Equações diferenciais funcionais do ponto de vista das equações de renovação

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 18 de Março de 2009

Assinatura:_______________________

Equações diferenciais funcionais do ponto de vista das equações de renovação

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

Orientador: ***Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Março/2009

Aos meus pais,
com amor . . .

Agradecimentos

Ao professor Miguel, por todo o conhecimento transmitido, dedicação, paciência, seriedade na orientação e, principalmente pelo apoio. Graças a você, tive forças para conseguir concluir este trabalho.

Aos meus pais, Cláudio e Aurora, pela oportunidade do estudo e pelo apoio e incentivo durante todas as etapas dos meus estudos, preocupando-se para que a minha permanência em São Carlos fosse a melhor possível. E a toda minha família, pela preocupação e incentivo.

A Isabela, pelo amor, apoio e compreensão no decorrer deste período.

A todos os meus amigos, pela amizade, auxílio, discussões e por todos os momentos de lazer e divertimento que passamos juntos.

A todos os professores do ICMC, pelo conhecimento, amizade e auxílio indispensáveis à minha formação. Em especial à professora Sandra pela orientação durante as minhas iniciações científicas, despertando em mim, o prazer pela pesquisa matemática.

A todos os funcionários do ICMC, pela atenção e por me proporcionarem um ambiente seguro e adequado ao estudo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que colaboraram de forma direta ou indireta com este trabalho.

Resumo

Estudamos a representação das equações diferenciais funcionais (EDF) lineares autonomas do tipo neutro como uma classe de equações de renovação, isto é, equações do tipo convolução. Utilizando ferramentas como a transformada de Laplace-Stieltjes, estudamos o comportamento assintótico das soluções destas equações quando $t \to \infty$.

Abstract

We studied the representation of linear autonomous functional differential equations (FDE) as a class of renewall equations, that is, convolution-type equations. Using tools like the Laplace-Stieltjes trnsform, we obtained the asymptotic behaviour of those solutions as $t \to \infty$.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, estabelecemos uma conexão entre equações diferenciais funcionais e uma classe de equações de renovação. As principais referências utilizadas neste trabalho são a tese de Frasson [4] e o livro de Hale & Verduyn Lunel [5].

A idéia básica é representar um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial funcional como uma equação de renovação, estudar o espaço das funções forçantes, encontrar a solução da equação de renovação utilizando as tranformadas de Laplace-Stieltjes e então, estudar o comportamento assintótico de tais soluções. O foco principal do trabalho está em equações do tipo neutro, uma vez que encontramos trabalhos similares para equações retardadas em Diekmann *et al.* [3].

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 elaboramos os conceitos básicos, notações e definições da teoria, os quais serão utilizados no restante do texto.

No Capítulo 2 estudamos o problema de representação de uma EDF como equação de renovação, analisamos o espaço das funções forçantes e um método de resolução da equação de renovação utilizando transformadas de Laplace-Stieltjes.

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos algumas estimativas relacionadas com as soluções da equação de renovação e o seu comportamento assintótico.

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Notação e definições

Neste trabalho, denotaremos por $\mathbb{C}^n$ o conjunto dos vetores coluna com n entradas complexas. Assim, todo vetor linha γ com n entradas em $\mathbb{C}$ pode ser identificado com um funcional em $\mathbb{C}^n$ dado por $v \mapsto \gamma v$. Assim, o conjunto dos vetores linha será denotado por $\mathbb{C}^{n*}$. O espaço das matrizes $n \times n$ será denotado por $\mathbb{C}^{n\times n}$. Em qualquer espaço métrico M com métrica d, denotamos a bola aberta com centro x e raio r, $\{y \in M$ tais que $d(x,y) < r\}$ por $B(x,r)$ e a bola fechada com centro x e raio r, $\{y \in M$ tais que $d(x,y) \leqslant r\}$ por $\bar{B}(x,r)$.

Considere $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{C}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[-r,0]$ $(r>0)$ com valores em $\mathbb{C}^n$ com a norma uniforme, ou seja, se $x \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{C}^n)$ então $\|x\| = \sup_{-r\leqslant t\leqslant 0}|x(t)|$. De uma aplicação do teorema de representação de Riesz (veja, por exemplo Rudin [8] ou Royden [7]), podemos representar toda aplicação linear limitada $L : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta) \tag{1.1}$$

onde η é uma função de variação limitada em $[0,r]$ normalizada tal que $\eta(0) = 0$ e η é contínua pela direita em $(0,r)$ com valores no espaço de matrizes $\mathbb{C}^{n\times n}$. Denotamos este conjunto de funções por $NBV([0,r],\mathbb{C}^{n\times n})$. Assim definida, η pode ser estendida em $\mathbb{R}$ por $\eta(\theta) = 0$ se $\theta < 0$ e $\eta(\theta) = \eta(r)$ se $\theta > r$. Funções $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{n\times n}$ tais que a restrição de α a $[0,R]$ pertence a $NBV([0,R],\mathbb{C}^{n\times n})$, para todo $R>0$, são chamadas funções localmente NBV e o conjunto delas é denotado $NBV_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^{n\times n})$.

O teorema de representação de Riesz estabelece que todo funcional linear limitado $f:\mathcal{C}\to\mathbb{C}$ pode ser escrito na forma

$$f(\varphi)=\int_0^r d\psi(\theta)\varphi(-\theta)\stackrel{\text{def}}{=}\langle\psi,\varphi\rangle$$

onde $\psi\in NBV([0,r],\mathbb{C}^{n*})$. Portanto, podemos representar o espaço dual de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}^*=NBV([0,r],\mathbb{C}^{n*})$.

Usaremos a notação comum na teoria de equações retardadas, ou seja, para uma função x de $[-r,\infty)$ para algum espaço de Banach X, definimos $x_t:[-r,0]\to X$ por $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, com $-r\leqslant\theta\leqslant 0$ e $t\geqslant 0$.

A notação utilizada para a derivada de uma função f será $\dot{f}$. A matriz adjunta de A será denotada por $\operatorname{adj}A$. Além disso, a linha $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=\gamma\}$, será denotada por (γ) e definiremos $\int_{(\gamma)}\ldots dz$ como o valor principal da integral $\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}\ldots dz$. A função de Heaviside h_y é definida por $h_y(\theta)=0$ se $\theta<y$ e $h_y(\theta)=1$ se $\theta\geqslant y$.

No restante deste capítulo, veremos alguns resultados necessários para desenvolver a teoria das equações de renovação. Esses resultados foram retirados do livro de Salamon [9] e [11] com pequenas modificações.

1.2 Convolução de funções e medidas de Borel

O primeiro resultado é uma coletânea de resultados menores sobre convoluções entre funções e medidas de Borel. Estes resultados encontram-se em [9].

Observação 1.1.

1. Os elementos de $L^p([0,R),\mathbb{C}^n)$ podem ser representados por classes de equivalência de funções x em $[0,R]$ tais que a integral de Lebesgue de $|x|^p$ sobre $[0,R]$ existe e é finita, onde x é equivalente a y se a integral de Lebesgue de $|x-y|^p$ sobre$[0,R]$ é nula. Para $R>r$, podemos mergulhar $NBV([0,r],\mathbb{C}^{n\times n})$ em $NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ extendendo $\psi\in NBV([0,r],\mathbb{C}^{n\times n})$ a $[0,R)$, definindo $\psi(t)=\psi(r)$ para $t\geqslant r$. Os espaços de funções $NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ e $\mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ "são" subespaços vetoriais de $L^p([0,R),\mathbb{C}^n)$ para $1\leqslant p\leqslant\infty$.

2. Tome $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e q tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (se $p = \infty$, então $q = 1$),$f \in L^p([0,R],\mathbb{C})$ e $g \in L^q([0,R],\mathbb{C})$. Deste modo, a *convolução entre f e g*, definida por

$$g * f(t) = \int_0^t g(s)f(t-s)ds = \int_0^t g(t-s)f(s) \qquad 0 \leqslant t \leqslant R$$

é contínua. Além disso, temos que $g * f(t) = f * g(t)$.

3. Todo $\alpha \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ representa uma medida de Borel em $\mathbb{C}^n$ sem massa fora de $[0,R)$. Esta medida será denotada por $d\alpha$. Para qualquer função $f : [0,R] \to \mathbb{C}^n$, $d\alpha$-integrável, denotamos a integral de f com respeito à medida $d\alpha$ por

$$d\alpha(f) = \int_0^R d\alpha(t)f(t). \tag{1.2}$$

4. Seja $\alpha \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ e $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$. Então, definimos a *convolução entre a medida $d\alpha$ e a função f*,

$$d\alpha * f(t) = \int_0^t d\alpha(s)f(t-s)ds$$

para quase todo $t \in [0,R]$ Temos que $d\alpha * f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$. Se $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^{n*})$, definimos $f * d\alpha$ por

$$\int_0^t f(t-s)d\alpha(s)$$

uma vez que f é um vetor linha. Com isto, temos a seguinite propriedade:

$$(d\alpha * f)^T = f^T * d\alpha^T.$$

5. A aplicação $f \mapsto d\alpha * f$ mapeia $\mathcal{C}_R \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n) : g(0) = 0\}$ em si mesmo e mapeia $NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$ em si mesmo. No entanto, $\mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ é aplicado em si mesmo por $f \mapsto d\alpha * f$ se e somente se α é contínua.

Mostremos que $f \mapsto d\alpha * f$ aplica $\mathcal{C}_R$ em $\mathcal{C}_R$. Se f é contínua em um intervalo $[a,b]$ e f é extendida para $t \in \mathbb{R}$ por $f(t) = f(a)$, $t < a$ e $f(t) = f(b)$, $t > b$, então $|f(t) - f(t+\delta)| \to 0$ uniformemente, quando

$\delta \to 0$. Seja f contínua em $[0, R]$ com $f(0) = 0$ e defina $h(t) = d\alpha * f(t)$. Para $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} h(t+\delta) - h(t) &= \int_0^{t+\delta} d\alpha(s) f(t+\delta-s) - \int_0^t d\alpha(s) f(t-s) \\ &= \underbrace{\int_0^t d\alpha(s)(f(t+\delta-s) - f(t-s))}_{I_1(\delta)} \\ &\quad + \underbrace{\int_t^{t+\delta} d\alpha(s) f(t+\delta-s)}_{I_2(\delta)}. \end{aligned}$$

Portanto, $h(t+\delta) - h(t) = I_1(\delta) + I_2(\delta)$. Quando $\delta \to 0^+$, temos que $f(t+\delta-s) - f(t-s) \to 0$ e então $I_1(\delta) \to 0$. Também podemos ver que, em $I_2(\delta)$, f é integrada sobre $(0, \delta]$. Portanto, uma vez que $f(0) = 0$, temos que $I_2(\delta) \to 0$. Então, $h(t+\delta) - h(t) \to 0$ quando $\delta \to 0^+$, de onde segue que h é contínua. Também $h(0) = 0$. Logo $f \mapsto d\alpha * f$ aplica $\mathcal{C}_R$ em $\mathcal{C}_R$.

