Lista 8 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1 Classifique as singularidades:

a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\operatorname{sen}(3z)}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen}^2(\pi z)}$ d) $f(z) = e^{-2/z^3}$

e) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^3(z-\pi)}$ f) $\cos\left(\dfrac{1}{z^3}\right)$ g) $f(z) = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} - \dfrac{1}{z}$

Exercício 2 Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ tem pólo simples em z_0, com resíduo igual a $f(z_0)$.

Exercício 3 Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes:

a) $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen}(z)}{z^6}$ b) $f(z) = \dfrac{e^z}{4z^2 + \pi^2}$ c) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

Exercício 4 Calcule as integrais utilizando o Teorema dos Resíduos:

a) $\displaystyle\oint_C 3z^3 e^{1/z} dz$, ao longo do círculo C de equação $|z-1| = 4$.

b) $\displaystyle\oint_C \frac{2 + 3\operatorname{sen}(\pi z)}{z(z-1)^2} dz$, onde C é um quadrado, tendo vértices em $3+3i$, $3-3i$, $-3+3i$ e $-3-3i$.

c) $\displaystyle\oint_C e^{-1/z} \operatorname{sen}(1/z) dz$, onde C é o círculo $|z| = 1$.

d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$, ao longo do círculo C, cuja equação é $|z| = 3$.

e $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz$, onde C é a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ de raio $R > 1$.

Exercício 5 Mostre que uma função racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0},$$

onde $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ e $m \leq n$, é analítica no infinito, e este ponto é um zero de ordem $n - m$ da função, caso $n > m$.

Exercício 6 Calcule as integrais. $\left(\text{Use o Teorema do Argumento: } \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P\right)$.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=\pi} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} dz$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{5z^4 - 6iz + 2}{z^5 - 3iz^2 + 2z - 1 + i} dz$, onde C envolve todos os zeros de $f(z) = z^5 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$.

Exercício 7 a) Seja h uma função analítica em uma região simplesmente conexa R tal que $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset R$ e tal que $|h(z)| < 1$ para $|z| = 1$. Mostre que a equação $h(z) = z$ tem apenas uma solução em $B_1(0)$.

b) Ache o número de zeros, que satisfazem $|z| < 2$, do polinômio $p(z) = 2z^5 + z^4 - 4z^3 + z - 3$.

Exercício 8 Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 < 4ac$.

c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, onde $a \geq b > 0$.

Exercício 9 Mostre que:

a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+sen^2(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1+acos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $|a| < 1$.

Exercício 10 Calcule as integrais:

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+4}dx$, $a > 0$. b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+4x+20}dx$.

Exercício 11 a) Calcule a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(a^2-x^2)}dx$, com $a > 0$.

b) Conclua que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x(a^2-x^2)}dx = \frac{\pi}{a^2}(1-\cos(a))$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x(a^2-x^2)}dx = 0$.

Gabarito

Exercício 1 a) $z = \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, são singularidades removíveis.

b) $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são singularidades removíveis.

c) $z = 0$ é pólo de ordem 3, e $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, são pólos de ordem 2.

d) $z = 0$ é singularidade essencial.

e) $z = 0$ é pólo de ordem 2 e $z = \pi$ é singularidade removível.

f) $z = 0$ é singularidade essencial.

g) $z = 0$ é singularidade removível e $z = -2$ é um pólo simples.

Exercício 3 a) $z = 0$ é pólo de ordem 3. E, $(resf)(z=0) = -\dfrac{1}{5!}$.

b) $z = \pm\dfrac{i\pi}{2}$ são pólos simples. Neste caso temos, $(resf)(z = i\pi/2) = (resf)(z = -i\pi/2) = \dfrac{1}{4\pi}$.

c) $z = -1$ é pólo de ordem 2. E, $(resf)(z=-1) = -\dfrac{14}{25}$.

$z = 2i$ é pólo de ordem 1. E, $(resf)(z=2i) = \dfrac{7+i}{25}$.

$z = -2i$ é pólo de ordem 1. E, $(resf)(z=-2i) = \dfrac{7-i}{25}$.

Exercício 4 a) $\dfrac{1}{8}$ b) $-6\pi i$ c) $8\pi i$ d) $2\pi i\left(\dfrac{t-1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-t}cos(t)\right)$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

Exercício 6 a) $-12\pi^2 i$ b) $10\pi i$.

Exercício 8 a) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$ c) $\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$

Exercício 10 a) $\dfrac{\pi e^{-2a}}{4}$ b) $\dfrac{\pi e^{-4}(2\cos(2)+\mathrm{sen}(2))}{2}$