizes para cada um dos três métodos discutidos são:

- Lax-Friedrichs

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & & 0 & 1+\frac{ak}{h} \\ 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} \\ 1-\frac{ak}{h} & \cdots & & & & 1+\frac{ak}{h} & 0 \end{bmatrix},$$

- Upwind (com $a > 0$)

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{ak}{h} & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{ak}{h} \\ \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h}, \end{bmatrix}$$

- Lax-Wendroff

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} \\ \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} \\ -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} \end{bmatrix}.$$

Caso 2) Consideremos agora o caso no qual o valor de u para pontos à esquerda de a e à direita de b permanece inalterado no decorrer do tempo. Dessa forma, fazendo

$$U^n = \begin{bmatrix} U_0^n & U_1^n & \dots & U_{N-2}^n & U_{N-1}^n & U_N^n \end{bmatrix}^t,$$

impomos a condição $U_j^n = U_0^n$ se $j < 0$ e $U_j^n = U_N^n$ se $j > N$ na fórmula de diferenças, obtendo as matrizes

- Lax-Friedrichs

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1+\frac{ak}{h} & 0 & 1-\frac{ak}{h} \\ 0 & \cdots & & & & 1+\frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} \end{bmatrix},$$

- Upwind (com $a > 0$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 & \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h} & 1-\frac{ak}{h} \end{bmatrix},$$

- Lax-Wendroff

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2+\frac{ak}{h}-\frac{a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{2a^2k^2}{h^2} & -\frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \frac{ak}{h}+\frac{a^2k^2}{h^2} & 2-\frac{ak}{h}-\frac{a^2k^2}{h^2} \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Erro global e convergência

Ao analisarmos as propriedades de um método, estamos interessados em saber quão bem U_j^n aproxima a solução real de (4.1.1); em particular, queremos estudar se e como a solução aproximada converge à exata quando os passos h, k da malha tendem a zero. Faremos porém a hipótese de variar h e k sempre mantendo constante a razão k/h; desta forma podemos usar apenas o parâmetro k para indicar o passo de malha considerado. Incluiremos o índice k na notação introduzida na seção anterior para diferenciar as quantidades relativas a diferentes malhas.

Definimos o **erro global** como a diferença entre a solução obtida numericamente e a solução real. No estudo de soluções suaves, é mais interessante utilizar o erro pontual

$$E_j^n = U_j^n - u_j^n,$$

enquanto para equações de conservação, às vezes é preferível considerar o erro relativo à média da solução real no intervalo

$$\overline{E}_j^n = U_j^n - \overline{u}_j^n.$$

A partir da função $\mathcal{U}_k(x,t)$, podemos também definir uma função erro $\mathcal{E}_k(x,t)$, dada por

$$\mathcal{E}_k(x,t) = \mathcal{U}_k(x,t) - u(x,t).$$

Com essas definições, fixada uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}$, dizemos que um método é convergente se

$$\|\mathcal{E}_k(\cdot,t)\| \to 0 \quad \text{quando } k \to 0, \tag{4.1.17}$$

para todo $t \geq 0$, e qualquer condição inicial $u_0(x)$ pertencente a uma dada classe de interesse.

4.1.3 Erro de truncamento local e consistência

Para estudar a convergência do método, introduzimos uma outra medida do erro, à qual damos o nome de **erro de truncamento local**; ela está relacionada a quão bem a equação de diferenças aproxima, localmente, a equação diferencial: é definida substituindo a solução exata $u(x,t)$ no método de diferenças finitas e avaliando o erro cometido.

Para um método de diferenças de 2 níveis, o erro de truncamento local pode ser escrito como

$$L_k(x,t) = \frac{1}{k}[u(x,t+k) - \mathcal{H}_k(u(\cdot,t)\,,x)]. \tag{4.1.18}$$

Um método é dito **consistente** se

$$\|L_k(\cdot,t)\| \to 0 \quad \text{quando } k \to 0. \tag{4.1.19}$$

Ainda, um método é de **ordem** p quando

$$L_k(x,t) = O(k^p).$$

Lax-Friedrichs

Tomemos como exemplo o método de Lax-Friedrichs: neste caso o erro de truncamento L_k no ponto (x,t) é

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - \frac{1}{2}(u(x-h,t) + u(x+h,t))\right] \\ &\quad + \frac{a}{2h}[u(x+h,t) - u(x-h,t)]. \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Assumindo que a função $u(x,t)$ seja de classe C^∞, podemos aproximar cada termo de (4.1.20) com o polinômio de Taylor de u em torno de (x,t) (para não sobrecarregar a notação, leia-se $u \equiv u(x,t)$). Assim

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{1}{k}\left[(u + ku_t + \frac{1}{2}k^2u_{tt}) - (u + \frac{1}{2}h^2u_{xx})\right. \\ &\quad \left. + \frac{ak}{2h}[2hu_x + \frac{1}{3}h^3u_{xxx}] + O(k^3)\right] \\ &= u_t + au_x + \frac{k}{2}\left(u_{tt} - \frac{h^2}{k^2}u_{xx}\right) + O(k^2). \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Como u é solução exata de (4.1.1), o termo $u_t + au_x$ é zero. Também podemos substituir o termo u_{tt} por termos na derivada espacial usando (4.1.14).

Assim, o erro de truncamento local se reduz a

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{k}{2}\left(a^2 - \frac{h^2}{k^2}\right) u_{xx}(x,t) + O(k^2) \\ &= O(k), \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

uma vez que fixamos a razão de malha k/h.

Dessa forma, vemos que o erro de truncamento do método de Lax-Friedrichs é da ordem de k.

Observe que, portanto, o método de Lax-Friedrichs é consistente e tem ordem 1, pelo menos para soluções regulares com $\|u_{xx}\|$ finita .

Lax-Wendroff e Upwind

Os cálculos da consistência e da ordem dos outros métodos aqui citados podem ser desenvolvidos de maneira análoga. Para o método de Lax-Wendroff, obtemos

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{ak^2}{6}\left(\frac{h^2}{k^2} - a^2\right) u_{xxx}(x,t) + O(k^3) \\ &= O(k^2). \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Assim, o método de Lax-Wendroff não só é consistente, como é de ordem 2, supondo a solução suficientemente regular, e portanto apresenta erro de truncamento local que, ao refinar a malha, tende a zero mais rapidamente do que no caso do método de Lax-Friedrichs.

No caso do método Upwind (com $a \geq 0$), obtemos

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \frac{ak}{2}\left(a - \frac{h}{k}\right) u_{xx}(x,t) + O(k^2) \\ &= O(k). \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Dessa forma, o método Upwind é consistente e tem ordem 1, como o método de Lax-Friedrichs.

Para soluções suaves como as aqui admitidas, consistência é condição necessária para convergência; mas veremos nas próximas seções que não é suficiente, fazendo-se necessárias mais algumas exigências para garantir convergência do método.

4.1.4 Estabilidade (de métodos lineares)

Tentaremos agora relacionar o erro de truncamento local com o erro global anteriormente descrito.

Comecemos reescrevendo (4.1.18) na forma

$$u(x, t+k) = \mathcal{H}_k(u(\cdot,t); x) + kL_k(x,t). \tag{4.1.25}$$

Então, sendo nosso método definido por

$$\mathcal{U}_k(x, t+k) = \mathcal{H}_k(\mathcal{U}_k(\cdot, t); x), \tag{4.1.26}$$

se fizermos a hipótese que o operador $\mathcal{H}_k$ é **linear**, como nos exemplos que estamos considerando, ao subtrairmos as duas equações obtemos a seguinte relação que rege a evolução do erro global em função do erro de truncamento local:

$$\mathcal{E}_k(x, t+k) = \mathcal{H}_k(\mathcal{E}_k(\cdot, t); x) - kL_k(x, t). \tag{4.1.27}$$

O erro absoluto no instante $t + k$ é então composto por duas partes: uma delas é o erro local introduzido no último passo, $-kL_k(x, t)$, e a outra, $\mathcal{H}_k(\mathcal{E}_k(\cdot, t); x)$, é devida ao erro acumulado nos passos anteriores.

Escrevendo as relações (4.1.27) em cada passo

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}_k(x, t_n) = \mathcal{H}_k(\mathcal{E}_k(\cdot, t_{n-1}); x) - kL_k(x, t_{n-1}), \\
\mathcal{E}_k(x, t_{n-1}) = \mathcal{H}_k(\mathcal{E}_k(\cdot, t_{n-2}); x) - kL_k(x, t_{n-2}), \\
\vdots \\
\mathcal{E}_k(x, t_1) = \mathcal{H}_k(\mathcal{E}_k(\cdot, 0); x) - kL_k(x, 0),
\end{gathered}$$

podemos substituir sucessivamente uma na outra, obtendo a seguinte expressão para o erro absoluto num instante t_n:

$$\mathcal{E}_k(x, t_n) = \mathcal{H}_k^n(\mathcal{E}_k(\cdot, 0); x) - k\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_k^{n-i} L_k(x, t_{i-1}), \tag{4.1.28}$$

onde $\mathcal{H}_k^p$ representa a p-ésima iterada do operador linear $\mathcal{H}_k$ (que vimos que pode ser representado por uma matriz quando restringimos o domínio espacial).

Dessa forma, para que o erro global se mantenha controlado à medida que refinamos a malha, precisamos garantir que os erros de truncamento locais $L_k(\cdot, t_i) : i = 0, \dots, n-1$ e o erro inicial $\mathcal{E}_k(\cdot, 0) = 0$ não sejam excessivamente amplificados quando aplicamos várias iterações do operador $\mathcal{H}_k$.

Para garantirmos isso, definimos um método linear como **estável**, se, fixado um tempo T, existirem uma constante C_e e um valor $k_0 > 0$ tais que

$$\|\mathcal{H}_k^n\| \leq C_e, \quad \text{para todo} \quad k < k_0, \quad nk \leq T. \tag{4.1.29}$$

Uma simples condição suficiente para estabilidade é $\|\mathcal{H}_k\| \leq 1$, visto que isso implica $\|\mathcal{H}_k^n\| \leq \|\mathcal{H}_k\|^n \leq 1$, para quaisquer n e k. Esta condição porém não é necessária: pode ser substituída, por exemplo, pela condição mais fraca

$$\|\mathcal{H}_k\| \leq 1 + \alpha k \quad \text{para} \quad k < k_0, \tag{4.1.30}$$

com $\alpha > 0$. De fato, isso implica que

$$\|\mathcal{H}_k^n\| \leq (1+\alpha k)^n;$$

lembrando que, da expansão em polinômio de Taylor com resto de Lagrange, $e^{\alpha k} \geq 1 + \alpha k$, concluímos que

$$\|\mathcal{H}_k^n\| \leq e^{\alpha k n} \leq e^{\alpha T} \tag{4.1.31}$$

para todo $k < k_0$, $nk \leq T$. Portanto (4.1.30) também implica na condição de estabilidade (4.1.29).

4.1.5 Teorema de Equivalência de Lax

O teorema de equivalência de Lax é um resultado fundamental no estudo de convergência de métodos lineares, e afirma que "*para um método linear consistente, estabilidade é condição necessária e suficiente para convergência*".

