Respostas da $3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Variáveis Complexas

Professora: Denise de Mattos **28/09/06**

9. a. $z = \pm\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

b. $z = 2k\pi - i\mathrm{Log}(4 \pm \sqrt{15}), \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

c. $z = \log(2) + \mathrm{i}(\pi + 2\mathrm{k}\pi), \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

d. $z = \frac{1}{2} + k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

10. a. $e^2[\cos(1) + i\,\mathrm{sen}(1)]$

b. $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(1)\left(\frac{1}{e} + e\right) + i\frac{1}{2}\cos(1)\left(e - \frac{1}{e}\right)$

c. $\frac{1}{2}\cos(2)(e^3 + e^{-3}) + i\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2)(e^{-3} - e^3)$

11. a. $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

b. $\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

c. $\frac{3\pi}{2}i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

d. $\frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{4}\mathrm{i} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

e. $e^{-\frac{3\pi}{2}}e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$

f. $e^{-\pi}e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$

g. $e^{-2k\pi}[\cos(\log(2)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\log(2))], \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

h. $e^{\frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi}{4} - 2\mathrm{k}\pi}\{\cos\left(\frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{4} + 2\mathrm{k}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{4} + 2\mathrm{k}\pi\right)\}, k \in \mathbb{Z}$

13. a. 0 e f é contínua em $z_0 = i$

b. $6i$ e f não é contínua em $z_0 = 3i$

c. $\frac{2i+1}{2i-2}$ e f é contínua em $z_0 = 1 + i$

d. 1 e f é contínua em $z_0 = -i$

e. -1 e f é contínua em $z_0 = i$

f. 0 e f é contínua em $z_0 = 0$

g. 0 e f é contínua em $z_0 = -2i$

h. $i - 2$ e f não é contínua em $z_0 = i$

15. a. $n(z - a)^{n-1}$ e f é diferenciável em $\mathbb{C}$

b. $\frac{-n}{(z-b)^{n+1}}$ e f é diferenciável em $\mathbb{C} - \{b\}$

c. $n(a - b)\frac{(z-a)^{n-1}}{(z-b)^{n+1}}$ e f é diferenciável em $\mathbb{C} - \{b\}$

d. f não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$

22. a. $\mathrm{sen}(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\frac{d}{dz}\,\mathrm{sen}(z) = \cos(z)$.

b. $\cos(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $\frac{d}{dz}\cos(z) = -\,\mathrm{sen}(z)$.

c. $\mathrm{tg}(z)$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\,\mathrm{tg}(z) = \sec^2(\mathrm{z})$.

d. $\mathrm{cotg(z)}$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\mathrm{cotg(z)} = -\mathrm{cossec}^2(\mathrm{z})$

e. $\sec(\mathrm{z})$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\sec(z) = \sec(\mathrm{z})\,\mathrm{tg}(\mathrm{z})$

f. $\mathrm{cossec(z)}$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\mathrm{cossec(z)} = -\mathrm{cossec(z)cotg(z)}$.

g. senh(z) é analítica em $\mathbb{C}$ e $\frac{d}{dz}\text{senh(z)} = \text{cosh(z)}$.

h. cosh(z) é analítica em $\mathbb{C}$ e $\frac{d}{dz}\text{cosh(z)} = \text{senh(z)}$.

i. tgh(z) é analítica em $\mathbb{C} - \{z = \frac{\pi}{2}i + k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\text{tgh(z)} = \text{sech}^2\text{(z)}$.

j. cotgh(z) é analítica em $\mathbb{C} - \{z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\text{cotgh(z)} = -\text{cossech}^2\text{(z)}$.

k. sech(z) é analítica em $\mathbb{C} - \{z = \frac{\pi}{2}i + k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\text{sech(z)} = -\text{sech(z)tgh(z)}$.

l. cossech(z) é analítica em $\mathbb{C} - \{z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\frac{d}{dz}\text{cossech(z)} = -\text{cossech(z)cotgh(z)}$.

25. a. $f(z) = \frac{3+2z}{i+2z}$ não é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, pois $z_0 = \frac{-i}{2}$ é ponto interior de A. Mas f é analítica em qualquer aberto de $\mathbb{C}$ que não contenha o ponto $z_0 = \frac{-i}{2}$

b. $f(x+iy) = \cos(x)$ não é analítica em nenhum ponto $z \in \mathbb{C}$, em particular, f não é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

c. $f(x+iy) = e^{-y}[\cos(x) + i\,\text{sen}(x)]$ é analítica em $\mathbb{C}$.

d. A função $\frac{P(z)Q(z)}{z}$ é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$, pois $z_0 = 0 \notin A$. Observe que f não é analítica em $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, pois $z_0 = 0 \in B$.

28. a. $h(z) = \text{sen}(e^z)$ é composta de funções inteiras. Segue da Regra da Cadeia que h é analítica em $\mathbb{C}$ e $h'(z) = e^z \cos(e^z)$.

b. A função e^z é inteira e $\frac{1}{z^2+3}$ é analítica em seu domínio de definição. Segue da regra do quociente que: $h(z) = \frac{e^z}{z^2+3}$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C}; z \neq \pm\sqrt{3}i\}$ e $\forall z \neq \pm\sqrt{3}i$, $h'(z) = \frac{e^z(z^2-2z+3)}{(z^2+3)^2}$.

c. $h(z) = \frac{1}{e^z-1}$ é analítica em $\mathbb{C} - \{z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ e pela regra do quociente, $h'(z) = \frac{-e^z}{(e^z-1)^2}$.

d. A função $h(z) = \cos(\bar{z})$ não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.