

Tópicos de Matemática Elementar, 2006

Lista de Exercícios n. 2 - Análise Combinatória (versão 6-4-2006)

Exercício 1 *De quantas maneiras diferentes podemos estacionar um Gol e um Uno num estacionamento com 6 vagas?*

De quantas maneiras podemos escolher um presidente e um secretário num conselho de 12 membros?

De quantas maneiras podemos escolher dois vice presidentes num conselho de 12 membros?

Exercício 2 *Quantos inteiros positivos dividem o número 360?*

Quantos deles são par? quantos são múltiplos de 9?

Exercício 3 *Quantos são os anagramas da palavra KOLMOGOROV? E da palavra ARARAQUARA? e da palavra ESCOLHAM?*

Exercício 4

a) De Quantas maneiras podem ser ordenados 40 objetos distintos?

b) De Quantas maneiras diferentes podem ser ordenados 40 objetos idênticos?

c) De Quantas maneiras diferentes podem ser ordenados 40 objetos de forma idêntica, dos quais 8 vermelhos, 12 amarelos, 5 verdes e 15 azuis?

d) De Quantas maneiras diferentes podem ser ordenados 40 objetos de forma idêntica, dos quais 8 vermelhos, 12 amarelos, 5 verdes e 15 azuis, mantendo junto os da mesma cor?

e) De Quantas maneiras diferentes podem ser ordenados 40 objetos distintos, dos quais 8 vermelhos, 12 amarelos, 5 verdes e 15 azuis?

f) De Quantas maneiras diferentes podem ser ordenados 40 objetos distintos, dos quais 8 vermelhos, 12 amarelos, 5 verdes e 15 azuis, mantendo junto os da mesma cor?

Exercício 5 *Considere um baralho de 52 cartas, (13 tipos diferentes: 23456789DJQKA, cada um em 4 naipes diferentes).*

a) Distribuindo 13 cartas a cada um de 4 jogadores, chamados N, E, S, W, quantas são as diferentes maneiras de distribuí-las?

b) Quantas são as mãos diferentes que S pode receber?

c) Em quantas delas há exatamente 7 cartas de espadas? Em quantas há pelo menos 7? Em quantas há pelo menos 6? pelo menos 5?

d) Em quantas delas há exatamente 7 cartas do mesmo naipe? Em quantas há pelo menos 7? Em quantas há pelo menos 6? pelo menos 5?

e) Em quantas há exatamente 4 cartas de um naipe e 3 dos outros três naipes?

f) Em quantas há no máximo 4 cartas de cada naipe?

g) Considere as mãos com exatamente 7 cartas do mesmo naipe, em quantas delas estão presentes pelo menos 3 cartas entre AKQJ do naipe considerado? E nas mãos com pelo menos 7 cartas do mesmo naipe?

Exercício 6 Qual é o número máximo de termos de um polinômio homogêneo de grau p em n variáveis?

Qual é o número máximo de termos de um polinômio de grau p em n variáveis?

Exercício 7 Quantas soluções inteiras possui a equação $\sum_{i=1}^4 x_i = 17$, onde $2 \leq x_i \leq 7 \forall i = 1, 2, 3, 4$?

Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $\sum_{i=1}^4 x_i = 11$, onde $x_1 = x_2$? E com $x_1 > x_2$? E com $x_1 < x_2$?

Exercício 8 Dados 9 pontos em \mathbb{R}^3 com coordenadas inteiras, mostrar que pelo menos um dos segmentos determinados tem ponto médio a coordenadas inteiras.

Exibir um exemplo com apenas 8 pontos em \mathbb{R}^3 com coordenadas inteiras, onde nenhum dos segmentos determinados tenha esta propriedade.

Determinar quantos pontos em \mathbb{R}^4 com coordenadas inteiras precisariam para garantir a mesma propriedade. E em \mathbb{R}^n ?

Exercício 9 Quantas são as permutações dos números de 1 até 9, nas quais não aparecem os blocos 12, 23, 567?

Quantos são os números de no máximo 4 dígitos, onde os dígitos 1, 2 e 3 aparecem pelo menos uma vez?

Exercício 10 Dados dois conjuntos A e B de cardinalidade n e k respectivamente, calcular o número de funções sobrejetoras de A em B . (Dica: contar as não sobrejetoras, em particular considerar as funções tais que um elemento fixado de B não pertence à imagem da função).

Exercício 11 Numa fila de cinema (entrada 5R\$), m pessoas têm nota de 5R\$ e n ($n < m$) têm nota de 10R\$.

Quantas são as filas possíveis?

Em quantas terá problema de troco se a bilheteria começa sem troco?

Em quantas terá problema de troco se a bilheteria começa com 5 notas de 5R\$?

Exercícios do Livro:

pag 89, n. 3.

pag 90, n. 5, 6, 7, 9.

pag 91, n. 16

pag 99, n. 1, 4.

pag 100, n. 8, 11.

pag 101, n. 19, 21, 22.

pag 103, n. 27, 32.

pag 104, n. 36, 37, 40.

pag 110, n. 2, 3.

pag 111, n. 4, 8.

pag 148, n. 21.

pag 149, n. 25, 28, 29, 30.

GABARITO

Exercício 1: 30, 132, 66.

Exercício 2: 24, 18, 8.

Exercício 3: $\frac{10!}{4!}$, $\frac{10!}{5! 3!}$, 8!.

Exercício 4: a) 40!, b) 1, c) $\frac{40!}{8! 12! 5! 15!}$, d) 4!, e) 40!, f) $(4! \cdot 8! \cdot 12! \cdot 5! \cdot 15)$.

Exercício 5: a) $\frac{52!}{(13!)^4}$, b) C_{52}^{13} ,

c) $C_{13}^7 C_{39}^6$, $\sum_{i=7}^{13} C_{13}^i C_{39}^{13-i}$, $\sum_{i=6}^{13} C_{13}^i C_{39}^{13-i}$

d) $4C_{13}^7 C_{39}^6$, $4 \sum_{i=7}^{13} C_{13}^i C_{39}^{13-i}$, $\sum_{i=6}^{13} C_{13}^i C_{39}^{13-i} - C_4^2 C_{13}^6 C_{13}^6 C_{26}^1$, ...

e) $4C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3$

f) $4C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3 + 2C_4^2 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^2 + C_4^3 C_{13}^4 C_{13}^4 C_{13}^1$

g) $4C_{39}^6 (C_4^3 C_{10}^4 - 3C_4^4 C_9^3)$, $\sum_{i=7}^{13} 4C_{39}^{13-i} (C_4^3 C_{10}^{i-3} - 3C_4^4 C_9^{(i-4)})$

Exercício 6: CR_n^p , CR_{n+1}^p .

Exercício 7: 140, 42, 161, 161.

Exercício 9: 283560, 204.

Exercício 10: $\sum_{i=0}^k (-1)^i (k-i)^n C_k^i$.

Exercício 11: $\frac{(m+n)!}{m! n!}$, $\frac{(m+n)!}{(m+1)! (n-1)!}$, $\frac{(m+n)!}{(m+6)! (n-6)!}$.

PS. Eventuais sugestões correções ou discussões sobre os exercícios são bem vindas.