Foge aos nossos objetivos provar este teorema, mas podemos verificar ao menos a suficiência. De fato, usando (4.1.28) e (4.1.29) obtemos, para todo $t = nk \leq T$ e todo $k < k_0$,

$$\|\mathcal{E}_k(\cdot,t)\| \leq C_e\|\mathcal{E}_k(\cdot,0)\| + T\,C_e \max_{i\leq T/k} \|L_k(\cdot,t_i),\|\,, \tag{4.1.32}$$

assim, como o erro inicial tende a zero quando $h \to 0$ e o erro de truncamento local tende a zero quando $k \to 0$ graças à hipótese de consistência, ambas as parcelas tendem a zero ao refinar a malha.

Algumas restrições de estabilidade

Discutiremos nesta seção a estabilidade de alguns métodos estudados: mostraremos que esses métodos são estáveis para h e k tais que

$$\left|\frac{ak}{h}\right| \leq 1, \tag{4.1.33}$$

condição que chamamos "restrição de estabilidade"dos métodos.

Nessas demonstrações, usaremos a condição acima para concluir que $\|U^{n+1}\| \leq \|U^n\|$, e portanto $\|\mathcal{H}_k\| \leq 1$, que garante estabilidade.

Considerando o método de **Lax-Friedrichs** aplicado à equação (4.1.1)

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

adotando a norma 1 em $\mathbb{R}$ e aplicando em seguida a desigualdade triangular, obtemos

$$\|U^{n+1}\| \;=\; h\sum_j |U_j^{n+1}| \;\leq\; \frac{h}{2}\left[\sum_j \left|\left(1-\frac{ak}{h}\right)U_{j+1}^n\right| + \sum_j \left|\left(1+\frac{ak}{h}\right)U_{j-1}^n\right|\right],$$

mas a hipótese (4.1.33) garante que

$$1 - \frac{ak}{h} \geq 0, \quad 1 + \frac{ak}{h} \geq 0.$$

Dessa forma, essas parcelas saem do módulo e concluímos

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\| &\leq \frac{h}{2}\left[\left(1 - \frac{ak}{h}\right)\sum_j \left|U_{j+1}^n\right| + \left(1 + \frac{ak}{h}\right)\sum_j \left|U_{j-1}^n\right|\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{ak}{h} + 1 + \frac{ak}{h}\right)\|U^n\|\right] \\ &= \|U^n\|, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Vamos estudar agora o método **Upwind**, em cada uma de suas duas versões. Quando o método é dado por

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n), \tag{4.1.34}$$

contas análogas às feitas para o método de Lax-Friedrichs conduzem a

$$\|U^{n+1}\| \leq h\sum_j \left|\left(1 - \frac{ak}{h}\right)U_j^n\right| + h\sum_j \left|\frac{ak}{h}U_{j-1}^n\right|,$$

de modo que, se impusermos a condição

$$0 \leq \frac{ak}{h} \leq 1, \tag{4.1.35}$$

os coeficientes que multiplicam U_j^n e U_{j-1}^n são não negativos e obtemos

$$\|U^{n+1}\| \leq \left(1 - \frac{ak}{h} + \frac{ak}{h}\right)\|U^n\| = \|U^n\|.$$

Note que a condição (4.1.35) pode ser satisfeita apenas para $a \geq 0$, pois h e k são positivos. Por isso o método upwind usa a formulação (4.1.34) apenas quando $a \geq 0$.

Analogamente, quando o método upwind é dado por

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h}(U_{j+1}^n - U_j^n), \tag{4.1.36}$$

a restrição que garante estabilidade é

$$-1 \leq \frac{ak}{h} \leq 0. \tag{4.1.37}$$

Assim, a formulação (4.1.36) é usada apenas quando $a \leq 0$ e a restrição de estabilidade que resulta juntando (4.1.35) e (4.1.37) é ainda a (4.1.33).

Veremos na próxima seção que (4.1.33) não é apenas suficientes para a estabilidade desses métodos, mas também necessária.

4.1.6 Condição CFL

A condição CFL (assim chamada pelos nomes dos que a introduziram: Courant, Friedrichs e Lewy) é uma condição mínima necessária para a estabilidade de métodos de diferenças finitas.

Ela afirma que um método só poderá ser estável se o seu domínio de dependência incluir o domínio de dependência real da equação diferencial, pelo menos no limite em que $h, k \to 0$.

O domínio de dependência de um ponto $(\bar{x}, \bar{t})$ para uma problema aos valores iniciais como (4.1.1) é definido como o conjunto

$$D(\bar{x}, \bar{t}) = \{x \in \mathbb{R} : \ u_0(x) \text{ influencia a solução em } (\bar{x}, \bar{t})\}.$$

Como sabemos que no caso de (4.1.1) a solução exata é $u(x,t) = u_0(x - at)$, temos que $D(\bar{x}, \bar{t}) = \{(\bar{x} - a\bar{t})\}$.

Analogamente, o domínio de dependência de um ponto da malha (x_j, t_n) para o método numérico é o conjunto

$$D^{h,k}_{\text{num}}(x_j, t_n) = \{x = jh \, (j \in \mathbb{Z}) : \ U^0_j \text{ influencia a solução numérica em } (x_j, t_n)\}.$$

Se fixarmos a razão da malha $k/h = r$ e mandarmos $h, k \to 0$, definimos

$$D^0_{\text{num}}(x_j, t_n) = \lim_{h,k \to 0} D^{h,k}_{\text{num}}(x_j, t_n).$$

Assim, a **condição CFL** exige que, para um método estável, deve valer

$$D(x_j, t_n) \subset D^0_{\text{num}}(x_j, t_n).$$

Para os métodos estudados, podemos calcular o domínio de dependência D^0_{num} a partir da seguinte ideia: consideremos o método de Lax-Wendroff. O valor de U^n_j depende dos valores de U^{n-1} em três pontos: x_{j-1}, x_j, x_{j+1}. Estes valores, por sua vez, dependem de U^{n-2} em cinco pontos, $x_{j-2}, \ldots, x_{j+2}$, e assim por diante, até $t_0 = 0$ (veja Figura 4.1).

Dessa forma, a solução numérica em (x_j, t_n) só depende dos valores de u_0 nos pontos x_{j+q}, $q = -n, \ldots, n$, e o domínio numérico pode ser expressado como

$$D^{h,k}_{\text{num}}(x_j, t_n) = \left\{ x = jh : \ |x - x_j| \leq nh = t_n \frac{h}{k} = \frac{t_n}{r} \right\},$$

assim

$$D^0_{\text{num}}(x_j, t_n) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ |x - x_j| \leq \frac{t_n}{r} \right\},$$

Assim, a condição CFL pede que

$$D(x_j, t_n) = \{x_j - at_n\} \subset D^0_{\text{num}}(x_j, t_n),$$

isto é,

$$|(x_j - at_n) - x_j| \leq \frac{t_n}{r},$$

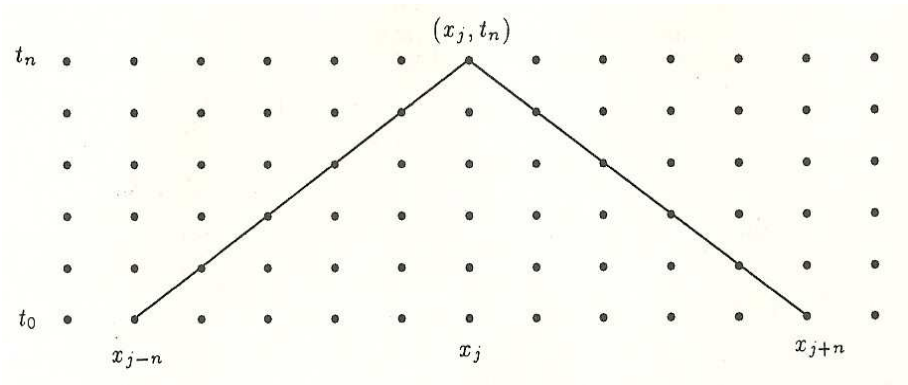

Figura 4.1: Dependência dos pontos anteriores para a solução numérica em (x_j, t_n)

isto é, $|a| \leq 1/r$, que é equivalente a

$$\left|\frac{ak}{h}\right| \leq 1. \tag{4.1.38}$$

As contas para o método de Lax-Friedrichs são análogas, resultando também na mesma condição (4.1.38), que é exatamente a mesma (4.1.33) obtida anteriormente para a estabilidade desse método.

No método Upwind, devido à dependência de pontos à direita ou à esquerda, que varia com sinal de a, obtemos diferentes domínios de dependência:

$$D^{h,k}_{\text{num}}(x_j, t_n) = \left\{x = jh : 0 \leq x_j - x \leq \frac{t_n}{r}\right\}, \qquad \text{se} \quad a \geq 0,$$

$$D^{h,k}_{\text{num}}(x_j, t_n) = \left\{x - jh : 0 \leq x - x_j \leq \frac{t_n}{r}\right\}, \qquad \text{se} \quad a \leq 0,$$

e obtemos também às condições de estabilidade anteriormente observadas:

$$0 \leq \frac{ak}{h} \leq 1, \qquad \text{se} \quad a \geq 0,$$

$$-1 \leq \frac{ak}{h} \leq 0, \qquad \text{se} \quad a \leq 0.$$

Concluíndo, mostramos então que a condição (4.1.33) é de fato necessária, e não apenas suficiente, para a estabilidade desses métodos.

4.1.7 O caso de sistemas

Consideremos o problema de obter um vetor $\mathbf{u}(x, t)$, solução do sistema

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \tag{4.1.39}$$

onde $\mathbf{u} = [u_i]_{N\times 1}$ e $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{N\times N}$ é uma matriz diagonalizável a coeficientes constantes.

Da hipótese de $\mathbf{A}$ l, escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal dos autovalores de $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}$ é a matriz (invertível) dos autovetores correspondentes. Assim, reescrevemos a equação como

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_x = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \tag{4.1.40}$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}$, com $\mathbf{v} = [v_i]_{N\times 1}$, obtemos:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}_x = \mathbf{0}, \tag{4.1.41}$$

um sistema desacoplado de N equações lineares da forma $(v_i)_t + \lambda_i(v_i)_x = 0$.

Aplicando o método de Lax-Friedrichs a cada equação, obtemos

$$\mathbf{V}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{j-1}^n + \mathbf{V}_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}_{j+1}^n - \mathbf{V}_{j-1}^n), \tag{4.1.42}$$

com a condição de estabilidade

$$\left|\frac{\lambda_i k}{h}\right| \leq 1.\ i = 1, .., N\,. \tag{4.1.43}$$

Voltando a calcular $\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{V}_j^{n+1}$ obtemos explicitamente

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{U}_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\mathbf{A}(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n), \tag{4.1.44}$$

formalmente análogo ao método no caso escalar.

