Prova 1 de SMA178 - Tópicos de matemática elementar
Professor: Eugenio Massa 25/04/2006

Escreva o nome e o número USP em todos os papeis que entregar
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS E AFIRMAÇÕES

1: Matemática Financeira.

Questão (1F).
Paulo quer tomar um empréstimo de 1000R$ por 2 anos e tem as seguintes opçoes:
a) juros simples de 0.8% mensal;
b) juros compostos de 0.6% mensal;
c) juros de 8% anual com capitalização mensal;
d) desconto bancário com taxa de desconto de 0.6% mensal;
e) juros de 7% anual com capitalização contínua.
Calcular o montante a ser devolvido no final do emprestimo, em cada uma das opções.
Calcular a taxa anual equivalente (a juros compostos) em cada uma das opções.

Questão (2F).
A loja (1) vende uma TV com a seguinte forma de pagamento: 400R$ no ato da compra e o demais numa única parcela de 600R$ a ser paga 3 meses depois da compra.
A loja (2) pretende vender o mesmo aparelho em 5 parcelas mensais iguais de valor P, a primeira depois de um mês.
Como deve ser determinada esta quantia P, para que esta forma de pagamento não seja pior daquela da loja (1), para um cliente (a) cujo dinheiro está depositado numa poupança que rende 1% ao mês?
Outro cliente chamado (b) guarda seu dinheiro numa poupança que rende a taxa j anual com capitalização mensal: sabendo que (b) foi na loja (1) e ofereceu ao vendedor 970R$ a vista pela TV, mas não aceitou a contra-oferta do vendedor de paga-la 980R$ a vista, estimar a taxa j.

Questão (3F).
Calcular as linhas relativas aos pagamentos número 1, número 10 e número 30, da planilha de amortização de uma dívida de 1200R$, a ser paga em 30 prestações mensais com a taxa de juros de 2% mensal; considerar o caso do método SAC e do método Price.

2: Análise Combinatória.

Questão (1C).
a) Calcular o número de termos do polinômio $(\frac{x}{2} + y^2)^6$.
b) Calcular todos os termos de grau 9 do polinômio acima.
c) Calcular todos os termos de grau 11 do polinômio acima.
d) Calcular o número de termos do polinômio $(\frac{x}{2} + y^2 + 3z)^6$.
e) Calcular todos os termos de grau 11 do polinômio acima.
f) Calcular todos os termos de grau 9 do polinômio acima.

Questão (2C).
a) Demonstrar que dados três números naturais quaisquer, existe uma dupla deles cuja soma é par.
b) Considere 100 bolas: em cada bola está escrito um número inteiro entre x e 1000: determine o menor valor de x (inteiro) que garanta que pelo menos 3 das 100 bolas tenham o mesmo número.
c) Demonstrar que dados 27 números ímpares distintos entre 1 e 100, existe uma dupla deles cuja soma é 102.

Questão (3C).
a) Quantos são os subconjuntos de cardinalidade 7 do conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 25\}$?
b) Quantos são os que contêm o número 6?
Ordene os elementos de cada subconjunto em ordem crescente:
c) em quantos dos subconjuntos o número menor é 6?
d) Em quantos 6 é o quarto número?
e) Em quantos 6 é o quarto e 18 é o sexto?
f) Em quantos 6 é o quarto ou 18 é o sexto?

Questão (4C).
Considere uma urna contendo 5 bolas Pretas, 4 bolas Brancas e 10 bolas Vermelhas.
a) Sacam-se 4 bolas sem considerar a ordem: quantos resultados diferentes podem obter-se?
b) Sacam-se 11 bolas sem considerar a ordem: quantos resultados diferentes podem obter-se?
c) Posso ter certeza que entre as 11, tenha pelo menos uma bola Vermelha? Por que?
d) Posso ter certeza que entre as 11, tenha pelo menos uma bola Branca? Por que?
e) Posso ter certeza que entre as 11, tenham pelo menos três bolas da mesma cor? Por que?
f) Posso ter certeza que entre as 11, tenham pelo menos cinco bolas da mesma cor? Por que?

Questão (1F).

O montante depois de dois anos será, respectivamente:

a) $M = 1000R\$ \ (1 + 24 * 0.008) = 1192R\$$;

b) $M = 1000R\$ \ (1 + 0.006)^{24} = 1154R\$$;

c) $M = 1000R\$ \ (1 + \frac{0.08}{12})^{24} = 1173R\$$;

d) $M = \frac{1000R\$}{(1-24*0.006)} = 1168R\$$

e) $M = 1000R\$ \ lim_{n\to\infty}(1 + \frac{0.07}{n})^{2n} = 1000R\$ \ e^{2*0.07} = 1150R\$$.