Para $f \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ tal que $f(0) \neq 0$, definimos $f_0 \in \mathcal{C}_R$ por $f_0(\cdot) \overset{\text{def}}{=} f(\cdot) - f(0)$. Da primeira parte temos que $d\alpha * f_0 \in \mathcal{C}_R$. Mas

$$d\alpha * f = d\alpha * [f_0 + f(0)] = d\alpha * f_0 + d\alpha * f(0) = d\alpha * f_0 + \alpha \cdot f(0). \quad (1.3)$$

Segue que $d\alpha * f \in \mathcal{C}$ se e somente se último membro de (1.3) for contínuo, que ocorre se e somente se α for uma função contínua.

6. Se f é contínua, então (1.2) pode ser vista como uma integral de Stieltjes. Pelo Teorema de Representação de Riez e usando o item 5, $NBV([0, R), \mathbb{C}^n)$ é (isometricamente isomorfo a) o espaço dual de $\mathcal{C}_R$.

7. Para $\alpha, \beta \in NBV([0, R), \mathbb{C}^{n \times n})$, a convolução $d\alpha * d\beta$ das medidas de Borel $d\alpha$ e $d\beta$ restritas ao intervalo $[0, R)$ é dada pela relação

$$\begin{aligned} [d\alpha * d\beta](g) &= \int_0^R \int_0^{R-s} d\beta(t) d\alpha(s) g(t+s) \\ &= \int_0^R \int_0^{R-t} d\alpha(s) d\beta(t) g(t+s) \end{aligned} \quad (1.4)$$

para toda $g \in L^p([0,R],\mathbb{C}^{n\times n})$. Além disso, se $\alpha, \beta \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$, então $d\alpha * \beta \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$, $d\alpha * \beta = \alpha * d\beta$ e

$$d[\alpha * d\beta] = d\alpha * d\beta \tag{1.5}$$

8. Se $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$, vale a seguinte desigualdade

$$\|d\alpha * f\|_p \leqslant \operatorname{Var}_{[0,R)} \alpha \cdot \|f\|_p \tag{1.6}$$

Observação 1.2. Para α arbitrário, nem sempre podemos esperar a existência e a unicidade para soluções de (2.9). Por exemplo, se $\alpha = \rho \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ dada por $\rho(0) = 0$ e $\rho(t) = I$ para $t > 0$, onde I é a identidade em $\mathbb{C}^{n\times n}$, temos que

$$d\rho * z(t) = \int_0^t d\rho(s) z(t-s) ds = Iz(t) = z(t). \tag{1.7}$$

Portanto, a equação de renovaçõ $z = d\rho * z + f$ é equivalente a $f(t) \equiv 0$. Para excluir tais situações, assumimos que

$$1 \notin \sigma(\alpha_0), \qquad \alpha_0 = \lim_{t\to 0^+} \alpha(t). \tag{1.8}$$

Temos que $\lim_{t\to 0^+} \operatorname{Var}_{[0,t]}(\alpha - \alpha_0\rho) = 0$.

Teorema 1.3. *Seja $\alpha \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ tal que a condição (1.8) é satisfeita. Então valem:*

1. *Para todo $f \in \mathcal{C}_R \overset{def}{=} \{f \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ existe uma única solução $z \in \mathcal{C}_R$,*

$$z = d\alpha * z + f \tag{1.9}$$

   em que z depende de f continuamente com respeito à norma do supremo.

2. *Para todo $f \in NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$, existe uma única solução z de (2.9) em $NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$ que depende continuamente de f com respeito a norma NBV.*

Demonstração. 1. Seja $A : \mathcal{C}_R \mapsto \mathcal{C}_R$ dada por

$$(Ax)(t) = d\alpha * x(t) = \int_0^t d\alpha(s)x(t-s)ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant R.$$

Segue do item 5 da Observação 1.1que A está bem definido. Afirmamos que o operador $A : X \to X$ é linear e limitado. De fato, a linearidade de A segue da linearidade da convolução e A é limitado pois $\|Ax(t)\| = \|d\alpha * x(t)\| \leqslant \operatorname{Var}_{[0,R)} \alpha \cdot \|x\| \leqslant M.\|x\|$ onde as desigualdades seguem do item 8 da Observação 1.1. Seja $\alpha_0 = \lim_{t\to 0^+} \alpha(t)$. Tome $\epsilon > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\operatorname{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] + e^{-\gamma\epsilon} \operatorname{Var}_{[0,R)}[\alpha - \alpha_0\rho] \leqslant \tfrac{1}{2}\|(I-\alpha_0)^{-1}\|^{-1}$$

onde $\|(I-\alpha_0)^{-1}\|$ é a norma usual da matriz $(I-\alpha_0)^{-1}$, isto é,

$$\|(I-\alpha_0)^{-1}\| = \sup_{|v|=1} |(I-\alpha_0)^{-1}v|$$

onde temos que $|\cdot|$ denota a norma em $\mathbb{C}^n$.

Defina em $\mathcal{C}_R$ a norma equivalente

$$\|x\|_\gamma = \sup_{0\leqslant t\leqslant R} |x(t)|e^{-\gamma t}, \qquad x \in \mathcal{C}_R.$$

Então, usando (1.7), temos a seguinte estimativa para todo $x \in \mathcal{C}_R$ e $t \in [0, R]$

$$\begin{aligned}
|(A-\alpha_0)x(t)|e^{-\gamma t} &= |(d\alpha - \alpha_0 d\rho) * x(t)|e^{-\gamma t} \\
&= \left| \int_0^t d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\
&\leqslant \left| \int_0^\epsilon d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\
&\quad + \left| \int_\epsilon^t d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\
&\leqslant \operatorname{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] \sup_{t-\epsilon\leqslant\tau\leqslant t} |x(\tau)|e^{-\gamma\tau} \\
&\quad + \operatorname{Var}_{[\epsilon,t)}[\alpha - \alpha_0\rho] \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t-\epsilon} |x(\tau)|e^{-\gamma\tau} \\
&\leqslant \left(\operatorname{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] + e^{-\gamma\epsilon} \operatorname{Var}_{[0,R)}[\alpha - \alpha_0\rho]\right) \|x\|_\gamma \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\|(I-\alpha_0)^{-1}\|^{-1}\|x\|_\gamma
\end{aligned}$$

pois, se $t-\epsilon \leqslant \tau \leqslant t$, então $|x(\tau)|e^{-\gamma t} < |x(\tau)|e^{-\gamma\tau}$, logo $\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t-\epsilon}|x(\tau)|e^{-\gamma t} \leqslant \sup|x(\tau)|e^{-\gamma\tau} = \|x\|_\gamma$ e, se $0 \leqslant \tau \leqslant t-\epsilon$, então $e^{-\gamma t} = e^{-\gamma(t-\epsilon)-\gamma\epsilon} \leqslant e^{-\gamma\tau}e^{-\gamma\epsilon}$. Portanto, $\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t-\epsilon}|x(s)|e^{-\gamma t} = e^{-\gamma\epsilon}\sup|x(\tau)|e^{-\gamma\tau} = e^{-\gamma\epsilon}\|x\|_\gamma$.

Considere agora a aplicação

$$x \overset{T}{\mapsto} T(x) = (I-\alpha_0)^{-1}[Ax - \alpha_0 x + f], \quad x \in X.$$

Temos que $T(x) \in \mathcal{C}_R$ visto que $Ax - \alpha_0 x + f = d(\alpha - \alpha_0\rho) * x + f$, e ambas parcelas estão em $\mathcal{C}_R$. Além disso, T é uma contração em $\mathcal{C}_R$ com respeito a norma $\|\cdot\|_\gamma$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\|_\gamma &= \sup_{0\leqslant t\leqslant R}|[T(x)-T(y)](t)|e^{-\gamma t} \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant R}|\{(I-\alpha_0)^{-1}[Ax-\alpha_0 x+f] \\
&\qquad + (I-\alpha_0)^{-1}[-Ay+\alpha_0 y - f]\}(t)|e^{-\gamma t} \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant R}|(I-\alpha_0)^{-1}\{[A-\alpha_0](x-y)\}(t)|e^{-\gamma t} \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant R}|(I-\alpha_0)^{-1}|\,|\{[A-\alpha_0](x-y)\}(t)|e^{-\gamma t} \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant R}|(I-\alpha_0)^{-1}|\,\tfrac{1}{2}|(I-\alpha_0)^{-1}|^{-1}\|x-y\|_\gamma \\
&= \tfrac{1}{2}\|x-y\|_\gamma.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um único ponto fixo $z \in \mathcal{C}_R$. Temos que

$$\begin{aligned}
z &= z - \alpha_0 z + \alpha_0 z = (I-\alpha_0)z + \alpha_0 z \\
&= (I-\alpha_0)T(z) + \alpha_0 z = Az - \alpha_0 z + f + \alpha_0 z = Az + f \\
&= d\alpha * z + f.
\end{aligned}$$

Segue o item 1 do teorema.

2. Seja $Ax = d\alpha^T * x$. Então, da parte 1 aplicada a α^T, temos que $z = d\alpha^T * z + f$ se, e somente se, $z = (I-A)^{-1}f$ e $(I-A)^{-1}$ é linear e contínuo, e portanto $1 \notin \sigma(A)$.

Considere a dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{C}_R \times NBV \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle g, \beta\rangle = g^T * d\beta(R).$$

Afirmamos que $A^* : NBV \to NBV$ é dada por $A^*\beta = d\alpha * \beta$. Temos que

$$\begin{aligned}\langle Ag, \beta\rangle &= \langle d\alpha^T * g, \beta\rangle = (d\alpha^T * g)^T * d\beta(R) \\ &= (g^T * d\alpha) * d\beta(R) = g^T * (d\alpha * d\beta)(R) \\ &= g^T * d(d\alpha * \beta)(R) = \langle g, d\alpha * \beta\rangle.\end{aligned}$$

Do fato de $\sigma(A) = \sigma(A^*)$, segue que $1 \notin \sigma(A^*)$, seguindo o resultado. $\square$

1.3 A transformada de Laplace-Stieltjes

Utilizando as técnicas das transformadas de Laplace, o estudo das equações de renovação fica mais fácil, uma vez que transformamos convoluções de funções e medidas em produtos de funções complexas.