Um pouco diferente é o caso do método Upwind, já que devemos escolher quais pontos usar em cada equação do sistema desacoplado, dependendo do sinal de λ_i. Assim, para escrever o método numa forma simples, podemos definir

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= \max\{\lambda_i, 0\}, \quad \mathbf{\Lambda}^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \ldots, \lambda_N^+), \\ \lambda_i^- &= \min\{\lambda_i, 0\}, \quad \mathbf{\Lambda}^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-, \ldots, \lambda_N^-). \end{aligned}$$

e o método Upwind pode então ser escrito na forma:

$$\mathbf{V}_j^{n+1} = \mathbf{V}_j^n - \frac{k}{h}\mathbf{\Lambda}^+(\mathbf{V}_j^n - \mathbf{V}_{j-1}^n) - \frac{k}{h}\mathbf{\Lambda}^-(\mathbf{V}_{j+1}^n - \mathbf{V}_j^n). \tag{4.1.45}$$

Observe que $\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^- = \mathbf{\Lambda}$; voltando a calcular $\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{V}_j^{n+1}$ e definindo $\mathbf{A}^\pm = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^\pm\mathbf{P}^{-1}$ obtemos o método upwind para sistema na forma

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h}\mathbf{A}^+(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) - \frac{k}{h}\mathbf{A}^-(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n), \tag{4.1.46}$$

onde a condição de estabilidade é ainda a (4.1.43).

4.2 Comportamento em descontinuidades e equações modificadas

Ao estudar equações de conservação, precisamos nos preocupar com as dificuldades adicionais causadas por possíveis descontinuidades na solução (veja-se nos relatórios anteriores).

Vamos observar o que acontece com a solução numérica quando aplicamos um método numérico a um problema com condição inicial descontínua:

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x \geq 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

cuja solução generalizada é $u(x,t) = u_0(x - at)$.

Observe que os resultados obtidos na seções 4.1.3 e 4.1.3, com respeito a erro de truncamento e convergência, supunham soluções suaves. No entanto, devemos esperar que o método numérico encontre dificuldades numa vizinhança da descontinuidade, visto que na estimativa do erro de truncamento local apareciam as derivadas segundas de ordem dois ou três u_{xx} ou u_{xxx}, que divergem na descontinuidade (veja as equações (4.1.22-4.1.23-4.1.24)).

É ainda possível demonstrar a convergência considerando uma aproximação $u_0^\epsilon(x)$ que seja suave e tenda a $u_0(x)$ para $\epsilon \to 0$, mas a ordem do método pode tornar-se consideravelmente menor do que a deduzida para soluções suaves.

Para o método de Lax-Friedrichs, do qual era esperada ordem 1, comparando a solução exata com soluções numéricas obtidas com diferentes malhas, pode-se observar que o erro tem um andamento que é $O(k^{1/2})$ perto da descontinuidade. Para o de Lax-Wendroff, de ordem 2 para soluções suaves, observa-se um erro $O(k^{2/3})$ perto da descontinuidade.

Outra característica importante que podemos observar na Figura 4.2 é que o tipo de erro característico da solução numérica de cada um dos método é diferente: na figura vemos o que acontece com a solução numérica do problema (4.2.1), obtida por alguns dos métodos estudados, em comparação com a solução analítica: estas diferenças serão analisadas na próxima seção.

4.2.1 Equações modificadas

Uma técnica útil para entender o comportamento de soluções numéricas obtidas por métodos de diferenças finitas é procurar uma equação diferencial que seja aproximada pelo método com uma ordem de convergência maior do que a equação original.

A derivação dessa *equação modificada* está diretamente relacionada ao cálculo do erro de truncamento do método. Tomemos o método de **Lax-Friedrichs**, que aproxima (4.1.1) com $L_k(x,t) = O(k)$. Da equação (4.1.21) vemos que, se tomássemos $u(x,t)$ de forma que fosse

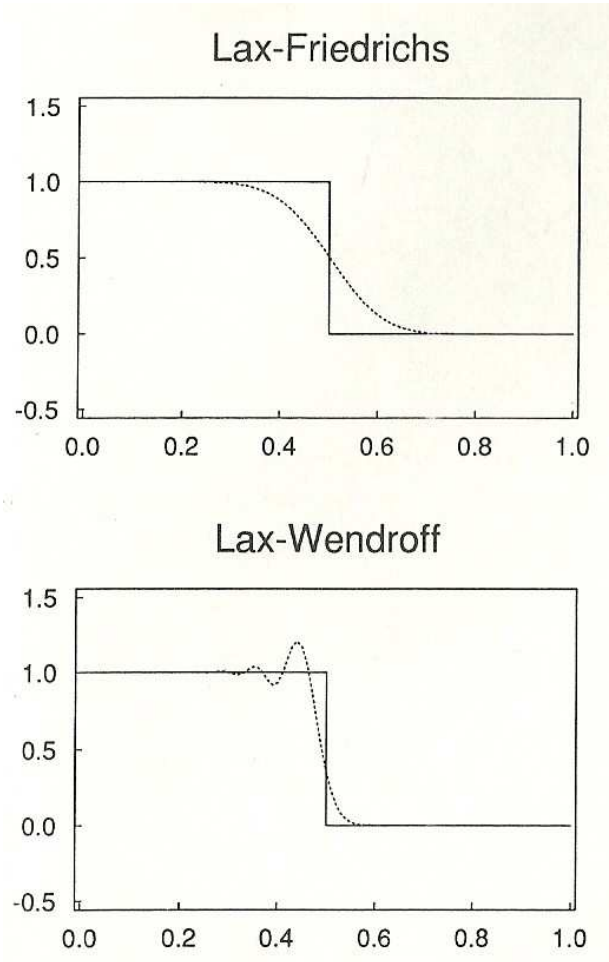

Figura 4.2: Comparação entre solução numérica e analítica de (4.2.1), no instante $t = 0.5$, para os métodos de Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff, no caso $h = 0.01$, $k = 0.005$.

solução da EDP

$$u_t + au_x + \frac{k}{2}\left(u_{tt} - \frac{h^2}{k^2}u_{xx}\right) = 0, \tag{4.2.2}$$

obteríamos erro de truncamento $O(k^2)$. Ou seja, o método nos dá uma aproximação de segunda ordem para a solução de (4.2.2), enquanto apenas de ordem 1 para (4.1.1). Assim, (4.2.2) é uma equação modificada para o método de Lax-Friedrichs.

Podemos ainda obter uma equação mais simples de se analisar se expressarmos u_{tt} em termos

das derivadas em x. Para isso, usando (4.2.2), temos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -au_{xt} - \tfrac{k}{2}\left(u_{ttt} - \tfrac{h^2}{k^2}u_{xxt}\right) \\ &= -au_{tx} + O(k) \\ &= -a(-au_{xx} + O(k)) + O(k) \\ &= a^2u_{xx} + O(k). \end{aligned}$$

Assim, a equação modificada pode ser reescrita na forma

$$u_t + au_x = \frac{k}{2}\left(\frac{h^2}{k^2} - a^2\right)u_{xx}. \tag{4.2.3}$$

Como veremos na próxima seção, o termo da direita da equação (4.2.3) é um termo difusivo, de intensidade proporcional ao passo temporal usado e à derivada segunda u_{xx}.

Este termo justifica o fato, visível nas simulações numéricas ilustradas na Figura 4.2, de que próximo à descontinuidade, isto é, onde as derivadas segundas tornam-se muito grandes, a solução numérica torna-se mais suave, espalhando o salto, tanto mais quanto maior é o passo da malha.

Algo parecido ocorre com o método de **Lax-Wendroff** que, como já observamos na seção 4.1.3, gera uma aproximação de segunda ordem para a equação $u_t + au_x = 0$. Ao calcularmos sua equação modificada, obtemos

$$u_t + au_x = \frac{ak^2}{6}\left(a^2 - \frac{h^2}{k^2}\right)u_{xxx}, \tag{4.2.4}$$

para a qual o método gera uma solução aproximada de ordem 3.

Nesse caso, o termo que surge do lado direito da equação é de caráter dispersivo; veremos a seguir que seu efeito é que perto da descontinuidade a solução aproximada apresenta oscilações.

De modo geral, métodos de primeira ordem para (4.1.1) têm equações modificadas com termo difusivo: na forma

$$u_t + au_x = Du_{xx} \tag{4.2.5}$$

com $D > 0$, enquanto métodos de segunda ordem têm equações modificadas com termo dispersivo: da forma

$$u_t + au_x = \mu u_{xxx}. \tag{4.2.6}$$

Nas seções a seguir procuramos estudar mais em detalhe o efeito destes dois diferentes termos adicionais.

Métodos de primeira ordem e difusão

Vamos estudar a solução de (4.2.5): fazendo a mudança de variáveis $\xi = x - at$, (4.2.5) pode ser reescrita na forma

$$u_t = Du_{\xi\xi}\,, \tag{4.2.7}$$

que é a conhecida equação do calor, bem posta para tempos positivos desde que $D \geq 0$.

Podemos obter soluções exatas de (4.2.7) por separação de variáveis: vamos supor que (4.2.7) admita uma solução na forma $u(\xi, t) = h(\xi)g(t)$. Então vale

$$h(\xi)g'(t) = Dh''(\xi)g(t),$$

logo (supondo por enquanto $h, g \neq 0$)

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = D\frac{h''(\xi)}{h(\xi)}.$$

Como essa igualdade deve valer para todo ξ e todo t, ambos os lados devem ser iguais a uma constante, digamos $-D\delta$. Assim, chegamos às seguintes EDOs:

$$g'(t) = -D\delta g(t), \tag{4.2.8}$$

$$h''(\xi) = -\delta h(\xi). \tag{4.2.9}$$

A primeira admite solução geral

$$g(t) = c_1 e^{-D\delta t},$$

enquanto a solução da segunda depende do sinal de δ. Se $\delta > 0$ temos integral geral

$$h(\xi) = d_1 \sin\left(\sqrt{\delta}\,\xi\right) + d_2 \cos\left(\sqrt{\delta}\,\xi\right) ;$$

se $\delta = 0$ a solução é $h(\xi) = d_1 + d_2\xi$, enquanto se $\delta < 0$ teremos

$$h(\xi) = d_1 \sinh\left(\sqrt{-\delta}\,\xi\right) + d_2 \cosh\left(\sqrt{-\delta}\,\xi\right) .$$

Deduzimos que para termos soluções limitadas no espaço e que se mantenham limitadas para tempos positivos, precisamos $D, \delta \geq 0$. Em particular, obtemos soluções da (4.2.5) da forma

$$u(x,t) = e^{-D\delta t}\left[d_1 \sin\left(\sqrt{\delta}(x - at)\right) + d_2 \cos\left(\sqrt{\delta}(x - at)\right)\right]. \tag{4.2.10}$$

É interessante relacionar o fato do problema ser bem posto para $D \geq 0$, com a estabilidade do método de Lax-Friedrichs. De fato, para esse método, o coeficiente de difusão é dado por

$$D = \frac{k}{2}\left(\frac{h^2}{k^2} - a^2\right) = \frac{h^2}{2k}\left(1 - \left(\frac{ak}{h}\right)^2\right) \tag{4.2.11}$$

e portanto o problema é bem posto se, e somente se,

$$\left|\frac{ak}{h}\right| \leq 1,$$

justamente a condição de estabilidade que obtivemos nas seções anteriores: se essa não estiver satisfeita então a solução da equação modificada explodiria para $t \to \infty$ e logo o método não poderia convergir à solução exata.

Métodos de segunda ordem e dispersão

Vamos estudar agora o comportamento das soluções de (4.2.6), onde μ é chamado coeficiente de difusão, e pode também depender de k, como ocorre na equação de Lax-Wendroff.

