Como obter raízes por soma e produto quando a não é 1

Miguel V. S. Frasson, ICMC – USP

Revista do Professor de Matemática, nº 70, pp. 26 e 27

Consideremos uma equação polinomial do segundo grau com coeficientes inteiros, $ax^2 + bx + c = 0$, com discriminante maior que zero e tal que b/a ou c/a (ou ambos) não seja um inteiro.

É claro que a equação pode ser resolvida usando-se a tradicional fórmula de resolução, conhecida no Brasil como fórmula de Báskara. Um outro método de resolução é o por *soma e produto* que, no caso em que estamos considerando, é um pequeno desafio, logo, mais divertido. Pode ser até mais rápido, como veremos, por exemplo, na equação $13x^2 - 170x + 13 = 0$.

Para isso, observamos o seguinte:

Se r_1 e r_2 são números racionais, escritos de forma que tenham o mesmo denominador d, então

$$r_1 = \frac{m}{d}, \quad r_2 = \frac{n}{d}, \quad r_1 + r_2 = \frac{m+n}{d}, \quad \text{e} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{m \times n}{d^2}.$$

Estas observações fornecem um método de reduzir soma e produto de frações a soma e produto de inteiros:

> Escreva S e P como frações de forma que o denominador de P seja o quadrado do denominador de S, digamos, $S = \frac{S'}{d}$ e $P = \frac{P'}{d^2}$. Encontre números m e n com soma S' e produto P'. Então m/d e n/d têm soma S e produto P.

1. $13x^2 - 170x + 13 = 0$

$$S = \frac{170}{13}, \quad P = \frac{13}{13} = \frac{169}{13^2}$$

Então $S' = 170$ e $P' = 169$, que leva a $m = 1$ e $n = 169$. Assim, a solução da equação são os recíprocos $r_1 = 1/13$ e $r_2 = 13$.

Sugerimos ao leitor que, para comparar o trabalho exigido, tente resolver a mesma equação usando a fórmula de Báskara.

2. $6x^2 - 5x - 4 = 0$

$$S = \frac{5}{6}, \quad P = \frac{-4}{6} = \frac{-24}{36}$$

Então $S' = 5$ e $P' = -24$, que leva a $m = -3$ e $n = 8$. Assim, as raízes da equação são $r_1 = -3/6 = -1/2$ e $r_2 = 8/6 = 4/3$.