Definição 1.4 (Funções e medidas γ-exponencialmente limitadas)**.** Uma função g localmente integrável com domínio de definição $\mathbb{R}_+$ é dita ser γ-exponencialmente limitada se existe $C > 0$ tal que

$$|g(t)| \leqslant Ce^{\gamma t}.$$

Uma medida $d\alpha$ em $\mathbb{R}_+$, representada por uma função $\alpha \in NBV_{\mathrm{loc}}$ é dita ser γ-exponencialmente limitada se sua função variação total é γ-exponencialmente limitada.

Definição 1.5 (Transformada de Laplace)**.** Considere g uma função localmente integrável com domínio de definição $\mathbb{R}_+$ e γ-exponencialmente limitada. A *transformada de Laplace* de g, denotada $\mathcal{L}(g)(z)$, é definida por

$$\mathcal{L}(g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-zt} g(t)dt \tag{1.10}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \gamma$.

Definição 1.6 (Transformada de Laplace-Stieltjes)**.** Seja $d\alpha$ uma medida γ-exponencialmente limitada. Definimos a *transformada de Laplace-Stieltjes* de $d\alpha$ por

$$\mathcal{L}(d\alpha)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t). \tag{1.11}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \gamma$.

Em particular, se α é de variação limitada, segue que $d\alpha$ é γ-exponencialmente limitada para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Desta forma $\mathcal{L}(d\alpha)(z)$ é uma função inteira, uma vez que o intervalo de integração se reduz a $[0, r]$.

Mostremos que se α e β são funções NBV e $\mathcal{L}(d\alpha)(z) = \mathcal{L}(d\beta)(z)$, então $\alpha = \beta$ e se f e g são funções γ-exponencialmente limitadas, com domínio $\mathbb{R}_+$, com $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)$, para z em um semiplano $(\operatorname{Re} z > \gamma)$, então $f(t) = g(t)$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$.

De fato, se α e β são funções NBV tais que

$$\mathcal{L}(d\alpha)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-zt} d\beta(t) = \mathcal{L}(d\beta)(z), \tag{1.12}$$

então, para z, tal que $\operatorname{Re} z > \gamma$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t) - \int_0^\infty e^{-zt} d\beta(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} (d\alpha(t) - d\beta(t)) \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} d(\alpha(t) - \beta(t)). \end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^\infty e^{-zt} d(\alpha(t) - \beta(t)) = 0$, de onde segue (veja, por exemplo o Teorema II.6.3 de Widder [11]) que $\alpha(t) = \beta(t)$. Agora, se

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt = \mathcal{L}(g)(z) \tag{1.13}$$

então, tomando $\alpha(t) = \int_0^t f(u) du$ e $\beta(t) = \int_0^t g(u) du$ temos que vale (1.12). Logo $\alpha(t) = \beta(t)$ o que implica que $f(t) = g(t)$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$, obtendo assim o resultado.

Lema 1.7. *Sejam f e g funções γ-exponencialmente limitadas a valores em $\mathbb{C}$. Para z tal que $\operatorname{Re} z \geqslant \gamma$ temos que*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z).$$

Se f assume valores em $\mathbb{C}^n$ e $\alpha \in NBV([0, \infty], \mathbb{C}^{n \times n})$, temos que

$$\mathcal{L}(d\alpha * f)(z) = \mathcal{L}(d\alpha)(z)\mathcal{L}(f)(z)$$

Demonstração. De fato,

$$\mathcal{L}(f*g)(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\int_0^\infty f(s)g(t-s)dsdt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-zt}f(s)g(t-s)dsdt$$

e, considerando a mudança de variáveis $(t,s)\mapsto(u,v)$, tal que $s=v$, $t=u+v$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f*g)(z) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z(u+v)}f(v)g(u)dvdu\\ &= \int_0^\infty e^{-zv}f(v)dv\int_0^\infty e^{-zu}g(u)du = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z)\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $\mathcal{L}(d\alpha*f)(z)=\mathcal{L}(d\alpha)(z)\mathcal{L}(f)(z)$, obtendo assim o resultado. □

Além disso, para um função f com valores em $\mathbb{C}^n$, definida e de variação limitada em $[0,r]$ e constante em $[r,\infty)$, temos a seguinte identidade

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}\left(f(0)+\mathcal{L}(df)(z)\right). \tag{1.14}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt &= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{z}e^{-zt}f(t)\Big|_0^A + \int_0^A\frac{1}{z}e^{-zt}df(t)\right]\\ &= \frac{1}{z}\left(f(0)+\int_0^r e^{-zt}df(t)\right) = \frac{1}{z}(f(0)+\mathcal{L}(df)(z)).\end{aligned}$$

Lema 1.8. *Seja g uma função γ-exponencialmente limitada e localmente integrável. Então, para $\nu>\gamma$ e para $t>0$ temos a fórmula de inversão*

$$\frac{1}{2}(g(t+)+g(t-)) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}e^{zt}\mathcal{L}(g)(z)dz \tag{1.15}$$

que, para $t=0$, torna-se

$$\frac{1}{2}g(0+) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}\mathcal{L}(g)(z)dz.$$

Demonstração. De fato, para qualquer valor de t, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}e^{zt}\mathcal{L}(g)(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}e^{zt}dz\int_0^\infty e^{-zu}g(u)du\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}\int_0^\infty e^{z(t-u)}g(u)dudz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{e^{z(t-u)}}{t-u} g(u)\Big|_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\nu(t-u)}\operatorname{sen}(\omega(t-u))}{t-u} g(u)du
\end{aligned}
$$

Agora, se $\varphi(u)$ é Lebesgue integrável em $(-\infty,\infty)$ e de variação limitada em alguma vizinhança de um ponto t, pelo Teorema II.7.2 de Widder [11], temos

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(u)\operatorname{sen}(T(t-u))}{t-u}du = \frac{\varphi(t+)+\varphi(t-)}{2}.$$

Assim, tomando $g(u) = 0$ em $(-\infty,0)$, a função $g(u)e^{\nu(t-u)}$ é Lebesgue integrável em $(-\infty,\infty)$, logo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} e^{zt}\mathcal{L}(g)(z)dz \\
&\quad = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\nu(t-u)}\operatorname{sen}(\omega(t-u))}{t-u} g(u)du = \frac{g(t+)+g(t-)}{2}. \quad (1.16)
\end{aligned}
$$

Em $t = 0$, $g(0-) = 0$, logo

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega}\mathcal{L}(g)(z)dz = \frac{1}{2}g(0+).$$

$\square$

A seguir, damos alguns resultados que garantem que a convolução entre funções e medidas exponencialmente limitadas é do mesmo tipo.

Lema 1.9. *Sejam $d\alpha$ uma medida γ-exponencialmente limitada, isto é, para algum $C_1 > 0$,*

$$|v_\alpha(t)| \leqslant C_1 e^{\gamma t}$$

onde v_α é a função variação total de α. Seja f uma função que satisfaz

$$|g(t)| \leqslant C_2 t^k e^{\gamma t},$$

para algum $C_2 > 0$, e $k \geqslant 0$. Então a função $d\alpha * f(t)$ satisfaz

$$|d\alpha * f(t)| \leqslant C_1 C_2 \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{\gamma t}.$$

Demonstração. Estimamos

$$
\begin{aligned}
|d\alpha * f(t)| &= \left| \int_0^t d\alpha(s) f(t-s) \right| \leqslant \int_0^t dv_\alpha(s) |f(t-s)| \\
&\leqslant \int_0^t C_1 e^{\gamma s} C_2 (t-s)^k e^{\gamma(t-s)} ds \leqslant C_1 C_2 e^{\gamma t} \int_0^t (t-s)^k ds \\
&= C_1 C_2 \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{\gamma t}.
\end{aligned}
$$

o que mostra o resultado. $\square$

Corolário 1.10. *Sejam $d\alpha$ uma medida γ-exponencialmente limitada e f uma função β-exponencialmente limitada. Então $d\alpha * f$ é k-exponencilmente limitada para todo $k > \max\{\gamma, \beta\}$.*

Capítulo 2

Equações diferenciais funcionais e equações de renovação

2.1 Problema de valor inicial para EDF

Uma Equação Diferencial Funcional (EDF) linear autônoma é definida pela relação

$$\tfrac{d}{dt}Mx_t = Lx_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

onde $L, M : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ são operadores lineares contínuos, dados por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \qquad M\varphi = \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta), \tag{2.2}$$

onde $\eta, \mu \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$ e tomamnos μ contínua em zero para que possamos garantir a existência e unicidade de solução para nossa equação. Para exemplificar, considere a equação diferencial funcional

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) + Cx(t-1)\right] = Ax(t) + Bx(t-1), \qquad t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

onde A, B e C são matrizes $n \times n$. Tal equação pode ser escrita na forma (2.1) tomando $r = 1$, $\mu(\theta) = 0$ se $\theta < 1$, $\mu(\theta) = -C$ para $\theta \geqslant 1$ e $\eta(\theta) = A$ para $0 < \theta < 1$ e $\eta(\theta) = A + B$ para $\theta \geqslant 1$, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Mx_t &= \frac{d}{dt}\left[x_t(0) - \int_0^1 d\mu(\theta)x_t(-\theta)\right] = \frac{d}{dt}\left[x_t(0) - Cx_t(-1)\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[x(t) + Cx(t-1)\right] \end{aligned}\tag{2.4}$$

e

$$\begin{aligned} Lx_t &= \int_0^r d\eta(\theta)x_t(-\theta) = \int_0^r d\eta(\theta)x(t-\theta) \\ &= Ax(t) + Bx(t-1) \end{aligned} \tag{2.5}$$

portanto, de (2.4) e (2.5) temos (2.3).

Um problema de valor inicial para uma Equação Diferencial Funcional linear autônoma é dado por uma EDF da forma (2.1), sujeita à condição inicial

$$x_0 = \varphi,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t & t \geqslant 0 \\ x_0 = \varphi & \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Equações diferenciais da forma (2.1) com $\mu = 0$, ou seja,

$$\dot{x}(t) = Lx_t,$$

são conhecidas como *equações diferenciais funcionais retardadas*, (EDFR).