A taxa anual equivalente será dada pela fórmula $M = 1000R\$ \ (1 + j_{eq})^2$, i. é $j_{eq} = \sqrt{\frac{M}{1000R\$}} - 1$; logo:

a) $j_{eq} = 9.18\%$;

b) $j_{eq} = 7.42\%$;

c) $j_{eq} = 8.26\%$;

d) $j_{eq} = 8.07\%$;

e) $j_{eq} = 7.24\%$;

Questão (2F).

Calculemos primeiro o valor atual (no dia da compra) da forma de pagamento da loja (1), segundo a taxa de referência do cliente (a), isto é, 1%:

$$(VA)_a = 400R\$ + \frac{600R\$}{1.01^3} = 982.4R\$$$

Esse valor deverá então ser maior o igual ao valor atual (segundo a mesma taxa) do pagamento com a formula da loja (2):

$$(VA)_a = 982.4R\$ \geq \sum_{i=1}^{5} P\left(\frac{1}{1.01}\right)^i = P\frac{1-(1.01)^{-5}}{0.01},$$

i. é $P \leq 202.4R\$$.

Consideremos o cliente (b): como para ele o valor do dinheiro é diferente, será diferente o valor atual da forma de pagamento da loja (1), em particular

$$(VA)_b = 400R\$ + \frac{600R\$}{(1+\frac{j}{12})^3}.$$

Como ele propôs comprar a TV por $970R\$$ ma recusou compra-la por $980R\$$, deduzimos que $970R\$ < (VA)_b < 980R\$$, logo

$$\frac{600R\$}{580R\$} < \left(1 + \frac{j}{12}\right)^3 < \frac{600R\$}{570R\$}$$

e então $1.136\% < \frac{j}{12} < 1.724\%$, isto é, $13.63\% < j < 20.69\%$.

Questão (3F).

- Método SAC: a cada parcela será amortizada a mesma quantia, logo

$$A_k = \frac{1200R\$}{30} = 40R\$, \quad (k = 1, .., 30).$$

Consideremos a primeira linha: a dívida inicial é $D_0 = 1200R\$$, então $J_1 = 1200R\$ * 0.02 = 24R\$$, $P_1 = J_1 + A_1 = 64R\$$ e $D_1 = D_0 - A_1 = 1160R\$$. Logo a linha 1 será

$$k = 1, \ P_1 = 64, \ A_1 = 40, \ J_1 = 24, \ D_1 = 1160.$$

Consideremos a linha 10: a dívida anterior é $D_9 = 1200R\$ - 9 * 40R\$ = 840R\$$, então $J_{10} = 840R\$ * 0.02 = 16.8R\$$, $P_{10} = J_{10} + A_{10} = 56.8R\$$ e $D_{10} = D_9 - A_{10} = 800R\$$. Logo a linha 10 será

$$k = 10,\ P_{10} = 56.8,\ A_{10} = 40,\ J_{10} = 16.8,\ D_{10} = 800.$$

Enfim pela última linha (30) temos $D_{29} = 40R\$$, então $J_{30} = 40R\$ * 0.02 = 0.8R\$$, $P_{30} = J_{30} + A_{30} = 40.8R\$$ e $D_{30} = 0$. Logo a linha 30 será

$$k = 30,\ P_{30} = 40.8,\ A_{30} = 40,\ J_{30} = 0.8,\ D_{30} = 0.$$

- Método Price: devendo ter todas as parcelas iguais, obteremos $P_k = P$ $(k = 1,..,30)$, pela fórmula

$$D_0 = 1200R\$ = P \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{1.02}\right)^i = P\frac{1-(1.02)^{-30}}{0.02},$$

logo $P = 53.58R\$$.
Consideremos a primeira linha: a dívida inicial é $D_0 = 1200R\$$, então $J_1 = 1200R\$ * 0.02 = 24R\$$, $A_1 = P_1 - J_1 = 29.58R\$$ e $D_1 = D_0 - A_1 = 1170.42R\$$. Logo a linha 1 será

$$k = 1,\ P_1 = 53.58,\ A_1 = 29.58,\ J_1 = 24,\ D_1 = 1170.42.$$

Consideremos a linha 10: a dívida anterior D_9 será calculada como valor no nono mês das 21 parcelas seguintes: $D_9 = P \sum_{i=1}^{21} \left(\frac{1}{1.02}\right)^i = P\frac{1-(1.02)^{-21}}{0.02} = 911.46R\$$; então $J_{10} = D_9 * 0.02 \simeq 18.23R\$$, $A_{10} = P_{10} - J_{10} = 35.35R\$$ e $D_{10} = D_9 - A_{10} = 876.11R\$$. Logo a linha 10 será