Para isso, procuremos uma solução na forma

$$u(x,t) = \sin(\eta x - \omega t). \tag{4.2.12}$$

Substituindo em (4.2.6) obtemos $cos(\eta x - \omega t)\left[-\omega + a\eta - \mu\eta^3\right] = 0$: deduzimos que (4.2.12) é uma solução se $\omega = \eta(a - \mu\eta^2)$, isto é, obtemos a solução

$$u(x,t) = \sin(\eta(x - (a - \mu\eta^2)t)). \tag{4.2.13}$$

Comparação entre difusão e dispersão

Comparando os resultado das duas seções anteriores, vemos que para uma condição inicial da forma $\sin(\eta x)$, a equação (4.2.5) terá solução

$$u(x,t) = e^{-D\eta^2 t}\sin\left(\eta(x - at)\right),$$

enquanto a equação (4.2.6) terá solução

$$u(x,t) = \sin\left(\eta(x - (a - \mu\eta^2)t)\right).$$

Isso significa que, no primeiro caso, a sinusoide inicial translada com velocidade a, mas sua amplitude decai exponencialmente, tanto mais rápido quanto maior é η; no segundo caso, ao contrário, a senóide inicial mantém a amplitude, mas translada com velocidade que não é mais exatamente a, mas é um pouco mais ou menos (dependendo do sinal de μ) e também depende do parâmetro η (que é inversamente proporcional ao comprimento da onda)

Imaginando poder representar nossa condição inicial como sobreposição de funções seno de diferente comprimento de onda (série ou transformada de Fourier), podemos então explicar os fenômenos observados na resolução numérica de um choque (veja Figura 4.2): no caso de equação modificada difusiva, as ondas de frequência mais alta (η maior) desaparecerão mais rapidamente, deixando o choque sempre mais suave (difusão), enquanto no caso da equação modificada dispersiva, as ondas de frequência mais alta viajarão mais rápido (ou menos, dependendo do sinal de μ), criando uma oscilação na frente (ou atrás) do choque (dispersão).

4.3 Métodos conservativos para problemas não lineares

Nesta seção, vamos iniciar o estudo de métodos numéricos aplicáveis a equações de conservação não lineares com forma geral

$$\begin{aligned} &u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

onde a função f é chamada função de fluxo, e depende unicamente da variável u.

Já vimos, na seção anterior, que mesmo para o caso linear (4.1.1), em que a solução simplesmente translada o estado inicial com velocidade constante, uma descontinuidade na condição inicial nos gera dificuldades adicionais e diminui a ordem dos métodos estudados.

Como vimos no relatório 1, quando passamos a considerar problemas **não lineares**, mesmo condições iniciais regulares podem produzir soluções (em sentido generalizado) que apresentam descontinuidades. Além disso, a estabilidade de métodos de diferenças finitas aplicados a problemas não lineares é menos simples de se garantir.

Outro problema é que um método numérico pode ser consistente com a equação diferencial e então convergir, ao refinarmos a malha, para a solução exata quando esta é regular, mas não convergir para uma solução generalizada, ou não convergir para a solução generalizada entrópica (lembre-se, do relatório 1, que soluções generalizadas de um problema de conservação não linear não são únicas).

Assim, se quisermos um método que nos conduza à solução correta, precisaremos impor algumas condições adicionais, que chamaremos de conservatividade do método e condição de entropia.

Exemplo 4. Convergência a soluções generalizadas erradas.

Consideremos a equação de Burgers na forma

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \tag{4.3.2}$$

Podemos multiplicá-la por $2u$ *e reagrupar os termos, obtendo*

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0; \tag{4.3.3}$$

as equações (4.3.2) e (4.3.3) são equivalentes, logo devem apresentar soluções clássicas idênticas. No entanto, elas expressam duas diferentes leis de conservação: a da quantidade u *cujo fluxo é* $u^2/2$ *e a da quantidade* u^2 *cujo fluxo é* $2u^3/3$*, logo suas soluções generalizadas serão diferentes. De fato, a relação de Rankine-Hugoniot nos diz que a velocidade de um choque entre dois estados* u_1 *e* u_2 *seria, para a (4.3.2)*

$$s = \frac{\frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2}{u_1 - u_2} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),$$

enquanto para a (4.3.3)

$$s = \frac{\frac{2}{3}u_1^3 - \frac{2}{3}u_2^3}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}\right) = \frac{2}{3}\left[(u_1 + u_2) - \frac{u_1u_2}{u_1 + u_2}\right],$$

que em geral são distintas para u_1 *e* u_2 *arbitrários.*

Esta observação implica que um método numérico consistente com (4.3.2), e então também com (4.3.3), não poderá convergir à solução generalizada de ambas equações.

É possível ver este fenômeno num exemplo muito simples: tomemos o problema com condição inicial descontínua para a equação de Burgers

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \\ &u(x,0) = 0, \qquad \textit{para } x \geq 0 \\ &u(x,0) = 1, \qquad \textit{para } x < 0 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

e consideremos o seguinte método numérico obtido a partir do Upwind, computando o valor do coeficiente de advecção (que no caso é u e que supomos não negativo) no ponto x_j^n:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n), \qquad \textit{com} \quad U_j^n \geq 0; \tag{4.3.5}$$

este método é consistente com (4.3.4) quando assumimos soluções suaves, como podemos verificar calculando o erro de truncamento:

$$\begin{aligned} L_k(x,t) &= \tfrac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t) + \tfrac{k}{h} u(x,t)[u(x,t) - u(x-h,t)]\right] \\ &= \tfrac{1}{k}\left[u + ku_t - u + \tfrac{k}{h} u[u - u + hu_x\ ] + O(k^2)\right] \\ &= u_t + uu_x + O(k) = O(k). \end{aligned}$$

Apesar disso, é imediato verificar que o método resulta em U^{n+1} sempre igual a U^0, logo a solução numérica representa um choque de velocidade nula (seja qual for a malha usada), diferente da velocidade de $1/2$ esperada para a equação (4.3.2).

4.3.1 Métodos conservativos

Existe um requisito simples que podemos impor aos nossos métodos de forma a garantir que eles convirjam para as soluções generalizadas corretas dos nossos problemas. Basta que o método possa ser escrito na forma que chamaremos **forma conservativa**, isto é,

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[F(U_{j-p}^n, \ldots, U_{j+q}^n) - F(U_{j-p-1}^n, \ldots, U_{j+q-1}^n)\right], \tag{4.3.6}$$

onde F é uma função de $p+q+1$ argumentos, que chamaremos **função de fluxo numérica**.

Em geral consideraremos os casos mais simples em que F é uma função de apenas duas variáveis, ou até uma, assim (4.3.6) se reduz a

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)\right]. \tag{4.3.7}$$

A forma (4.3.6) se justifica pela formulação integral da equação de conservação: escrevendo-a no retângulo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ do plano (x,t), temos

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,t_{n+1})dx &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,t_n)dx - \Big[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2},t))dt \\ &\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2},t))dt\Big]; \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

multiplicando esta equação por $1/h$ e utilizando a definição de $\overline{u}_j^n$ conforme (4.1.3), obtemos

$$\overline{u}_j^{n+1} = \overline{u}_j^n - \frac{1}{h}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2},t))dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2},t))dt\right]. \tag{4.3.9}$$

Comparando esta última expressão com (4.3.7), vemos que a função de fluxo numérica $F(U_j^n, U_{j+1}^n)$ deve aproximar o fluxo passando por $x_{j+1/2}$ entre o instantes t_n e t_{n+1}. Isto é,

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) \approx \frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2},t))dt. \tag{4.3.10}$$

Alguns métodos conservativos

Mostraremos aqui algumas adaptações dos métodos que construímos para problemas lineares, de maneira que aproximem (4.3.1) e sejam conservativos. Em geral, isso pode ser feito usando o normal desenvolvimento em diferenças finitas, mas aplicado à equação na forma (4.3.1).

No caso do método de **Lax-Friedrichs**, obtemos a forma geral do método

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)), \tag{4.3.11}$$

que corresponde a uma função F na forma

$$F(v,w) = \frac{h}{2k}(v-w) + \frac{1}{2}(f(v)+f(w)). \tag{4.3.12}$$

Considerando agora o método **Upwind**, a função $F(v,w)$ deve ser escolhida de acordo com o sentido do fluxo, isto é, com o sinal da derivada f'; podemos inferir este sinal comparando $f(v)$ com $f(w)$, de modo que nossa função F fica definida como

$$F(v,w) = \begin{cases} f(v), & \text{se} \quad (f(v)-f(w))/(v-w) \geq 0, \\ f(w), & \text{se} \quad (f(v)-f(w))/(v-w) < 0. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

No caso da equação de Burgers na forma (4.3.2), fazendo a hipótese de que $U_j^n \geq 0$, assim f é não decrescente, a fórmula Upwind ficaria

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[\frac{1}{2}(U_j^n)^2 - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n)^2\right] = U_j^n - \frac{k}{h}\left[\frac{1}{2}(U_j^n + U_{j-1}^n)(U_j^n - U_{j-1}^n)\right]; \tag{4.3.14}$$

comparando com a formulação (não conservativa) (4.3.5), vemos que agora o valor de u usado como coeficiente de advecção é a média entre os pontos x_{j-1}^n e x_j^n, em vez de ser apenas o valor em x_j^n.

4.3.2 Consistência de métodos conservativos

Um método conservativo, na forma (4.3.6), é dito **consistente** com a equação de conservação (4.3.1) se

- a função de fluxo numérico se reduz ao fluxo verdadeiro da equação quando assumimos solução constante $u(x,t) = \widetilde{u}$, isto é

$$F(\widetilde{u}, \widetilde{u}, \ldots, \widetilde{u}) = f(\widetilde{u}), \quad \forall \widetilde{u} \in \mathbb{R}. \tag{4.3.15}$$

- a função F se aproxima de $f(\widetilde{u})$ de forma regular à medida que seus argumentos se aproximam de $\widetilde{u}$, em partiular, pedimos que F seja Lipschitz em todas suas variáveis: $\forall \widetilde{u}$, deve existir uma constante K (que pode depender de $\widetilde{u}$) tal que

$$|F(U_{j-p}, \ldots, U_{j+q}) - f(\widetilde{u})| \leq K \max_{-p \leq i \leq q} |U_{j+i} - \widetilde{u}|, \tag{4.3.16}$$

  quando os U_{j+i} são suficientemente próximos de $\widetilde{u}$.

Não é difícil verificar que os métodos conservativos de Lax-Friedrichs e Upwind apresentados na seção anterior são consistentes com o problema (4.3.1). Veremos a seguir como esse conceito de consistência nos será útil para provar a convergência de um método para uma solução generalizada do problema não-linear.

4.3.3 Verificando a conservação

Retomaremos aqui a equação de conservação na formulação integral, deduzida na seção 1.2.3 do relatório 1:

$$\int_a^b u(x, \tau_2)dx = \int_a^b u(x, \tau_1)dx - \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u(b,t))dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u(a,t))dt\right], \tag{4.3.17}$$

que deve ser satisfeita para quaisquer $a < b$ e $\tau_1 < \tau_2$.