2.2 Equações de renovação

No livro de Diekmann *et al.* [3] foi mostrado que equações diferenciais funcionais retardadas podem ser escritas na forma

$$x = k * x + f, \tag{2.7}$$

onde k é uma função de variação limitada e f, a função forçante, é contínua. Na tentativa de obter resultados similares para EDF's, estudaremos as *equações de renovação* e convoluções entre medidas e funções, que serão definidas adiante. Seguem alguns resultados sobre existência, unicidade, dependência contínua e representação de L^p-soluções da equação integral de Volterra-Stieltjes

$$z(t) = \int_0^t d\alpha(s)z(t-s) + f(s), \tag{2.8}$$

ou alternativamente,

$$z = d\alpha * z + f, \tag{2.9}$$

onde $\alpha \in NBV_{\mathrm{loc}}([0, R)\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ determina a medida de Borel $d\alpha$, chamada *núcleo* da equação de renovação (2.8) e $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ é chamada de *função forçante.*

Dados $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$, existem duas maneiras equivalentes de resolver a equação (2.9); ou usando a solução fundamental, ou usando o núcleo resolvente. Apresentaremos as duas a seguir.

2.2.1 A solução fundamental

Definição 2.1. Tome $\alpha \in NBV([0, R), \mathbb{C}^{n\times n})$ satisfazendo a condição (1.8) na página 7. A única solução ξ de

$$\xi = d\alpha * \xi + \rho \tag{2.10}$$

com $\rho(0) = 0$ e $\rho(t) = I$ para $t > 0$ é chamada *solução fundamental* de (2.9).

O Teorema 1.3 nos garante a existência e a unicidade da solução fundamental. Na verdade, a solução fundamental também resolve a equação

$$\xi = \xi * d\alpha + \rho. \tag{2.11}$$

De fato, suponha que ζ é uma solução de (2.11). Então

$$\zeta = \zeta * d\rho = \zeta * d[\xi - d\alpha * \xi] = d[\zeta - \zeta * d\alpha] * \xi = d\rho * \xi = \xi.$$

onde a terceira igualdade é verdadeira pois

$$\begin{aligned}\zeta * d[\xi - d\alpha * \xi] &= d[\zeta * [\xi - d\alpha * \xi]] = d\left[(\zeta - \zeta * d\alpha) * \xi\right] \\ &= d\left[\zeta - \zeta * d\alpha\right] * \epsilon.\end{aligned}$$

Deste modo, vemos que ξ^T é a solução fundamental da equação de renovação transposta

$$z = d\alpha^T * z + f$$

Lema 2.2. *Seja $\alpha \in NBV([0,R), \mathbb{C}^{n\times n})$ satisfazendo a condição (1.8) na página 7 e seja ξ a solução fundamental de (2.9). Então, para $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, existe uma única solução $z \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ de (2.9), isto é, $z = d\alpha * z + f$. Esta solução é dada por*

$$z = d\xi * f \tag{2.12}$$

e depende continuamente de f com respeito à norma L^p.

Demonstração. Seja $x \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ dada por (2.12). Então, por (2.10), temos que

$$\begin{aligned} x = d\xi * f = d(d\alpha * \xi + \rho) * f = (d\alpha * d\xi + d\rho) * f = d\alpha * (d\xi * f) + d\rho * f \\ = d\alpha * x + f. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja x uma solução de (2.9). Então, por (2.11),

$$x = d\rho * x = d(\xi - \xi * d\alpha) * x = \xi * d[x - d\alpha * x] = d\xi * f$$

o que prova a existência e unicidade e que $x = d\xi * f$. A dependência contínua segue de (2.12) e de (1.6). $\square$

2.2.2 Núcleo resolvente

Definição 2.3. Tome $\alpha \in NBV([0,R), \mathbb{C}^{n\times n})$ satisfazendo a condição (1.8) na página 7. A única solução ζ de

$$\zeta = \zeta * d\alpha + \alpha \tag{2.13}$$

é chamada de *núcleo resolvente* de (2.9).

Analogamente ao caso da solução fundamental, temos que o núcleo resolvente também resolve

$$\zeta = d\alpha * \zeta + \alpha \tag{2.14}$$

De fato, se δ é solução de (2.14), então

$$\begin{aligned} \delta = d\alpha * \delta + \alpha = d[\zeta - \zeta * d\alpha] * \delta + \alpha = d\zeta * \delta - d\zeta * d\alpha * \delta + \alpha \\ = \zeta * d\delta - d\zeta * \alpha * d\delta + \alpha = \zeta * d\delta - \zeta * d\alpha * d\delta + \alpha \end{aligned}$$

$$= \zeta * [d\delta - d\alpha * d\delta] + \alpha = \zeta * d[\delta - d\alpha * \delta] + \alpha$$
$$= \zeta * d\alpha + \alpha = \zeta$$

e, portanto, ζ^T é o núcleo resolvente da equação de renovação transposta

$$z = d\alpha^T * z + f.$$

Lema 2.4. *Seja $\alpha \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ satisfazendo a condição* (1.8) *na página 7 e seja ζ o núcleo resolvente de* (2.8)*. Então, para $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, existe uma única solução $z \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ de* (2.9)*, isto é, $z = d\alpha * z + f$. Esta solução é dada por*

$$z = d\zeta * f + f \tag{2.15}$$

e depende continuamente de f com respeito a norma L^p. Além disso, se $f \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ e $f(0) = 0$, então a solução z satisfaz $z \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ e $z(0) = 0$. Se $f \in NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$, então a solução z também satisfaz $z \in NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$

Demonstração. De (2.9) temos que

$$z = d\alpha * z + f.$$

Se aplicarmos a convolução por $d\zeta$ a ambos os lados desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} d\zeta * z &= d\zeta * (d\alpha * z) + d\zeta * f \\ &= (d\zeta * d\alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d(\zeta * d\alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d(\zeta - \alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d\zeta * z - d\alpha * z + d\zeta * f. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$d\zeta * f = d\alpha * z. \tag{2.16}$$

Agora, substituindo (2.16) em (2.9), temos (2.15). A dependência contínua de z com respeito a f segue da solução explícita (2.15) e da desigualdade (1.6). Do item 5 da Observação 1.1, segue que, se $f \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ e $f(0) = 0$, então a solução $z \in \mathcal{C}([0,R],\mathbb{C}^n)$ e $z(0) = 0$ e, se $f \in NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$, então a solução $z \in NBV([0,R),\mathbb{C}^n)$. □

Teorema 2.5. *Seja* $\alpha \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ *satisfazendo a condição* (1.8). *Então existe um único* $\zeta \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ *tal que*

$$\zeta(t) = [\zeta * d\alpha](t) + \alpha(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{2.17}$$

Demonstração. Se $\beta \in NBV([0,R), \mathbb{C}^{n\times n})$, temos que $\beta(t) = \beta(R-)$ para $t \geqslant R$. Tomando $R > 0$, definimos $\alpha_R \in NBV([0,R), \mathbb{C}^{n\times n})$ por $\alpha_R(t) = \alpha(t)$ para $0 \leqslant t < R$ e $\alpha_R(t) = \alpha(R-)$ para $t \geqslant R$. Denotamos por $\zeta_R \in NBV([0,R), \mathbb{C}^{n\times n})$ o núcleo resolvente da equação de renovação (2.8), onde α é substituido por α_R. Assim

$$\zeta_R(t) = d\alpha_R * \zeta_R(t) + \alpha_R(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant R. \tag{2.18}$$

Se $0 < R_2 < R_1$, então $\alpha_{R_2}(t) = \alpha_{R_1}(t)$ para $0 \leqslant t < R_2$. Afirmamos que

$$\zeta_{R_1}(t) = \zeta_{R_2}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant R_2. \tag{2.19}$$

De fato, defina $\tilde{\zeta}_{R_1} \in NBV([0,R_2), \mathbb{C}^{n\times n})$ por $\tilde{\zeta}_{R_1}(t) = \zeta_{R_1}(t)$ para $0 \leqslant t < R_2$ e $\tilde{\zeta}_{R_1}(t) = \zeta_{R_1}(R_2-)$ para $t \geqslant R_2$. Então, para $0 \leqslant t < R_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{R_1}(t) &= \zeta_{R_1}(t) = d\alpha_{R_1} * \zeta_{R_1}(t) + \alpha_{R_1}(t) \\ &= d\alpha_{R_2} * \tilde{\zeta}_{R_1}(t) + \alpha_{R_2}(t). \end{aligned}$$

Para $t = R_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{R_1}(R_2) &= \lim_{t\to R_2-} \zeta_{R_1}(t) \\ &= \lim_{t\to R_2-} \int_0^t d\alpha_{R_1}(s)\zeta_{R_1}(t-s) + \alpha_{R_1}(t) \\ &= \lim_{t\to R_2-} \int_{[0,t]} d\alpha_{R_2}(s)\zeta_{R_1}(t-s) + \alpha_{R_2}(t). \end{aligned}$$

Como a aplicação $s \mapsto \tilde{\zeta}_{R_1}(t-s)$ é contínua pela esquerda para $0 \leqslant s < t$, temos que

$$\tilde{\zeta}_{R_1}(R_2) = \int_{[0,R_2)} d\alpha_{R_2}(s)\tilde{\zeta}_{R_1}(R_2 - s-) + \alpha_{R_2}(R_2-).$$

Como $d\alpha_{R_2}$ não tem massa fora de $[0, R_2)$ e usando a definição de α_{R_2}, temos

$$\tilde{\zeta}_{R_1}(R_2) = \int_{[0,R_2]} d\alpha_{R_2}(s)\tilde{\zeta}_{R_1}(R_2 - s) + \alpha_{R_2}(R_2)$$

$$= \int_0^{R_2} d\alpha_{R_2}\tilde{\zeta}_{R_1}(R_2 - s) + \alpha_{R_2}(R_2). \qquad = d\alpha_{R_2} * \tilde{\zeta}(R_2) + \alpha_{R_2}(R_2)$$

Portanto, $\tilde{\zeta}_{R_1}$ é solução de (2.18) para $R = R_2$. Então, $\zeta_{R_2} = \tilde{\zeta}_{R_1}$ pela unicidade do núcleo resolvente, provando a afirmação (2.19). Tome agora $\zeta(0) = 0$ e, para $t > 0$, $\zeta(t) = \zeta_{t+1}(t)$. Assim definido, ζ satisfaz (2.17), é de variação limitada em intervalos finitos e sua unicidade segue de ζ_{t+1} para todo $t > 0$. □

Corolário 2.6. *Seja $\alpha \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ satisfazendo a condição* (1.8). *Para todas as funções $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ que satisfaçam uma das seguintes propriedades*

1. *A restrição de f a intervalos $[0, R]$ pertence a $L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$, para $R > 0$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$;*
2. *f pertence a $NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$;*
3. *A restrição de f a intervalos $[0, R]$ pertence a $\mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$, para $R > 0$ e $f(0) = 0$.*

Então existe uma única solução z de (2.9)*, isto é*

$$z(t) = [d\alpha * z](t) + f(t),$$

tal que z tem as mesmas propriedades de f. Além disso, z é dada explicitamente pela fórmula

$$z(t) = [d\zeta * f](t) + f(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Demonstração. Segue do Lema 2.4 extendendo as conclusões para funções definidas em $[0, \infty)$. O núcleo resolvente é encontrado a partir do Teorema 2.5. □

2.3 Representação de uma EDF como uma equação de renovação

Estabeleceremos aqui uma equivalência entre equações diferenciais funcionais e uma classe de equações de renovação. Consideramos, como no capítulo anterior, o problema de valor inicial em EDF

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t & t \geqslant 0 \\ x_0 = \varphi & \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $M, L : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ são dados por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \qquad M\varphi = \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta). \tag{2.22}$$

e $\mu, \eta \in NBV([0,r], \mathbb{C}^n)$ com μ contínua em 0. Iniciamos nosso estudo com o seguinte resultado.