$$k = 10,\ P_{10} = 53.58,\ A_{10} = 35.35,\ J_{10} = 18.23,\ D_{10} = 876.11.$$

Enfim pela última linha (30) a dívida anterior D_{29} será calculada como valor no mês 29 da última parcela: $D_{29} = \frac{P}{1.02} = 52.53R\$$; então $J_{30} = D_{29} * 0.02 \simeq 1.05R\$$, $A_{30} = P_{30} - J_{30} = D_{29} = 52.53R\$$ e $D_{30} = 0$. Logo a linha 30 será

$$k = 30,\ P_{30} = 53.58,\ A_{30} = 52.53,\ J_{30} = 1.05,\ D_{30} = 0.$$

Questão (1C).
a) Pela fórmula do binômio de Newton temos $(\frac{x}{2} + y^2)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i \ \left(\frac{x}{2}\right)^i \ (y^2)^{6-i}$.
Então é a soma de 7 monômios todos diferentes (pois o grau na x é $i = 0,..,6$); logo o polinômio será composto por 7 termos.
b) O grau de cada monômio será $i + 2(6-i)$, logo o (único) termo de grau 9 será dado por $i = 3$ e será $C_6^3 \ \left(\frac{x}{2}\right)^3 \ y^6 = (20/8)x^3y^6$.
c) Analogamente o (único) termo de grau 11 será dado por $i = 1$ e será $C_6^1 \ \left(\frac{x}{2}\right)^1 \ y^{10} = (6/2)xy^{10} = 3xy^{10}$.
d) Pela fórmula do polinômio de Leibnitz, temos

$$\left(\frac{x}{2} + y^2 + 3z\right)^6 = \sum_{\substack{\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \\ a,b,c \geq 0 \\ a+b+c=6}} P_6^{a,b,c} \ \left(\frac{x}{2}\right)^a \ (y^2)^b (3z)^c$$

Então é a soma de CR_3^6 monômios todos diferentes (pois para cada vetor (a,b,c) o grau na x é a, o na y é $2b$ e o na z é c); logo o polinômio será composto por $CR_3^6 = C_8^6 = 28$ termos.

e) O grau de cada monômio será $a+2b+c$, logo os de grau 11 serão dados pelos vetores que satisfazem (além da equação $a+b+c=6$), a equação $a+2b+c=11$, o que nos da $b=5$ e deixa apenas as duas possibilidades $(a,b,c)=(1,5,0)$ e $(a,b,c)=(0,5,1)$. Logo os (dois) termos de grau 11 serão:

- $P_6^5 \, \left(\frac{x}{2}\right) \, y^{10} = (6/2)xy^{10} = 3xy^{10}$,
- $P_6^5 \, y^{10}(3z) = 18y^{10}z$.

f) Analogamente os de grau 9 serão dados pelos vetores que satisfazem (além da equação $a+b+c=6$), a equação $a+2b+c=9$, que nos da $b=3$ e então $a=3-c$ (onde $c=0,1,2,3$). Logo os (quatro) termos de grau 9 serão $P_6^{3-c,3,c} \, \left(\frac{x}{2}\right)^{3-c} \, y^6(3z)^c$ (onde $c=0,1,2,3$), isto é

- $P_6^{3,3,0} \, \left(\frac{x}{2}\right)^3 \, y^6 = (20/8)x^3y^6$,
- $P_6^{2,3,1} \, \left(\frac{x}{2}\right)^2 \, y^6(3z) = (60*3/4)x^2y^6z = 45x^2y^6z$,
- $P_6^{1,3,2} \, \left(\frac{x}{2}\right) \, y^6(3z)^2 = (60*9/2)xy^6z^2 = 270xy^6z^2$,
- $P_6^{0,3,3} \, y^6(3z)^3 = (20*27)y^6z^3$.

Observação: um problema quase igual foi resolvido na última aula antes da prova!!!!

Questão (2C).

a) Usando o princípio das gavetas, consideremos as gavetas "números pares"e "números ímpares": tendo 3 números, uma das gavetas contém pelo menos dois números. Como tanto a soma de dois pares quanto a soma de dois ímpares dá um número par, a afirmação resulta provada.

b) Consideremos cada número como una gaveta, então o número de gavetas será $G = 1000 - x + 1$. Para termos a certeza de ter pelo menos uma gaveta contendo pelo menos três bolas precisamos de pelo menos 2G+1 bolas. Como as bolas são 100, a equação a ser satisfeita será $100 \geq 2G+1 = 2000-2x+3$, isto é $x \geq 1903/2 = 951.5$.

Logo o menor valor (inteiro) de x que garanta o pedido será 952.

c) Consideremos como gavetas todas as duplas (não ordenadas) de números ímpares entre 1 e 100 e distintos cuja soma seja 102. Como 1 não pode dar 102 somado a um número menor de 100, e como 51 só dá 102 somado com se mesmo (o que não é admitido), as gavetas são

$$G_3 = \{3,99\}, \; G_5 = \{5,97\}, \; G_7 = \{7,95\}, \; ... \;, \; G_{47} = \{47,55\}, \; G_{49} = \{49,53\},$$

isto é, são 24 gavetas.