No início da seção 4.3.1, observamos que a forma (4.3.6) está relacionada à conservação de u na região $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ da malha discretizada. Veremos a seguir que uma solução gerada por um método como em (4.3.6) satisfaz uma forma mais global de conservação, análoga a (4.3.17).

Para simplificar a notação, ponhamos

$$\widehat{F}(U^n; j) = F(U^n_{j-p}, \ldots, U^n_j, \ldots, U^n_{j+q}),$$

assim, podemos reescrever (4.3.6) como

$$U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{k}{h}\left[\widehat{F}(U^n; j) - \widehat{F}(U^n; j-1)\right]. \tag{4.3.18}$$

Tomando $J < K$ inteiros arbitrários e somando as equações (4.3.18) para $J \leq j \leq K$, obtemos

$$h\sum_{j=J}^{K} U^{n+1}_j = h\sum_{j=J}^{K} U^n_j - k\sum_{j=J}^{K}\left[\widehat{F}(U^n; j) - \widehat{F}(U^n; j-1)\right].$$

Mas simplificando o somatório de termos à direita, resta

$$h\sum_{j=J}^{K} U_j^{n+1} = h\sum_{j=J}^{K} U_j^n - k\left[\widehat{F}(U^n;K) - \widehat{F}(U^n;J-1)\right], \tag{4.3.19}$$

que é exatamente a forma discretizada de (4.3.17) para $a = x_J$ e $b = x_K$, no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$.

Se considerarmos a situação particular em que $u(x,t) = u_{-\infty}$ para $x \leq a$ e $u(x,t) = u_{+\infty}$ para $x \geq b$, para todo $t \in [\tau_1, \tau_2]$, isto é, a solução permanece constante fora do intervalo $[a,b]$, a equação (4.3.17) simplifica para

$$\int_a^b u(x,\tau_2)dx = \int_a^b u(x,\tau_1)dx - (\tau_2 - \tau_1)[f(u_{+\infty}) - f(u_{-\infty})], \tag{4.3.20}$$

enquanto (4.3.19) torna-se

$$h\sum_{j=J}^{K} U_j^{n+1} = h\sum_{j=J}^{K} U_j^n - k\left[f(u_{+\infty}) - f(u_{-\infty})\right], \tag{4.3.21}$$

graças à condição de consistência (4.3.15) que implica

$$\widehat{F}(U^n;J-1) = f(u_{-\infty}), \quad \widehat{F}(U^n;K) = f(u_{+\infty}),$$

quando J e K sejam escolhidos de modo que $x_{J-1+q} \leq a$, $x_{K-p} \geq b$.

Iterando (4.3.21) para sucessivos instantes, de t_m até t_n, com $n > m$, obtem-se

$$h\sum_{j=J}^{K} U_j^n = h\sum_{j=J}^{K} U_j^m - (t_n - t_m)\left[f(u_{+\infty}) - f(u_{-\infty}))\right]. \tag{4.3.22}$$

Se no instante $t = 0$ discretizamos $U_j^0 = \overline{u}_j^0$, segue que

$$h\sum_{j=J}^{K} U_j^0 = \int_{x_{J-1/2}}^{x_{K+1/2}} u_0(x)dx, \tag{4.3.23}$$

e dessa forma, comparando (4.3.20) com (4.3.22) com $\tau_1 = t_m = 0$ e $\tau_2 = t_n$ obtemos

$$h\sum_{j=J}^{K} U_j^n = \int_{x_{J-1/2}}^{x_{K+1/2}} \mathcal{U}(x,t_n)dx = \int_{x_{J-1/2}}^{x_{K+1/2}} u(x,t_n)dx, \tag{4.3.24}$$

que nos diz que a solução numérica conserva a quantidade u exatamente como a solução exata.

4.3.4 Teorema de Lax-Wendroff

A discussão realizada na seção anterior sugere que, se adotarmos um método conservativo e consistente, temos esperança de aproximar corretamente funções descontínuas que sejam soluções generalizadas da equação da conservação.

DE fato, nesta seção, apresentaremos o Teorema de Lax-Wendroff, que nos garante que, se nossa solução aproximada, obtida por um método conservativo e consistente, converge para uma certa função à medida que refinamos a malha, então esta função é solução generalizada da equação da conservação. Dessa forma, garante que podemos confiar nas soluções obtidas por esses métodos.

Teorema (de Lax-Wendroff). *Considere uma sequência de malhas indexadas por $l = 1, 2, ...$, de modo que os parâmetros $k_l, h_l \to 0$ quando $l \to \infty$. Seja $\mathcal{U}_l(x,t)$ a aproximação numérica obtida pela aplicação de um método conservativo consistente, para a l-ésima malha. Então, se $\mathcal{U}_l(x,t) \to u(x,t)$ quando $l \to \infty$ [1], então $u(x,t)$ é solução generalizada da equação da conservação.*

A idéia da demonstração é mostrar que u satisfaz uma igualdade integral equivalente à formulação integral (4.3.17): esta é

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\phi_t u + \phi_x f(u)\} dxdt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)u(x,0)dx \tag{4.3.25}$$

e deve valer para toda função ϕ que seja regular e nula fora de algum conjunto limitado.

A formulação (4.3.25) é obtida multiplicando a equação diferencial em (4.3.1) pela função ϕ e integrando por partes para passar as derivadas sobre a ϕ: dos termos de borda aparece apenas o termo em $t = 0$, já que ϕ é nula no infinito. De fato, (4.3.25) faz sentido para funções u apenas contínuas, mas quando elas sejam regulares torna-se equivalente (voltando atrás na integração por partes) à forma (4.3.1).

Para provar (4.3.25) multiplicamos o método (4.3.18) por $\phi(x_j, t_n)$ e somamos sobre a malha, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_n)(U_j^{n+1} - U_j^n) + \frac{k}{h}\phi(x_j, t_n) \left[\widehat{F}(U^n; j) - \widehat{F}(U^n; j-1)\right] = 0. \tag{4.3.26}$$

Abrindo a somatória e reacoplando os termos (procedimento análogo à integração por partes,

[1] A convergência $\mathcal{U}_l(x,t) \to u(x,t)$ neste teorema é no sentido integral, com variação total uniformemente limitada:
1) $\int_0^T \int_a^b |\mathcal{U}_l(x,t) - u(x,t)| dxdt \to 0$ para qualquer região $\Omega = [a,b] \times [0,T]$;
2) para cada $T > 0$, existe um $R > 0$ tal que
$VT(\mathcal{U}_l(\cdot,t)) < R$ para $t \in [0,T], l = 1, 2, 3, \ldots,$
onde VT é a função variação total, definida por $VT(v) = sup\left(\sum_{j=1}^{N} |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|\right)$, sendo o supremo tomado dentre todas as subdivisões $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_N = \infty$ da reta. Note que, para que VT seja finita, é preciso que v se aproxime de valores constantes a $\pm\infty$.

mas no caso discreto) chegamos a

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi(x_j,t_0)U_j^0-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}[\phi(x_j,t_n)-\phi(x_j,t_{n-1})]U_j^n+$$
$$-\frac{k}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}[\phi(x_{j+1},t_n)-\phi(x_j,t_n)]\widehat{F}(U^n;j)=0. \quad (4.3.27)$$

Enfim, isso pode ser reescrito como

$$hk\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x_j,t_n)-\phi(x_j,t_{n-1})}{k}U_j^n+$$
$$+kh\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x_{j+1},t_n)-\phi(x_j,t_n)}{h}\widehat{F}(U^n;j)=-h\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi(x_j,t_0)U_j^0. \quad (4.3.28)$$

Ao considerar o limite quando $h,k\to 0$, (4.3.28) torna-se (4.3.25), o que mostra que o limite das soluções obtidas pelo método conservativo e consistente é uma solução generalizada de (4.3.1).

Não entramos aqui nos detalhes da demonstração da convergência acima, mas destacamos que a hipótese de consistência (4.3.15)-(4.3.16) é usada, junto com a de variação total limitada, para garantir que o fluxo numérico $\widehat{F}(U^n;j)$ convirja para o valor do fluxo real $f(U_j^n)$, no ponto considerado.

4.3.5 A condição de entropia

Vimos no relatório 1 que em certos casos pode existir mais de uma solução generalizada de um problema de conservação, mas apenas uma delas é a que encontramos nos problemas físicos que o problema modela; isto porque na verdade (4.3.1) é um modelo que desconsidera fenômenos de difusão, útil nos casos que estes sejam pequenos, mas se considerarmos uma equação mais completa que inclua o termo viscoso e fizermos este termo tender a zero, as soluções correspondentes convergiriam exatamente para esta única solução "física" (veja a seção 1.2.6 do relatório 1).

Embora o teorema da seção anterior garanta convergência a uma solução generalizada da equação da conservação, ele nada diz sobre a solução obtida ser, ou não, a solução "física" do problema. Na seção 1.2.4 do relatório 1, afirmamos que esta solução pode ser reconhecida porque é a única que contém apenas choques "compressivos", isto é, nos quais a velocidade da convecção $f'(u)$ é maior a esquerda e menor a direita do choque. Infelizmente, esta não uma boa caracterização para usarmos com aproximações a diferenças finitas, já que não saberíamos como distinguir um choque verdadeiro numa solução aproximada que é descontínua por sua natureza.

Como exemplo, consideremos a equação de Burger com condição inicial

$$u_0(x)=\begin{cases}-1 & x<0,\\ 1 & x\geq 0,\end{cases} \quad (4.3.29)$$

que poderia ser discretizada como

$$U_j^0 = \begin{cases} -1 & j < 0, \\ 1 & j \geq 0. \end{cases} \tag{4.3.30}$$

A solução "física" do problema é a chamada onda de rarefação (veja a equação (1.2.18) do relatório 1), mas também a função $\widetilde{u}(x,t) = u_0(x)$, que corresponde a um choque expansivo estacionário, é solução generalizada do problema (basta notar que a condição de Rankine-Hugoniot é satisfeita com $s = 0$, pois na equação de Burger $f(u) = u^2$, e dessa forma $f(-1) = 1 = f(1)$, de modo que $[f] = 0$, porém $f'(-1) = -1 < 1 = f'(1)$).

Se tomarmos o método Upwind (4.3.13) e utilizarmos a condição inicial (4.3.30), como $f(-1) = f(1)$, todas as diferenças entre fluxos se cancelam e obtemos $U_j^{n+1} = U_j^n$ para todo j e n. Dessa forma, refinando a malha, convergimos à solução não física com choque $\widetilde{u}$.

Por outro lado, se discretizarmos u_0 como

$$\widehat{U}_j^0 = \begin{cases} -1 & j < 0, \\ 0 & j = 0, \\ 1 & j > 0, \end{cases} \tag{4.3.31}$$

a aplicação do mesmo método converge para a solução física dada pela onda de rarefação.

Observamos então que não é possível garantir, para o método considerado, a convergência para a solução física; percebemos inclusive uma forte sensibilidade com respeito à escolha da condição inicial.

Nosso objetivo será agora obter uma forma de garantir que um método conservativo convirja à solução física, e em seguida encontrar um método que faça isso.

Estabelecendo a condição de entropia

Como observamos, a caracterização da solução física usando o sinal de f' antes e depois do choque não é viável dentro de um método de diferenças finitas. Por isso precisamos de uma caracterização diferente.