Lema 2.7. *O problema de valor inicial* (2.21) *é equivalente à seguinte equação de renovação*

$$x(t) = dk * x(t) + F\varphi(t) \qquad t \geqslant 0, \tag{2.23}$$

escrita na forma integral como

$$x(t) = \int_0^t [dk(\theta)x(t-\theta) + F\varphi(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{2.24}$$

onde k é dado por

$$k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds \tag{2.25}$$

e $F : \mathcal{C} \to L^\infty$, definida por

$$F\varphi(t) = M\varphi + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_0^t \left[\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta)\right] ds, \qquad t \geqslant 0, \tag{2.26}$$

aplica a condição inicial $\varphi \in \mathcal{C}$ na função forçante correspondente da equação de renovação (2.23)*. Para $\varphi \in \mathcal{C}$, temos que $F\varphi(\cdot)$ é constante em $[r, \infty)$, $F\varphi(0) = \varphi(0)$ e $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$ é contínua.*

Demonstração. Integrando o sistema (2.21), obtemos

$$Mx_t - M\varphi = \int_0^t \left[\int_0^r d\eta(\theta)x(s-\theta)\right] ds. \tag{2.27}$$

Agora, para qualquer $\xi \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$ e para $0 < t \leqslant r$, temos

$$\int_0^r d\xi(\theta)x(t-\theta) = \int_0^t d\xi(\theta)x(t-\theta) + \int_t^r d\xi(\theta)x(t-\theta)$$

$$= \int_0^t d\xi(\theta)x(t-\theta) + \int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t-\theta) \tag{2.28}$$

pois para $t \leqslant \theta \leqslant r$, $t-\theta \leqslant 0$ e $x(t-\theta) = \varphi(t-\theta)$. Usando o fato de que para $\theta \notin [0,r]$, a variação de ξ se anula em $(r,t]$, vemos que

$$\int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t-\theta) = 0,$$
$$\int_0^t d\xi(\theta)x(t-\theta) = \int_0^r d\xi(\theta)x(t-\theta).$$

Portanto, para $t > 0$ e para todo $\xi \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$, escrevemos

$$\int_0^r d\xi(\theta)x(t-\theta) = \int_0^t d\xi(\theta)x(t-\theta) + \int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t-\theta). \tag{2.29}$$

Aplicando (2.29) em (2.27), para $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^r d\mu(\theta)x(t-\theta) + M\varphi + \int_0^t \left[\int_0^r d\eta(\theta)x(s-\theta)\right] ds \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + M\varphi \\
&\quad + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s-\theta) + \int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta)\right] ds \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s-\theta)\right] ds \\
&\quad + M\varphi + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_0^t \left[\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta)\right] ds.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini na segunda integral e definindo $F\varphi(t)$ como em (2.26), que contém explicitamente o dado inicial φ, temos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s-\theta)\right] ds + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t d\eta(\theta) \left[\int_\theta^t x(s-\theta)ds\right] + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t d\eta(\theta) \left[\int_0^{t-\theta} x(s)ds\right] + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \eta(\theta) \left[\int_0^{t-\theta} x(s)ds\right] \Big|_{\theta=0}^t + \int_0^t \eta(\theta)x(t-\theta)d\theta + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t \eta(\theta)x(t-\theta)d\theta + F\varphi(t)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t [d\mu(\theta) + \eta(\theta)d\theta]x(t-\theta) + F\varphi(t)$$
$$= \int_0^t dk(\theta)x(t-\theta) + F\varphi(t) = dk * x(t) + F\varphi(t).$$

Temos que

$$\begin{aligned} F\varphi(0) &= M\varphi + \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta) + \int_0^0 \left[\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta)\right] ds \\ &= \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta) + \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta) \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Como μ é contínua em $\theta = 0$, segue que k também o é. Logo (2.21) também é verdadeira para $t = 0$. Também podemos mostrar que $F\varphi(t)$ é constante para $t \geqslant r$, uma vez que as variações de μ e η são nulas para $\theta \geqslant r$.

Mostremos agora a continuidade de $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$. O único termo não contínuo em (2.26) é o segundo. Então, a extensão de φ de $[-r, 0]$ a $[-r, \infty)$ definida por $\varphi(\theta) = \varphi(0)$, se $\theta \geqslant 0$, vemos que tal extensão é contínua. Além disso, a aplicação $t \overset{T}{\mapsto} \varphi_t$ é contínua. Como $\psi \overset{S}{\mapsto} \int_0^r d\mu(\theta)\psi(-\theta)$ também é uma aplicação contínua, segue que a composição

$$\begin{aligned} t \overset{S\circ T}{\longmapsto} \int_0^r d\mu(\theta)\varphi_t(-\theta) &= \int_0^t d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) \\ &= \int_0^t d\mu(\theta)\varphi(0) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) \\ &= \mu(t)\varphi(0) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) \end{aligned}$$

é contínua. Portanto,

$$\int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) = \int_0^r d\mu(\theta)\varphi_t(-\theta) - \mu(t)\cdot\varphi(0),$$

de onde segue que $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$ é contínua. $\square$

Teorema 2.8. *A solução $x(t)$ do PVI* (2.21) *é contínua. Além disso $x(t)$ é dada por*

$$x = d\zeta * F\varphi + F\varphi \tag{2.30}$$

onde ζ é o núcleo resolvente de k (cf. Def. 2.3 e Teo. 2.5), onde k é dado por (2.25).

Demonstração. Podemos reescrever a equação de renovação (2.23) na forma

$$y = dk * y + F_0(\varphi) \tag{2.31}$$

onde $y = x - \varphi(0)$ e com

$$F_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0). \tag{2.32}$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= dk * x + F\varphi \\ x - \varphi(0) &= dk * x + F\varphi - \varphi(0) \\ x - \varphi(0) &= dk * [x - \varphi(0)] + F\varphi - \varphi(0) + dk * \varphi(0) \\ y &= dk * y + \underbrace{F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0)}_{\stackrel{\text{def}}{=} F_0(\varphi)}. \end{aligned}$$

Das propriedades de $F\varphi$ do Lema 2.7, segue que $F_0(\varphi)(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$ e $F_0(\varphi)(0) = 0$. Do Teorema 2.5, na página 20, com $\alpha = k$, onde k é dado por (2.25), encontramos o único núcleo resolvente ζ. Usando a forma explícita da solução, dada pelo Corolário 2.6, na página 21, temos

$$y = d\zeta * F_0(\varphi) + F_0(\varphi) \tag{2.33}$$

como uma representação alternativa da solução do PVI (2.21) por meio da solução de uma equação de renovação em termos do espaço $\{f \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n);\ f(0) = 0\}$. Destas considerações, segue que $y = x - \varphi(0)$ é contínua e $y(0) = 0$. Isto nos dá que as soluções $x(t)$ de (2.21) são contínuas e $x(0) = \varphi(0)$.

Além disso, de (2.33) e (2.32), e usando $d\zeta * k = \zeta - k$, temos

$$\begin{aligned} y &= d\zeta * F_0(\varphi) + F_0(\varphi) \\ x - \varphi(0) &= d\zeta * \big(F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0)\big) + F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0) \\ x &= d\zeta * F\varphi - d\zeta * \varphi(0) + d\zeta * k \cdot \varphi(0) + F\varphi + k \cdot \varphi(0) \\ x &= d\zeta * F\varphi - \zeta \cdot \varphi(0) + (\zeta - k) \cdot \varphi(0) + F\varphi + k \cdot \varphi(0) \\ x &= d\zeta * F\varphi + F\varphi. \end{aligned}$$

donde obtemos (2.30) $\square$

Finalizamos esta seção dando estimativas da limitação exponencial tanto do núcleo resolvente quanto da solução. Estas estimativas garantem que podemos aplicar resultados das transformadas de Laplace-Stieltjes no estudo das soluções das EDF.

Limitação exponencial das soluções de equações de renovação

Lema 2.9. *O núcleo k dado por* (2.25)*, isto é,*

$$k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds,$$

é ϵ-exponencialmente limitado para todo $\epsilon > 0$. Além disso, temos

$$|v_k| < Ct \tag{2.34}$$

para $C > 0$ suficientemente grande, onde v_k é a função variação total de k.