Na situação pior teremos tanto 1 quanto 51 entre os 27 números, mas ainda teremos 25 números distintos para por nas 24 gavetas, logo uma delas conterá dois elementos, que devendo ser distintos terão soma 102.

Questão (3C).

a) Os subconjuntos de cardinalidade 7 são $C_{25}^7 = 480\,700$: maneiras diferentes de escolher 7 objetos (distintos) entre 25.

b) Os que contêm o número 6 são $C_{24}^6 = 134\,596$: pois fixado o 6, sobram 6 elementos a serem escolhidos entre 24. (também podia ser $C_{25}^7 - C_{24}^7 = 134\,596$).

c) Os nos quais o número menor é 6 são $C_{19}^6 = 27\,132$: pois fixado o 6, sobram seis elementos a serem escolhidos entre os elementos 7,..,25, quer dizer entre 19 elementos.

d) Os nos quais o número 6 é o quarto são $C_5^3 C_{19}^3 = 9\,690$: pois fixado o 6, sobram três elementos a serem escolhidos entre os elementos 1,..,5 e três elementos a serem escolhidos entre os elementos 7,..,25.

e) Os nos quais o número 6 é o quarto e o 18 é o sexto são $C_5^3 * 11 * 7 = 770$: pois fixados o 6 e o

18, sobram três elementos a serem escolhidos entre os elementos 1,..,5, um entre 7,..,17 e outro entre 19,..,25.
f) Os nos quais o número 6 é o quarto ou o 18 é o sexto são $C_5^3 C_{19}^3 + C_{17}^5 * 7 - C_5^3 * 11 * 7 = 52\,236$: pois será a soma dos nos quais o número 6 é o quarto, mais os nos quais o número 18 é o sexto, menos o números dos que satisfazem as duas propriedades (princípio de inclusão-exclusão).

Questão (4C).
a) Equivale a buscar o número de soluções inteiras não negativas da equação $P + B + V = 4$, isto é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.
b) Equivale a buscar o número de soluções inteiras não negativas da equação $P + B + V = 11$, mas com os vínculos $P \leq 5$, $B \leq 4$ e $V \leq 10$ (o vinculo tinha também no caso (a), mas não mudava o problema pois nenhuma variável podia ser maior de 4).
O número de soluções sem considerar o vínculo seria $CR_3^{11} = C_{13}^{11}$. Devemos subtrair o número de soluções que não satisfazem pelo menos um dos vínculo: definamos
$D_P = \{$soluçoes que nao satisfazem $P \leq 5\}$,
$D_B = \{$soluçoes que nao satisfazem $B \leq 4\}$,
$D_V = \{$soluçoes que nao satisfazem $V \leq 10\}$:
pelo princípio de inclusão-exclusão temos que

$$\#(D_P \bigcup D_B \bigcup D_V) =$$
$$\#D_P + \#D_B + \#D_V - \#(D_P \bigcap D_B) - \#(D_P \bigcap D_V) - \#(D_B \bigcap D_V) + \#(D_P \bigcap D_B \bigcap D_V) .$$

Considerando as soluções da equação com $P > 5$ como soluções a variáveis não negativas da nova equação $\widetilde{P} + B + V = 11 - 6 = 5$, sendo $\widetilde{P} = P - 6$, deduzimos que elas são CR_3^5, i. é $\#D_P = CR_3^5$; analogamente temos $\#D_B = CR_3^6$, $\#D_P = CR_3^0$, $\#(D_P \bigcap D_B) = CR_3^0$, enquanto todos os outros termos são zero pois se $V > 10$ então $B = P = 0$.
Logo o resultado é $CR_3^{11} - (CR_3^5 + CR_3^6 + CR_3^0) + CR_3^0 = 29$.
Observação: um problema quase igual foi resolvido na última aula antes da prova!!!!
c) Com 11 bolas, terei certeza de ter uma (na verdade 2) bola Vermelha, pois mesmo tendo todas as Pretas e as Brancas apenas teria 9 bolas, então pelo menos duas serão Vermelhas.
d) Não terei certeza de ter uma bola Branca pois, por exemplo, poderia ter 9 Vermelhas e duas pretas.
e) Terei pelo menos três (na verdade quatro) da mesma cor, pois considerando as cores como gavetas, tendo 11 objetos em três gavetas, pelo menos uma gaveta conterá pelo menos 3 objetos.
f) Não posso ter certeza de ter cinco bolas da mesma cor, pois por exemplo poderia ter 4V 4P 3B.