Vimos no relatório 3 que em gasdinâmica existe uma quantidade física, a entropia, que permanece constante ao longo da trajetória de uma partícula quando o escoamento é regular, enquanto salta para valores maiores quando é atravessado um choque. Este fato permite distinguir a solução fisicamente correta (que por isso é chamada de **solução entrópica**) entre as possíveis soluções generalizadas.

Para problemas gerais na forma (4.3.1), procuramos então uma função $\eta(u)$ que seja conservada em soluções regulares, isto é, que satisfaça uma equação de conservação na forma

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x = 0\,,$$

para alguma função de fluxo $\psi(u)$.

Quando $\eta(u)$, $\psi(u)$ e $u(x,t)$ são deriváveis, podemos reescrever a equação acima e (4.3.1) como, respectivamente,

$$\eta'(u)u_t + \psi'(u)u_x = 0, \qquad u_t + f'(u)u_x = 0\,. \tag{4.3.32}$$

Multiplicando a segunda equação por $\eta'(u)$ e comparando com a primeira, obtemos a relação

$$\psi'(u) = \eta'(u)f'(u). \tag{4.3.33}$$

Assim, podemos encontrar, a menos de uma constante, uma função ψ tal que a quantidade η seja conservada quando u é regular. Chamaremos a função $\eta(u)$ de **função entropia**, enquanto a função $\psi(u)$ será chamada **fluxo de entropia**.

No caso de haver descontinuidades na solução u, porém, as manipulações acima feitas não são válidas.

Se u é a solução entrópica, então ela deve ser o limite para $\varepsilon \to 0$ de soluções $v = v_\varepsilon$ da equação com termo de difusão

$$v_t + f(v)_x = \varepsilon v_{xx}, \tag{4.3.34}$$

cujas soluções são sempre regulares.

Vejamos então como se comporta a função entropia η para soluções de (4.3.34): multiplicando (4.3.34) por $\eta'(v)$ e utilizando (4.3.32) e (4.3.33), temos

$$\eta'(v)v_t + \eta'(v)f'(v)v_x = \eta(v)_t + \psi(v)_x = \varepsilon\eta'(v)v_{xx} = -\varepsilon\eta''(v)v_x^2 + \varepsilon(\eta'(v)v_x)_x. \tag{4.3.35}$$

Podemos agora integrar a equação acima num retângulo $[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]$ tal que o choque da solução u atravesse os lados $[x_1,x_2]\times\{t_1\}$ e $[x_1,x_2]\times\{t_2\}$, obtendo

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\{\eta(v)_t + \psi(v)_x\}dxdt = -\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta''(v)v_x^2\right\}dxdt+\\ +\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left\{\eta'(v(x_2,t))v_x(x_2,t) - \eta'(v(x_1,t))v_x(x_1,t)\right\}dt.\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Os termos de dentro da última integral à direita de (4.3.36) são limitados, visto que $v \to u$ e $u(x,t)$ é regular em x_1 e x_2. Assim, este termo se anula no limite.

A primeira integral, ao contrário, envolve integrar v_x^2 em $[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]$. Se a solução u tem uma descontinuidade dentro do retângulo, mesmo fazendo $\varepsilon \to 0$, esse termo não irá se anular. No entanto, sendo $\varepsilon > 0$, $v_x^2 \geq 0$, se impusermos também $\eta'' > 0$ (hipótese de *convexidade*), podemos concluir que o lado direito da igualdade é certamente não-positivo no limite.

Enfim, integrando por partes, o termo da esquerda pode ser escrito em termos dos valores de v na borda:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\{\eta(v)_t + \psi(v)_x\}dxdt = \int_{x_1}^{x_2}\eta(v(x,t_2))dx - \int_{x_1}^{x_2}\eta(v(x,t_1))dx+\\ +\int_{t_1}^{t_2}\psi(v(x_2,t))dt - \int_{t_1}^{t_2}\psi(v(x_1,t))dt:\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

quando $\varepsilon \to 0$, este termo tende a um análogo com u no lugar de v.

Concluímos que a solução u entrópica satisfaz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(u(x,t_2))dx \leq \int_{x_1}^{x_2} \eta(u(x,t_1))dx - \left(\int_{t_1}^{t_2} \psi(u(x_2,t))dt - \int_{t_1}^{t_2} \psi(u(x_1,t))dt\right) \tag{4.3.38}$$

para quaisquer x_1, x_2, t_1 e t_2, Assim, o que observamos é que a diminuição da integral de η num dado intervalo $[x_1, x_2]$ não é necessariamente compensada pelo fluxo entrante: a função entropia assim definida pode diminuir quando a solução não é regular.

Como para soluções regulares (4.3.38) equivale a

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \{\eta(u)_t + \psi(u)_x\} dxdt \leq 0, \tag{4.3.39}$$

diremos que a desigualdade

$$\eta(x)_t + \psi(u)_x \leq 0 \tag{4.3.40}$$

vale no sentido generalizado quando (4.3.38) vale para quaisquer x_1, x_2, t_1 e t_2. Outra formulação equivalente a (4.3.38), parecida com (4.3.25), é

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\phi_t \eta(u) + \phi_x \psi(u)\} dxdt \leq -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)\eta(u(x,0))dx\,, \tag{4.3.41}$$

onde a desigualdade deve valer para toda função ϕ que seja regular, nula fora de algum conjunto limitado e não negativa.

Chamaremos (4.3.40) de **condição de entropia**, pois mostramos que ela vale sempre, em sentido generalizado, se u é a solução entrópica.

É também possível mostrar que apenas uma entre as soluções generalizadas pode satisfazer (4.3.40) para toda dupla (η, ψ) função - fluxo de entropia onde η seja convexa.

Por isso, podemos caracterizar a solução entrópica da seguinte forma:

Condição de Entropia. *A função $u(x,t)$ é a solução entrópica de (4.3.1) se, para toda dupla (η, ψ) que satisfaz (4.3.33), com η convexa, a desigualdade (4.3.40) é satisfeita no sentido generalizado.*

Exemplo 5. Entropia para a equação de Burgers

Tomemos a equação de Burgers, onde $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, e como função entropia escolhamos $\eta(u) = u^2$.

De (4.3.33), $\psi'(u) = 2u^2$, e então $\psi(u) = \frac{2}{3}u^3$. Assim, de (4.3.40), a condição de entropia consiste em pedir que a solução satisfaça

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x \leq 0, \tag{4.3.42}$$

no sentido generalizado.

Para qualquer solução suave vale $(u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x = 2u(u_t + uu_x) = 0$, *e portanto a condição é satisfeita nessas circunstâncias.*

Consideremos agora o caso em que uma solução generalizada admita um choque (com velocidade positiva) que passe pelos vértices dum retângulo infinitesimal $[x, x+\Delta x] \times [t, t+\Delta t]$.

Sabemos que a velocidade do choque em (x,t) *é dada por* $s = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$, *onde* u_l *e* u_r *são os valores de* u *à esquerda e à direita do choque, respectivamente; assim* $\Delta x = s\Delta t$ *e integrando* $(u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x$ *na região de interesse, temos*

$$\int_x^{x+\Delta x} u^2(x,t)dx\Big|_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t} \frac{2}{3}u^3(x,t)dt\Big|_x^{x+\Delta x} = \frac{1}{2}(u_l+u_r)\Delta t(u_l^2 - u_r^2) + \Delta t\frac{2}{3}(u_r^3 - u_l^3) =$$
$$= -\frac{1}{6}(u_l - u_r)^3\Delta t \leq 0. \quad (4.3.43)$$

Dessa forma a desigualdade de entropia implica que $u_l > u_r$, *isto é, o choque deve ser compressivo (como esperado).*

A condição de entropia do ponto de vista numérico

A condição de entropia na forma enunciada na seção anterior se presta a ser usada com a solução (aproximada) dada por um método numérico: para cada função entropia convexa η, procuraremos um fluxo numérico Ψ, consistente com o fluxo de entropia ψ que corresponde a η. Se as soluções numéricas satisfazem a *condição de entropia discreta*

$$\eta(U_j^{n+1}) \leq \eta(U_j^n) - \frac{k}{h}\left[\Psi(U^n; j) - \Psi(U^n; j-1)\right], \quad (4.3.44)$$

(usamos aquei a mesma notação introduzida em (4.3.18)), então, usando a formulação (4.3.41) e operando como na demonstração do teorema de Lax-Wendroff, podemos mostrar que, refinando a malha, a solução numérica converge a uma solução que satisfaz a desigualdade de entropia (4.3.40), isto é, converge para a solução entrópica.

Veremos na próxima seção uma adaptação do método Upwind, conhecida como método de Godunov, que é conservativo e para o qual a versão discreta da condição de entropia (4.3.44) é sempre garantida, logo este método convergirá sempre para a solução entrópica.

4.4 O Método de Godunov

Na seção anterior, estudamos versões do método Upwind para o problema não-linear nas quais se estimava o sinal de f' para prever o sentido de onde chega a informação, e dessa forma optar entre utilizar os valores (U_{j-1}^n, U_j^n) ou (U_j^n, U_{j+1}^n) para calcular U_j^{n+1}.

Elaboramos então o método conservativo (4.3.13), que observamos nem sempre convergir para a solução "física" do sistema, dependendo da discretização da condição inicial, e então estudamos uma condição sobre um método, conhecida como condição de entropia discreta, que garantisse convergência à solução entrópica do problema.

O **método de Godunov**, que será aqui apresentado, também faz uso do sinal da característica, mas consiste na resolução exata de sucessivos problemas com condição inicial descontínua, a cada passo temporal. Dessa forma, além de conservativo, mostraremos que o método satisfaz a versão discreta da condição de entropia. Dessa forma, convergirá à solução entrópica procurada.

4.4.1 Descrição do método

Partindo de uma discretização U^n no instante t_n, definimos a função

$$\widetilde{u}^{(n)}(x,t); \quad \text{definida para} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],$$

de modo que $\widetilde{u}^{(n)}(x,t_n) = \mathcal{U}(x,t_n)$, com $\mathcal{U}(x,t)$ constante por partes como definida em (4.1.4), enquanto $\widetilde{u}^{(n)}(x,t)$ para $t \in (t_n, t_{n+1}]$ é a solução generalizada entrópica obtida a partir de $\mathcal{U}(x,t_n)$. Como $\mathcal{U}(x,t_n)$ é constante em cada intervalo $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ e apresenta descontinuidades nos pontos $x_{j+1/2}$, esta solução será composta por choques e ondas de rarefação saindo destes pontos (veja Figura 4.3).

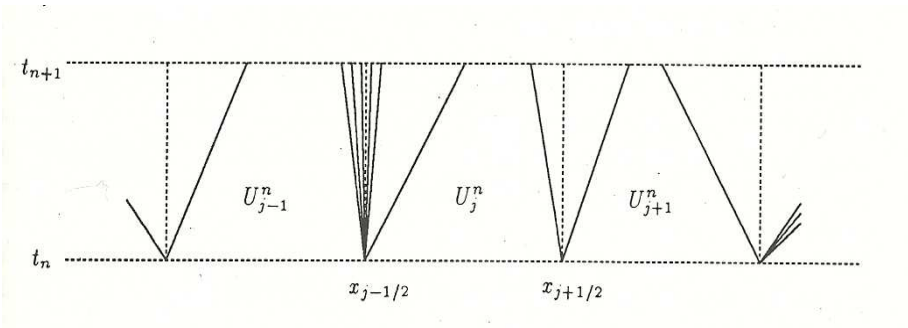

Figura 4.3: Representação dos choques e ondas de rarefação na $\widetilde{u}^{(n)}$ entre t_n e t_{n+1}

.