Demonstração. Como μ e ϵ pertencem a $NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$, temos que η é constante a partir de $\theta \geqslant r$ e

$$k(\theta) = k(r) + (\theta - r)\eta(r).$$

Disto seguem todas as afirmações a respeito de k. □

Teorema 2.10. *O núcleo resolvente ζ de k, onde k é dado por* (2.25)*, pertence a $NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ e é γ-exponencialmente limitado, para algum γ suficientemente grande. Além disso, ζ é dado pela série*

$$\zeta = k + dk * k + dk * dk * k + \cdots \tag{2.35}$$

Demonstração. Dos Lemas 1.9 e 2.9, temos que

$$|k(t)| \leqslant Ct$$
$$|dk * k(t)| \leqslant C^2 \frac{t^2}{2!}$$
$$|dk * dk * k(t)| \leqslant C^3 \frac{t^3}{3!}$$

e de forma geral,

$$|\underbrace{dk * dk * \cdots * dk * k(t)}_{n-1 \text{ convoluções}}| \leqslant C^n \frac{t^n}{n!}. \tag{2.36}$$

Desta forma, podemos estimar a série

$$|k + dk * k + dk * dk * k + \cdots| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ct)^n}{n!} < e^{Ct}. \tag{2.37}$$

Como as mesmas estimativas (2.36) e (2.37) valem para a variação total de k, como cada parcela é NBV_{loc} (cf. Corolário 2.6) e como NBV_{loc} é completo, segue que o limite da série é uma função localmente de variação limitada. Defina ζ como o valor da séire. Destas discussões, vem que

$$v_\zeta(t) \leqslant e^{CT},$$

isto é, ζ é C-exponencialmente limitada. Por simples substituição, é fácil ver que ζ definida como acima é o núcleo resolvente de k, isto é,

$$\zeta = dk * \zeta + k.$$

Isto nos prova o resultado. □

Da representação (2.30) para a solução do PVI (2.21), segue imediatamente o seguinte fato.

Corolário 2.11. *A solução x de* (2.21)*, dada por* (2.30)*, é γ-exponencialmente limitada para γ suficientemente grande.*

2.4 O espaço das funções forçantes

Nesta seção, descreveremos o espaço das funções forçantes através da representação de EDF's como equações de renovação (2.23).

A partir do item 5 da Observação 1.1, para $\alpha \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$, temos que a aplicação $f \mapsto d\alpha * f$ leva o espaço $\{f \in \mathcal{C}([0,r], \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ em si mesmo, mas o espaço $\mathcal{C}$ não é necessariamente aplicado em si mesmo por este operador. Portanto, a correspondência biunívoca entre a função forçante e a solução da equação de renovação é fechada no espaço $\{f \in \mathcal{C}([0,r], \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$, mas não o é em $\mathcal{C}([0,r], \mathbb{C}^n)$. As mesmas afirmações são válidas para os espaços $\{f \in \mathcal{C}([0,\infty), \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ e $\mathcal{C}([0,\infty), \mathbb{C}^n)$. Para EDF's retardadas, isto é, quanto $\mu \equiv 0$, encontramos em Hale & Verduyn Lunel [5] que $\{f \in \mathcal{C}([0,\infty), C^n) : f(t) = f(r),\ \text{para}\ t \geqslant r\}$ é uma escolha comum para o espaço das funções forçantes da representação desta classe de EDF's como equações de renovação. Observamos que para EDFR, a restrição $f(0) = 0$ não é necessária, pois $k(\theta) = \int_0^\theta \eta(\tau)d\tau$, que é contínua. Do item 5 da Observação 1.1, vem que os espaços $\mathcal{C}([0,r],\mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{C}^n)$ são fechados com respeito à aplicação $f \mapsto dk * f$.

Definição 2.12. O espaço $\mathcal{F}$ das funções forçantes f da equação de renovação

$$x = dk * x + f \tag{2.38}$$

onde k é como em (2.25) é definido como o conjunto das funções $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{C}^n$ tais que $f + \mu \cdot f(0)$ é contínua e $f(t) = f(r)$ para $t \geqslant r$. Pelo Lema 2.7, para cada $\varphi \in \mathcal{C}$, temos que $F\varphi \in \mathcal{F}$.

Com esta definição, podemos ver com clareza as afirmações acima acerca de EDFR's, ou seja, segue desta definição que, como $\mu \equiv 0$, então o espaço das funções forçantes para EDFR será dado por $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}([0,\infty)\mathbb{C}^n) : f(t) = f(r)\ \text{para}\ t \geqslant r\}$.

Temos que $\mathcal{F}$ é um espaço linear e podemos definir uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ em $\mathcal{F}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \|f + \mu \cdot f(0)\|_{\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{C}^n)}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do supremo, de modo que o espaço é completo.

Lema 2.13. *Para cada $f \in \mathcal{F}$, existe uma única solução x definida em $[0,\infty)$ de* (2.38) *tal que x é contínua em $[0,\infty)$ e $x(0) = f(0)$.*

Demonstração. Temos as seguintes equações equivalentes

$$\begin{gathered} x = dk * x + f \\ x - f(0) = dk * x + f - f(0) \\ x - f(0) = dk * [x - f(0)] + f - f(0) + dk * f(0) \\ x - f(0) = dk * [x - f(0)] + f - f(0) + k \cdot f(0) \\ x - f(0) = dk * [x - f(0)] + f - f(0) + [\mu + \textstyle\int \eta] \cdot f(0). \end{gathered}$$

Como $f + k \cdot f(0) - f(0)$ é contínua e se anula em 0, pelo Corolário 2.6, $x - f(0)$ é contínua e $x(0) - f(0) = 0$, logo $x(t)$ é contínua e $x(0) = f(0)$. $\square$

2.5 Resolução de EDF por transformadas de Laplace

Nas seções anteriores, vimos que a equação de renovação

$$x = dk * x + f \tag{2.39}$$

onde $f \in \mathcal{F}$, está relacionada com o problema de valor inicial (2.21) pelos Lema 2.7 e Teorema 2.8. Sua solução é dada por

$$x = d\zeta * f + f \tag{2.40}$$

onde ζ é o núcleo resolvente de (2.39) (ζ é uma função NBV). Do Teorema 2.10 segue que $\zeta \in NBV_{\mathrm{loc}}$ e é exponencialmente limitada. Do Corolário 2.11, segue que x é γ-exponencialmente limitada. Portanto, podemos aplicar a transformada de Laplace em (2.39) para obter, para $\operatorname{Re} z$ suficientemente grande, a equação

$$\mathcal{L}(x)(z) = \mathcal{L}(dk)(z)\mathcal{L}(x)(z) + \mathcal{L}(f)(z) \tag{2.41}$$

que torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x)(z) &= (I - \mathcal{L}(dk)(z))^{-1}\mathcal{L}(f)(z) \\
&= (zI - z\mathcal{L}(dk)(z))^{-1}z\mathcal{L}(f)(z) \\
&= \Delta(z)^{-1}(f(0) + \mathcal{L}(df)(z)).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Note que $\mathcal{L}(df)(z)$ está bem definida pois f é soma de uma função contínua com uma função localmente de variação limitada e $\Delta(z)$ é definido por

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &= z(I - \mathcal{L}(dk)(z)) \\
&= (zI - z\mathcal{L}(d\mu)(z) - z\mathcal{L}(\eta)(z)) = (zI - z\mathcal{L}(d\mu)(z) - \mathcal{L}(d\eta)(z)) \\
&= z\left[I - \int_0^r e^{-zt}d\mu(t)\right] - \int_0^r e^{-zt}d\eta(t).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Como $z \mapsto \Delta(z)$ e $z \mapsto \int_0^r e^{-zt}df(t)$ são funções inteiras, então o lado direito de (2.42) é uma função meromorfa com, possivelmente, pólos nas raízes da *equação característica*

$$\det \Delta(z) = 0. \tag{2.44}$$

Mostremos que existe um semi-plano que não possui raízes de $\det \Delta(z)$.

Lema 2.14. *As raízes de* (2.44) *estão localizadas em um semi-plano esquerdo* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \gamma_0\}$ *para algum* $\gamma_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Mostremos que, quando $\operatorname{Re} z \to \infty$, então

$$\int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \to 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \to \eta(0-). \tag{2.45}$$

Para isto, seja $\epsilon > 0$ dado. Como μ é contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que a variação de μ em $[0, \delta]$ é menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Tome $N > 0$ tal que $e^{-\delta N} \operatorname{Var}_{[\delta,r]} \mu < \frac{\epsilon}{2}$. Então, para z tal que $\operatorname{Re} z > N$, estimamos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| &= \left\| \int_0^\delta e^{-z\theta} d\mu(\theta) + \int_\delta^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| \\
&\leqslant \left\| \int_0^\delta e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| + \left\| \int_\delta^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| \\
&\leqslant \max_{\theta \in [0,\delta]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[0,\delta]} \mu + \max_{\theta \in [\delta,r]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[\delta,r]} \mu \\
&\leqslant \operatorname{Var}_{[0,\delta]} \mu + e^{-\delta N} \operatorname{Var}_{[\delta,r]} \mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Concluímos a demonstração argumentando da mesma forma para $\bar{\eta} = \eta - \eta(0-)$, que é contínua em zero. Então temos que, quando $\operatorname{Re} z$ é suficientemente grande, $\Delta(z) = z(I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta)) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta)$ se aproxima de $zI - \eta(0-)$ e, consequentemente, é não-singular. □

Podemos inverter a representação da transformada de Laplace da solução para obter uma caracterização para a solução.

Teorema 2.15. *Seja* k *dado por* $k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds$, *onde* μ *e* η *são funções NBV e* μ *é contínua em* $\theta = 0$. *Para* $f \in \mathcal{F}$, *a solução* x *da equação de renovação*

$$x = dk * x + f \tag{2.46}$$

admite, para $t > 0$, *a representação*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz \tag{2.47}$$

para γ *suficientemente grande.*

Demonstração. Pelo Lema 2.14, temos que $\Delta(z)$ é não-singular para $\operatorname{Re} z$ suficientemente grande. Como x é contínua e exponencialmente limitada, temos então, pela fórmula de inversão (1.15), que

$$x(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{zt}\mathcal{L}(x)(z)dz \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt}\mathcal{L}(x)(z)dz.$$

Mas por (2.42) temos que

$$\mathcal{L}(x)(z) = \Delta(z)^{-1}(f(0) + \mathcal{L}(df)(z)),$$

de onde segue que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt}\Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^\infty e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz.$$

$\square$

Da representação (2.47) da solução de (2.46), conseguimos estudar o comportamento assintótico das soluções, porém, antes, é necessário estudar algumas estimativas relacionadas a $\Delta(z)$.

Capítulo 3

Comportamento assintótico

3.1 Estimativas para $\Delta(z)$ e quantidades relacionadas

Nesta seção estudaremos alguns resultados relacionados com a localização das raízes e algumas estimativas da matriz característica $\Delta(z)$, dada em (2.43), além de seu determinante e sua inversa. A partir desses resultados, estudaremos o comportamento assintótico das soluções. Podemos escrever $\Delta(z)$ como

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \tag{3.1}$$

onde

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta). \tag{3.2}$$

É possível que existam infinitas raízes da equação característica (2.44) em uma faixa vertical do plano complexo $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$. Um exemplo é considerar a equação característica da seguinte EDF escalar

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = 0$$

dada por

$$\Psi(z) = z(1 - e^{-z})$$

e tem todas as suas raízes da forma $2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$ e, portanto, estão sobre a reta $\operatorname{Re} z = 0$. Isto é uma complicação extra para equações neutras que não é observado em equações diferenciais retardadas. Veja, por exemplo, Teorema I.4.4 de Diekmann *et al.* [3].

