1. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{z-2}$. 2. $\displaystyle\oint_{|z+1|=2} \frac{zdz}{z+2}$. 3. $\displaystyle\oint_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z-i}dz$.

4. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\cos z}{z-i}dz$. 5. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}dz}{z+i}$. 6. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{izdz}{1-2z}dz$.

7. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}dz}{\pi-2z}$. 8. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{z}dz}{z^2-4}$. 9. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sqrt{z+5}}{1+2z}dz$.

10. $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $2i$, e $\pm 1 + i$.

11. $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2+1}dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $-2i$, e $\pm 1 - i$.

12. $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3}dz$, onde C é o losango de vértices ± 2, e $\pm i$.

13. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+5)}{z^2-2iz+3}dz$, onde o logaritmo é fixado por $\log 5 > 0$.

14. Use a fórmula da derivada para calcular $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2}dz$.

15. Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3}dz$.

16. Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2}dz$. Observe que esta integral independe do ramo particular do logaritmo.

Calcule as integrais dos Exercs. 17 a 20, fixando o ramo da função $\sqrt{z^2+4}$ pela condição $\sqrt{4} = -2$ e tomando para C o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

17. $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3}dz$. 18. $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1}dz$.

19. $\displaystyle\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{z^2-2(1+i)z+4i}dz$. 20. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}dz$.

21. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R, e seja C um contorno fechado simples contido em R. Prove que, para z interior a C,

$$\oint_C \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

Prove, mais geralmente, que

$$\oint_C \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = n!\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $4\pi i$. 2. $-4\pi i$. 3. $\pi(1-e^2)/e$.

4. $\pi(e^2+1)/e$. 5. $2\pi i e$. 6. $\pi/2$.

7. π. 8. $i\pi e^2/2$. 9. $3\pi i/\sqrt{2}$.

10. π. 11. $-\pi$. 12. $\pi i/2e$.

17. Observe que $\sqrt{z^2+4} = \sqrt{z-2i}\sqrt{z+2i}$, de sorte que essa função será negativa em todo o eixo real se pusermos

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z-2i) < \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z+2i) < \frac{3\pi}{2}.$$

Isto corresponde a fazer dois cortes ao longo do eixo imaginário, um de $+2i$ a $+i\infty$ e o outro de $-2i$ a $-i\infty$. (Faça uma figura para entender bem o que se passa.) Escreva o integrando na forma

$$\frac{\sqrt{z^2+4}/2(2z+3)}{z-1/2}$$

e aplique a fórmula de Cauchy.

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Diz-se que uma função $u(x, y)$ é *harmônica* numa região R se nesta região ela possui derivadas de segunda ordem e satisfaz a seguinte equação, conhecida como "equação de Laplace":

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

p103

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica numa região R. Pelo Teorema 3.16, f possui derivadas de todas as ordens em R. Como $d/dz = \partial/\partial x = \partial/\partial(iy)$, as derivadas sucessivas de f podem ser calculadas derivando repetidamente em relação a x ou em relação a iy. Vemos assim que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas contínuas de todas as ordens em R. Podemos então derivar as equações de Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x,$$