Mediando $\widetilde{u}^{(n)}(x,t)$ no tempo t_{n+1} em cada intervalo $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, definiremos então

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1})dx, \tag{4.4.1}$$

a partir da qual podemos definir $\widetilde{u}^{(n+1)}(x,t_{n+1})$ e dar seguimento ao processo descrito.

A integral (4.4.1), no entanto, pode ser calculada utilizando a equação da conservação na forma integral:

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1})dx = &\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \widetilde{u}^{(n)}(x,t_n)dx + \\ &- \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\widetilde{u}^{(n)}(x_{j+1/2},t))dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\widetilde{u}^{(n)}(x_{j-1/2},t))dt\right], \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

se soubermos calcular as integrais dos fluxos.

Vimos no relatório 1 que, para problemas como (4.3.1) com condição inicial que salta entre dois valores (chamados *problemas de Riemann*), a solução é constante ao longo de retas passando pelo ponto de descontinuidade; isso acontecerá perto dos pontos $(x_{j+1/2}, t_n)$, pelo menos até que possamos garantir que não haja interação com as características provenientes das descontinuidades adjacentes. Para tanto, pediremos que os parâmetros de malha satisfaçam

$$\left|\frac{k}{h} f'(U_j^n)\right| \leq 1 \tag{4.4.3}$$

para todo U_j^n, que significa que as características não conseguem cobrir a distância h no tempo k. Esta hipótese implica que $\widetilde{u}^{(n)}(x_{j+1/2}, t)$ é constante entre t_n e t_{n+1} e depende apenas de U_j^n e U_{j+1}^n; será então denotado por $u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)$.

Dessa forma, temos

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\widetilde{u}^{(n)}(x_{j+1/2}, t))dt = kf(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n))$$

em (4.4.2). Multiplicando a equação (4.4.2) por $1/h$ e usando que $\widetilde{u}^{(n)}(x, t_n) = U_j^n$ para $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, obtemos

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}\left[F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)\right],$$

onde

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)). \tag{4.4.4}$$

Assim, o método de Godunov é conservativo, pois pode ser posto na forma (4.3.7). Além disso, é imediato que $u^*(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u}$ (salto nulo) e pode-se verificar que é Lipschitz nas duas variáveis, logo pela regularidade de f, o fluxo numérico F é consistente com o fluxo original f. Pelo teorema de Lax-Wendroff, o método converge então para uma solução integral.

Vale ressaltar que a condição (4.4.3) não impede que, durante o tempo (t_n, t_{n+1}), ocorram interações complicadas entre choques e ondas de rarefação provenientes de duas descontinuidades adjacentes, mas garante que estas interações não cheguem a influenciar o valor de $\widetilde{u}^{(n)}(x_{j+1/2}, t)$, então não precisam ser calculadas (veja Figura 4.4).

A função $u^*(u_l, u_r)$ é em geral facilmente calculável: corresponde ao valor de u ao longo da reta r_0 que sai da descontinuidade com velocidade nula, no problema de Riemann considerado.

Para f convexa (e portanto f' crescente), podemos dividir o cálculo de u^* em três possíveis situações:

1) se $f'(u_l)$ e $f'(u_r)$ têm o mesmo sinal, independentemente da solução do problema ser um choque ou uma onda de rarefação, este estará inteiramente de um lado de r_0, logo

- $u^* = u_l$ se $f'(u_l), f'(u_r) \geq 0$
- $u^* = u_r$ se $f'(u_l), f'(u_r) \leq 0$;

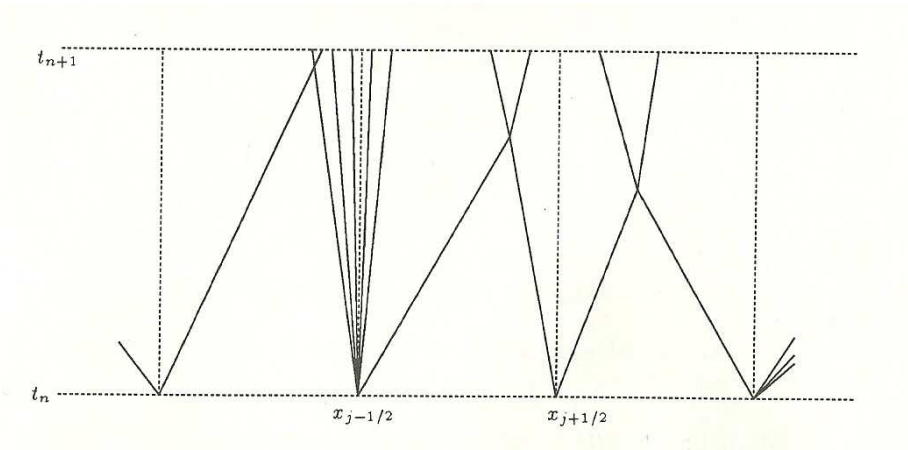

Figura 4.4: Interações entre choques e ondas de rarefação dentro do passo temporal.

2) se $f'(u_l) > 0 > f'(u_r)$, teremos com certeza um choque e o valor de u^* depende do sentido de propagação do choque, de modo que

- $u^* = u_l$ se $s = [f]/[u] > 0$
- $u^* = u_r$ se $s = [f]/[u] < 0$;

3) finalmente, se $f'(u_l) < 0 < f'(u_r)$, um leque de características (onda de rarefação) é formado entre as retas de inclinação $f'(u_l)$ e $f'(u_r)$; assim a reta r_0 será a reta do leque que propaga com velocidade nula, logo

- $u^* = u_{sn}$, onde u_{sn} é o único valor entre u_l e u_r tal que $f'(u_{sn}) = 0$, chamado de condição sônica, em analogia com o caso gasdinâmico.

Na implementação do método, em casos para os quais não seja tão simples obter a expressão para f', seu sinal pode ser estimado por diferenças de ordem 1, de forma similar ao que foi feito em (4.3.13).

Observação 1. *A idéia do método de Godunov pode facilmente ser estendida ao caso de sistemas: a única dificuldade é encontrada no momento de calcular o estado u^*, que ainda corresponde ao valor de u ao longo da reta r_0 que sai da descontinuidade com velocidade nula, no problema de Riemann considerado.*

De fato, problemas de Riemann para sistemas são em geral mais complicados de se resolver, pois cada variável (ou oportunas combinações das variáveis) pode apresentar choques ou ondas de rarefação viajando com velocidades distintas, que dependem dos autovalores da matriz Jacobiana do fluxo; logo será preciso calcular todos os autovalores correspondentes aos dois estados u_l, u_r e para cada dupla fazer uma análise como a descrita acima e calcular o salto correspondente, para enfim obter o estado ao longo da reta r_0. As Figuras 4.3 e 4.4 representam mesmo o caso de um sistema, onde é possível ver dois choques ou um choque e uma onda de rarefação saindo do mesmo ponto.

4.4.2 Condição de entropia discreta

Dedicaremos essa seção a mostrar que o método de Godunov satisfaz a condição de entropia discreta definida em (4.3.44).

Por ser $\widetilde{u}^{(n)}(x,t)$ a solução entrópica exata do problema de Riemann no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, ela satisfaz a condição de entropia (4.3.40), para qualquer η convexa e sua correspondente ψ. Integrando em $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$ e dividindo por h, obtemos

$$\frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1}))dx \leq \frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\widetilde{u}^{(n)}(x,t_n))dx \\ - \frac{1}{h}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(\widetilde{u}^{(n)}(x_{j+1/2},t))dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(\widetilde{u}^{(n)}(x_{j-1/2},t))dt\right). \quad (4.4.5)$$

Mas $u^{(n)}$ é constante dentro de todas as integrais do lado direito da desigualdade (na primeira delas, vale U_j^n; nas outras duas, u^*). Assim, a desigualdade simplifica para

$$\frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1}))dx \leq \eta(U_j^n) - \frac{k}{h}\left[\psi(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - \psi(u^*(U_{j-1}^n, U_j^n))\right]. \quad (4.4.6)$$

Definindo um fluxo de entropia numérico

$$\Psi(U_j^n, U_{j+1}^n) = \psi(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)), \quad (4.4.7)$$

consistente com ψ, o lado direito da desigualdade já corresponde a (4.3.44).

O lado esquerdo, por sua vez, não é igual a $\eta(U_j^{n+1})$, pois $\widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1})$ não é constante dentro da integral. Mas o fato de η ser convexa nos permite aplicar a *desigualdade de Jensen* [2] à integral da esquerda:

$$\eta\left(\frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1})dx\right) \leq \frac{1}{h}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\widetilde{u}^{(n)}(x,t_{n+1}))dx, \quad (4.4.8)$$

onde o membro da esquerda nada mais é que $\eta(U_j^{n+1})$.

A combinação das últimas três equações resulta na condição de entropia discreta:

$$\eta(U_j^{n+1}) \leq \eta(U_j^n) - \frac{k}{h}\left[\Psi(U_j^n, U_{j+1}^n) - \Psi(U_{j-1}^n, U_j^n)\right],$$

o que conclui nossa prova. Assim, quaisquer soluções obtidas a partir do método de Godunov satisfazem a condição de entropia, e portanto convergem para a solução entrópica procurada.

[2] Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa*, e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. A desigualdade de Jensen garante que $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx$.

4.4.3 Alguns resultados da aplicação do método

Nesta seção, vamos aplicar o método de Godunov à equação de Burgers, usando uma implementação em Matlab. Estudaremos, para tanto, um problema de Burgers com condição inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2\pi, \\ 0, & 2\pi < x \leq 4\pi, \\ 1, & 4\pi < x \leq 6\pi, \\ 0, & x > 6\pi. \end{cases} \tag{4.4.9}$$

A solução exata deste problema pode ser calculada e apresenta, inicialmente, dois choques saindo de 2π e 6π com velocidade $1/2$ e uma onda de rarefação saindo de 4π. Em seguda, os choque começam a interagir com a rarefação mudando suas velocidades, até que eles se encontram dando origem a uma única frente de choque, que volta a se propagar com velocidade constante $1/2$.

Adotando passos $h = k = \pi/100$ (razão de malha unitária, que satisfaz (4.4.3) para este problema já que $u = f'(u) \in [0, 1]$), foi obtida numericamente a evolução temporal da solução $u(x, t)$, para $0 \leq t \leq 50$, e o resultado pode ser observado na Figura 4.5.

Na figura 4.6, são representadas as curvas de nível da solução no plano (x, t). Nela é possível identificar os choques, as características da onda de rarefação, e a subsequente interação.

A fim de verificar a dependência do passo da malha e de evidenciar o caráter difusivo do método, fizemos a mesma simulação para malhas mais grossas: $h = k = \pi/50$ e $h = k = \pi/25$, e então fizemos a sobreposição dos perfis $u(x, \cdot)$ nos instantes $t = 40$ e $t = 50$ para os três casos. Os resultados podem ser observados nas Figuras 4.7 e 4.8.