Para que possamos controlar o comportamento de $|\Delta(z)|$ quando $|z| \to \infty$, impomos a seguinte hipótese sobre o núcleo μ:

(J) As entradas μ_{ij} de μ têm um salto antes de se tornarem constantes, isto é, existe t_{ij} com $\mu_{ij}(t_{ij}-) \neq \mu_{ij}(t_{ij}+)$ e $\mu_{ij}(t_{ij}+) = \mu_{ij}(t)$ para $t > t_{ij}$.

Por exemplo, μ pode ser uma função escada. Neste caso

$$\Delta_0(z) = I - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-zr_j} A_j.$$

O próximo lema é uma adaptação do Teorema 4.6 de Verduyn Lunel [10]. Recordamos que $\mathbb{C}_{\gamma_1,\gamma_2} = \{z \in \mathbb{C} : \gamma_1 < \operatorname{Re} z < \gamma_2\}$.

Lema 3.1. *Se μ satistaz (J), então os zeros de* $\det \Delta_0(z)$ *estão localizados em uma faixa finita $\mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$. Para z na faixa $\mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$, existem constantes positivas m, M e τ tais que*

$$m \leqslant |\det \Delta_0(z)| \leqslant M. \tag{3.3}$$

Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$, para uma escolha adequada de m e M, a estimativa (3.3) *vale para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$ fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de* $\det \Delta_0(\cdot)$.

Demonstração. Dividiremos a prova em quatro partes. Na parte 1, escrevemos $\det \Delta_0(z)$ como a transformada de Laplace-Stieltjes de uma medida $d\tilde{\mu}$. Na parte 2, mostraremos que existe α_0 tal que não há raízes de $\det \Delta_0(z)$ no semiplano $\mathbb{C}_{-\infty,\alpha_0}$. Na parte 3, mostraremos o mesmo para $\mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$ e a estimativa (3.3) nesta região. Finalmente, na parte 4, mostraremos a estimativa (3.3) na faixa $\mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$.

Parte 1: Para qualquer função $\alpha \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$, temos que

$$\int_0^r e^{-z\theta} d\alpha(\theta) = \int_0^\infty e^{-z\theta} d\alpha(\theta) = \mathcal{L}(d\alpha)(z).$$

Temos que $\mathcal{L}(dh_y)(z) = e^{-zy}$, onde h_y é a função de Heaviside. Podemos reescrever $\Delta_0(z)$, dado por (3.2), como

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) = e^{-0z} I - \int_0^\infty e^{-z\theta} d\mu(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{L}(dh_0 I)(z) - \mathcal{L}(d\mu)(z) = \mathcal{L}(dh_0 I - d\mu)(z) \\
&= \mathcal{L}(d\xi)(z)
\end{aligned}
$$

onde $\xi_{ij} = \delta_{ij}h_0 - \mu_{ij}$. Como $\det \Delta_0(z)$ é uma soma de produtos de $\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$, que é igual à transformada de Laplace-Stieltjes da soma de certas convoluções de $d\mu_{ij}$, existe uma função $\tilde{\mu}$ de variação limitada tal que

$$
\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-zs} d\tilde{\mu}(s) \tag{3.4}
$$

onde $\tilde{\mu}$ satisfaz (J), tem necessariamente um salto em 0 e num último ponto $\tau \leqslant nr$.

Parte 2: Seja agora $l = |\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)|/2$ e escolha $\epsilon > 0$ tal que $\operatorname{Var}_{[\tau-\epsilon,\tau)} \tilde{\mu} < \frac{l}{2}$. Sejam $\gamma = \min\{l/(2\operatorname{Var}_{[0,\tau-\epsilon]} \tilde{\mu}), 1\}$ e $\alpha_0 = \frac{1}{\epsilon}\ln\gamma \leqslant 0$. Então, para $z \in \mathbb{C}_{-\infty,\alpha_0}$, temos que

$$
|e^{z\epsilon}| = e^{\operatorname{Re} z\epsilon} \leqslant e^{\alpha_0 \epsilon} = \gamma \leqslant \frac{l}{2\operatorname{Var}_{[0,\tau-\epsilon]} \tilde{\mu}}.
$$

Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{-\infty,\alpha_0}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)\right| &= \left|e^{-z\tau}(\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)) + \int_0^{\tau-\epsilon} e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau-} e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)\right| \\
&\geqslant |e^{-z\tau}| \left[|\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)| - |e^{z\epsilon}| \operatorname{Var}_{[0,\tau-\epsilon]} \tilde{\mu} - \operatorname{Var}_{[\tau-\epsilon,\tau)} \tilde{\mu}\right] \\
&\geqslant |e^{-z\tau}| \left[2l - \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right] = l|e^{-z\tau}|. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\alpha_0 = \frac{1}{\epsilon}\ln\gamma \leqslant 0$, segue que não há zeros de $\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)$ em $\mathbb{C}_{-\infty,\alpha_0}$.

Parte 3: Mostramos agora que existe ω_0 tal que não há raízes de $\det \Delta_0(z)$ no semiplano $\mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$. Seja m dado por $m \stackrel{\text{def}}{=} |\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)|/2$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\operatorname{Var}_{(0,\delta]} \tilde{\mu} < \frac{m}{2}$. Sejam $\nu = \max\{(2\operatorname{Var}_{[\delta,\tau]} \tilde{\mu})/m, 1\}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\delta}\ln\nu \geqslant 0$. Então, para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$,

$$
|e^{-z\delta}| = e^{-\operatorname{Re} z\delta} \leqslant e^{-\omega_0\delta} = e^{-\ln\nu} = \frac{1}{\nu} \leqslant \frac{m}{2\operatorname{Var}_{[\delta,\tau]} \tilde{\mu}}.
$$

Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$, temos que

$$
\left|\int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)\right| = \left|(\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)) + \int_{0+}^{\delta} e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) + \int_\delta^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)\right|
$$

$$\geqslant |\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)| - \operatorname{Var}_{(0,\delta]} \tilde{\mu} - |e^{-z\delta}| \operatorname{Var}_{[\delta,\tau]} \tilde{\mu}$$
$$\geqslant 2m - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} = m.$$

Concluimos que, para $\omega_0 = \frac{1}{\delta} \ln \nu \geqslant 0$, não há zeros de $\det \Delta_0(z)$ em $\mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$. Assim, fica mostrado que os zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$ estão localizados em uma faixa finita $\mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$. Além disso, sendo $M \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Var}_{[0,\tau]} \tilde{\mu}$, temos que $\left|\int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)\right| \leqslant M$ e, como $\operatorname{Re} z > \omega_0 \geqslant 0$, segue a estimativa (3.3) para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0,\infty}$.

Parte 4: Provemos agora que, para cada $\epsilon > 0$, existem m e M tais que vale (3.3),

$$m \leqslant |\det \Delta_0(z)| \leqslant M,$$

para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$, fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta_0$. Iniciamos com o limitante inferior para $|\det \Delta_0(z)|$.

Denote os zeros de $\det \Delta_0$ por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ e suponha que tal constante m não exista. Então existem $\epsilon > 0$ e uma sequência $z_1, z_2, \ldots$ de pontos em $\mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$, mas fora dos discos $|z - \lambda_j| \leqslant \epsilon$, tais que

$$\lim_{j\to\infty} \det \Delta_0(z_j) = 0. \tag{3.6}$$

Seja $z_j = x_j + iy_j$. Como $\sup_j |x_j| \leqslant \max\{|\alpha_0|, |\omega_0|\}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\lim_{j\to\infty} x_j = \bar{x}.$$

Defina agora uma sequência de funções inteiras dadas por

$$F_j(z) = \det \Delta_0(z + iy_j).$$

Daí, como $|e^{-zt}|$ é limitada em faixas verticais onde a parte real é limitada e $\mu \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$, segue que $\det \Delta_0$ é limitada na vizinhança

$$U = \{z : \alpha_0 - 1 < \operatorname{Re} z < \omega_0 + 1\} \tag{3.7}$$

da faixa fechada $\alpha_0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \omega_0$. Segue que a sequência $\{F_j\}$ é uniformemente limitada em U e, portanto, localmente limitada. Pelo Teorema de Montel[1], $\{F_j\}$ forma uma família normal[2]. Ver, por exemplo,

[1]Seja $H(U) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ o conjunto das funções analíticas num aberto U; então uma família $\mathcal{H}$ em $H(U)$ é normal se, e somente se, $\mathcal{H}$ é localmente limitada.

[2]Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $\{K_n\}$ uma sequência encaixante de compactos tais que

Conway [2]. Deste modo, existe uma subsequência $\{F_{j_k}\}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos da faixa U para uma função limite $\bar{F}$. Além disso, $\bar{F} \not\equiv 0$ pela estimativa (3.5). Pelo Teorema VII.2.1 de Conway [2], sendo $\bar{F}$ limite de funções analíticas, segue que $\bar{F}$ é analítica. Como $F_j(x_j) = \det \Delta_0(z_j) \to 0$ quando $j \to \infty$, segue que $\bar{F}(\bar{x}) = 0$.

Mostremos agora que existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{F}(z) \neq 0$ para $|z - \bar{x}| = \frac{\epsilon}{2}$. Para isto, seja δ tal que $\bar{B}(\bar{x}, \delta) \subset U$. Como os zeros de $\bar{F}$ são isolados, existe um número finito deles em $\bar{B}(\bar{x}, \delta)$ que denotaremos por $\bar{x}, \omega_1, \ldots, \omega_n$. Seja $\epsilon = \min\{|\omega_j - \bar{x}|\} > 0$. Segue que $\bar{F}(z) \neq 0$ para z tal que $|z - \bar{x}| = \frac{\epsilon}{2}$.