Como esperado, a malha grossa apresentou maior difusão próxima ao choque do que a malha fina (embora em ambos os casos seja perceptível uma difusão em comparação com a solução exata esperada). É também interessante observar que a área por baixo dos três perfis desenhados é sempre a mesma, como era de se esperar por tratar-se de soluções aproximadas produzidas por um método conservativo.

Na Figura 4.9 copiamos o código em Matlab que gerou a simulação acima.

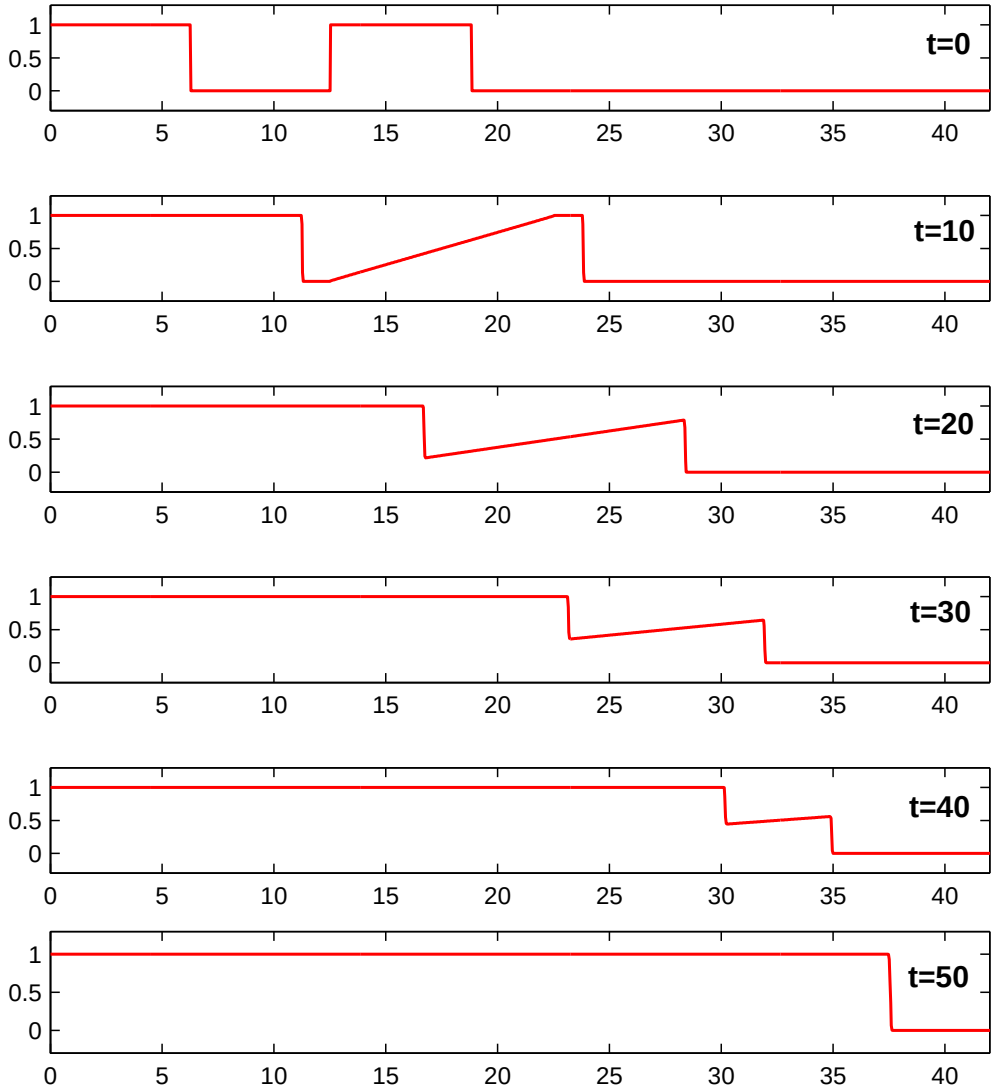

Figura 4.5: Evolução temporal do perfil $u(x, \cdot)$ obtido pelo método de Godunov para o problema de Burgers com condição inicial (4.4.9)

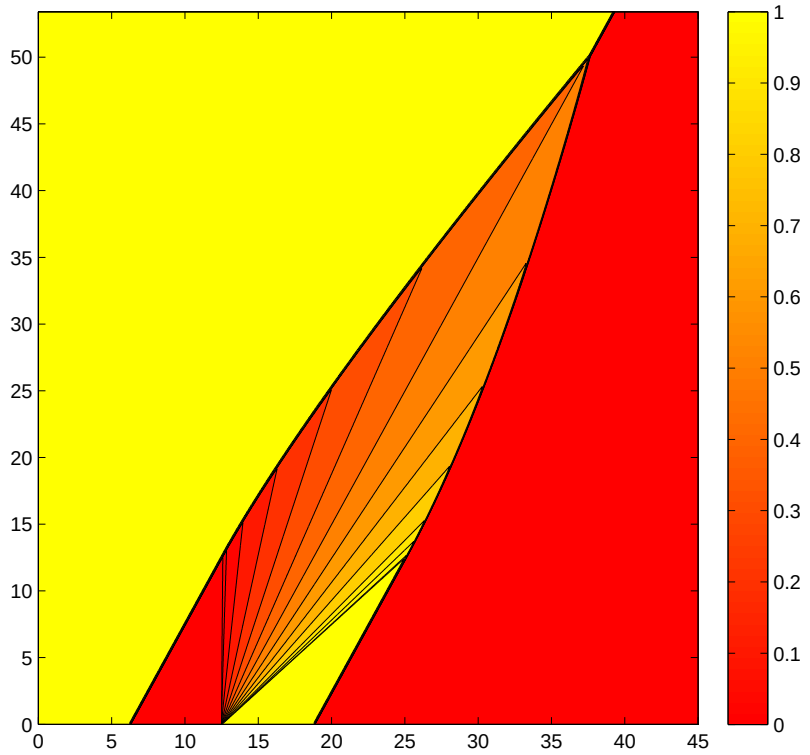

Figura 4.6: Comportamento das características no plano (x,t) e interações entre choques e ondas de rarefação para o problema descrito.

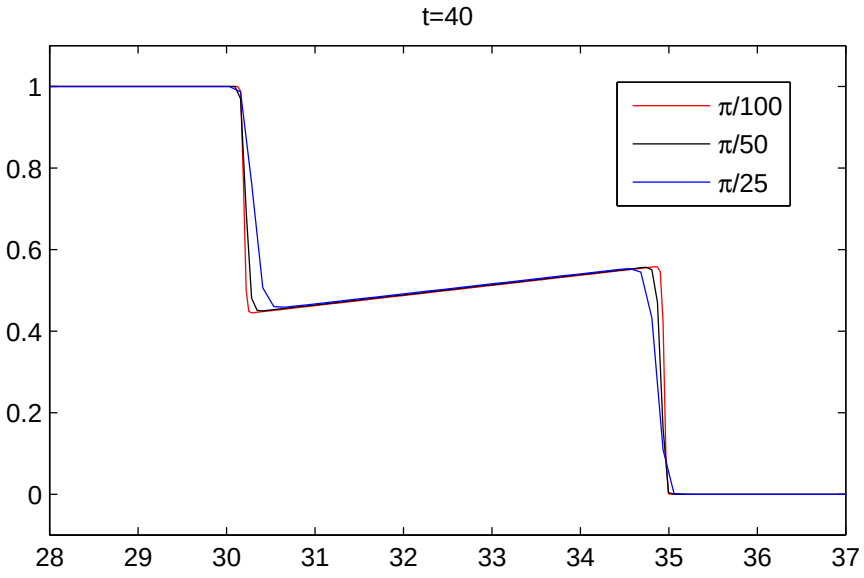

Figura 4.7: Comparação das soluções numéricas obtidas para diferentes malhas em t=40.

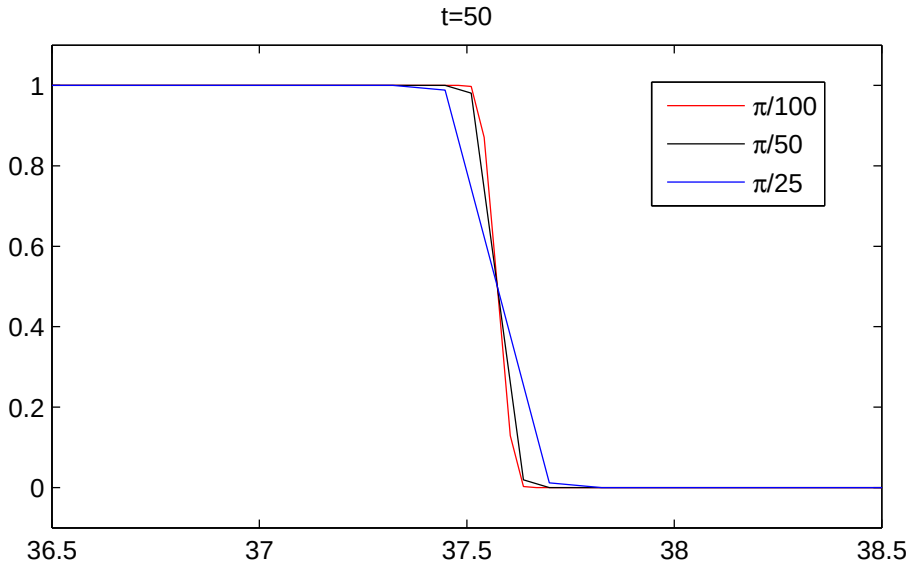

Figura 4.8: Comparação das soluções numéricas obtidas para diferentes malhas em t=50.

```
function u = uestr( ul,ur )
% Calcula u* a partir dos valores à direita e à esquerda
    if ul>=0 && ur>=0
        u=ul;
    elseif ul<=0 && ur<=0
        u=ur;
    elseif ul>=0 && ur<=0
        if (ur+ul)/2>=0
            u=ul;
        else
            u=ur;
        end
    elseif ul<=0 && ur>=0
        u=0;
    end
end

function U = godunov( h,k )
% U(n,:) solução numérica no instante t_n.
% h: passo espacial
% k: passo temporal
    x=0:h:20*pi;
    J=length(x);
    t=0:k:17*pi;
    N=length(t);
%% Condição inicial
    u0=zeros(1,J);
    for j=1:floor(2*J/20)
          u0(j)=1;
    end
    for j=floor(4*J/20):floor(6*J/20)
          u0(j)=1;
    end
%% Aplicação do método
    U=zeros(N,J);
    U(1,:)=u0; % valor inicial
    U(:,1)=U(1,1); % contorno
    U(:,J)=U(1,J);
    for n=1:(N-1) % método (chama função uestr)
        for j=2:(J-1)
            U(n+1,j) = U(n,j) - k/(2*h)*( ( uestr(U(n,j),U(n,j+1)) )^2
                       - ( uestr(U(n,j-1),U(n,j)) )^2 );
        end
    end
end
```

Figura 4.9: Código Matlab

Referências Bibliográficas

[1] Whitham, G.B.; *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience (1974).

[2] LeVeque, R.J.; *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser (1992).