Como $\bar{F} \not\equiv 0$, pelo Teorema de Hurwitz[3], temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $j \geqslant N$, $\bar{F}$ e F_j tem o mesmo número de zeros em $B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{2})$, ou seja, um único zero. Podemos tomar tal N suficientemente grande de modo que $|\bar{x} - x_N| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Logo, F_j tem um zero em $B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{2})$ para $j \geqslant N$. Para $j = N$, seja a tal que $|a - \bar{x}| < \frac{\epsilon}{2}$ e $F_N(a) = 0$ e tome $\bar{z} = a + iy_N$. Então $\det \Delta_0(\bar{z}) = 0$. Assim,

$$|\bar{z} - z_N| = |a + iy_N - (x_N + iy_N)| = |a - x_N| \leqslant |a - \bar{x}| + |\bar{x} - x_N| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que contradiz a suposição de que z_j estavam fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta_0$. Portanto existe m tal que $|\det \Delta_0(z)| \geqslant m$. Além disso, como $|e^{-zt}|$ é uma função limitada para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$, $t \in [0, \tau]$ e μ é de variação limitada, existe M tal que

$$|\det \Delta_0(z)| = \left| \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |e^{-zt}| \operatorname{Var}_{[0,\tau]} \tilde{\mu} \leqslant M$$

de onde segue a última afirmação do lema. $\square$

O seguinte exemplo, ilustra que o determinante de Δ_0 é uma soma de produtos de $\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$ e que existe uma função $\tilde{\mu}$ de variação limitada, tal

---

$U = \bigcup_{i=i}^{\infty} K_n$. Defina $\rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n, \forall f, g \in \mathcal{C}(U, \Omega)\}$, onde Ω é um espaço métrico completo, e considere a métrica ρ em $\mathcal{C}(U, \Omega)$ dada por $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$. Uma família $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(U, \Omega)$ é normal se cada sequência em $\mathcal{H}$ tem uma subsequência que converge para uma função $f \in \mathcal{C}(U, \Omega)$. Para U dado em (3.7), temos $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ onde $K_n = \{z \in \mathbb{C} : \alpha_0 - 1 + \frac{1}{n} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \omega_0 + 1 - \frac{1}{n} \text{ e } -n \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant n\}$.

[3]Seja $U \subset \mathbb{C}$ e suponha que a sequência $\{f_n\}$ em $H(U)$ converge para f. Se $f \not\equiv 0$, existe $a \in U$ e $R > 0$ tal que $\bar{B}(a, R) \subset U$ e $f(z) \neq 0$ em $|z - a| = R$, então existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que, para $n \geqslant N$, f e f_n têm o mesmo número de zeros em $B(a, R)$.

que

$$\det \Delta_0(z) = \int_0^{\tau} e^{-zs} d\tilde{\mu}(s)$$

onde $\tilde{\mu}$ satisfaz (J) e τ é o ponto onde ocorre o último salto de $\tilde{\mu}$ que tem, necessariamente, um salto em 0.

Exemplo 3.2. Seja $\mu \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{2\times 2})$ definida por

$$\mu(\theta) = \begin{pmatrix} ah_{t_0}(\theta) & bh_{t_1}(\theta) \\ ch_{t_2}(\theta) & dh_{t_3}(\theta) \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $t_j > 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$ e h_t é a função de Heaviside.

Deste modo, recordando que $\mathcal{L}(dh_t)(z) = e^{-zt}$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\mathcal{L}(dh_{t_0})(z) & b\mathcal{L}(dh_{t_1})(z) \\ c\mathcal{L}(dh_{t_2})(z) & d\mathcal{L}(dh_{t_4})(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - ae^{-zt_0} & -be^{-zt_1} \\ -ce^{-zt_2} & 1 - de^{-zt_3}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\det \Delta_0(z) = 1 - de^{-zt_3} - ae^{-zt_0} + ade^{-z(t_0+t_3)} - bce^{-z(t_1+t_2)}.$$

Suponha ainda, sem perda de generalidade, que $t_0 < t_3$ e $t_0 + t_3 < t_1 + t_2$. Considere $\tilde{\mu}(\theta)$ a função de variação limitada definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\mu}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0, \\ 1, & 0 \leqslant \theta < t_0, \\ 1 - a, & t_0 \leqslant \theta < t_3, \\ 1 - a - d, & t_3 \leqslant \theta < t_0 + t_3, \\ 1 - a - d + ad, & t_0 + t_3 \leqslant \theta < t_1 + t_2, \\ 1 - a - d + ad - bc, & \theta \geqslant t_1 + t_2. \end{cases}$$

Então, concluimos que $\det \Delta_0(z) = \int_0^{\tau} e^{-z\theta} d\tilde{\mu}(\theta)$ onde $\tau = t_1 + t_2$ é o ponto onde ocorre o último salto de $\tilde{\mu}$.

Teorema 3.3. *Suponha que μ satisfaz (J) e tome $\mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$ como no Lema 3.1. Para qualquer $\delta > 0$, existe k tal que para qualquer zero ζ_0 de* $\det \Delta_0(\cdot)$ *com*

$|\zeta_0| > k$ *existe um zero* ζ *de* $\det \Delta(\cdot)$ *com* $|\zeta_0 - \zeta| < \delta$. *Além disso, existem constantes positivas* m *e* M *tais que*

$$m \leqslant \left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right)\right| \leqslant M \tag{3.8}$$

para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0,\omega_0}$ *com* $|z| > k$ *e fora de círculos de raio* ϵ *centrados nos zeros de* $\det \Delta(\cdot)$.

Demonstração. Para $|z| > 1$, $\det \Delta(z) = 0$ se, e somente se, $\det(\frac{1}{z}\Delta(z)) = 0$ e

$$\frac{1}{z}\Delta(z) = \Delta_0(z) - \frac{1}{z}\int_0^\tau e^{-z\theta} d\eta(\theta).$$

Do Lema 3.1 e para δ suficientemente pequeno, existe m_1 tal que

$$|\det \Delta_0(z)| \geqslant m_1$$

para z fora de círculos de raio δ centrados nas raízes de $\det \Delta_0(\cdot)$. Podemos estimar

$$\frac{1}{z}\left\|\int_0^\tau e^{-z\theta} d\eta(\theta)\right\| < \frac{1}{z}\int_0^\tau d|\eta|(\theta)|e^{-z\theta}| \leqslant \frac{1}{z}\operatorname{Var}_{[0,\tau]}\eta \max\{e^{-\alpha_0\tau}, 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{z}$$

onde $d|\eta|$ denota a variação total da medida de $d\eta$. Portanto, uma vez que o determinante é uma função contínua, para $|z|$ suficientemente grande, digamos $|z| > k$,

$$\left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right) - \det \Delta_0(z)\right| \leqslant \frac{m_1}{2}.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ os zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$. Como, para todo i, $\det \Delta_0(z)$ e $\det(\frac{1}{z}\Delta(z))$ são funções analíticas em uma vizinhança Ω de $\bar{B}(\lambda_i, \delta)$ sem zeros ou pólos em $\gamma_i = \{z : |z - \lambda_i| = \delta\}$ e

$$\left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right) - \det \Delta_0(z)\right| \leqslant \frac{m_1}{2} < m_1 < |\det \Delta_0(z)|$$

segue, pelo Teorema de Rouché[4] que $\det(\frac{1}{z}\Delta(z))$ e $\det \Delta_0(z)$ tem o mesmo número de zeros dentro dos círculos de raio δ centrados nas raízes de $\det \Delta_0(z)$.

[4]Suponha que γ é um caminho fechado em uma região Ω, tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ ou 1, para todo $\alpha \in \Omega - \{\gamma\}$ (onde $\{\gamma\}$ é o traço de γ), e tome Ω_1 como o conjunto de todos os α com $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$. Para toda $f \in H(\Omega)$, seja N_f o número de zeros de f em Ω_1, contados de acordo com sua multiplicidade. Se $g \in H(\Omega)$ e $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, para todo $z \in \{\gamma\}$, então $N_f = N_g$.

Pelo Lema 3.1, existe M_1 tal que $|\det \Delta_0(z)| \leqslant M_1$, daí, tomando $M = \frac{m_1}{2} + M_1$, temos

$$\begin{aligned}\left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right)\right| &\leqslant \left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right) - \det \Delta_0(z)\right| + |\det \Delta_0(z)| \\ &\leqslant \frac{m_1}{2} + M_1 = M.\end{aligned}$$

Também, tomando $m = \frac{m_1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right)\right| &\geqslant |\det \Delta_0(z)| - \left|\det\left(\frac{1}{z}\Delta(z)\right) - \det \Delta_0(z)\right| \\ &\geqslant m_1 - \frac{m_1}{2} = \frac{m_1}{2} = m.\end{aligned}$$

Portanto $m \leqslant |\det(\frac{1}{z}\Delta(z))| \leqslant M$. □

Lema 3.4. *Seja $\xi \in NBV([0,r],\mathbb{C})$. Então*

1. *Para todo $C > 0$, vale*
$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| < \frac{|z|}{C}\operatorname{Var}_{[0,r]}\xi \tag{3.9}$$
para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C|e^{-zr}|$ e $|z| > C$.

2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, vale*
$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| < e^{|\alpha| r}\operatorname{Var}_{[0,r]}\xi \tag{3.10}$$
para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \alpha$.

Demonstração. Parte 1: Para $0 \leqslant \theta \leqslant r$ temos

$$|e^{-z\theta}| = e^{-\theta \operatorname{Re} z} < \frac{|z|}{C}$$

pois se $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, então $e^{-\theta \operatorname{Re} z} \leqslant 1 < |z|/C$ e se $\operatorname{Re} z < 0$ então $e^{-\theta \operatorname{Re} z} < e^{-r \operatorname{Re} z} = |e^{-zr}| < |z|/C$. Portanto,

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| = \left|\int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta)\right| \leqslant \max_{\theta\in[0,r]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[0,r]}\xi < \frac{|z|}{C}\operatorname{Var}_{[0,r]}\xi$$

como queríamos.

Parte 2: Para $0 \leqslant \theta \leqslant r$ temos que

$$-\operatorname{Re} z\theta \leqslant -\alpha\theta \leqslant |\alpha|\theta \leqslant |\alpha| r,$$

de onde concluimos que

$$|e^{-z\theta}| \leqslant e^{|\alpha| r}.$$

Portanto,

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| = |\int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta)| \leqslant \max_{\theta\in[0,r]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[0,r]} \xi \leqslant e^{|\alpha| r} \operatorname{Var}_{[0,r]} \xi,$$

concluindo a demonstração. □

Lema 3.5. *Para* $\det \Delta(z)$*, temos a seguinte representação*

$$\det \Delta(z) = \det \Delta_0(z) z^n + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{L}(d\xi_m)(z) z^m \tag{3.11}$$

onde $d\xi_m$ *são certas convoluções entre* μ_{ij} *e* η_{ij} *para alguns índices* i *e* j*.*

Demonstração. Primeiro, observamos que, se A e B são duas matrizes $n\times n$, então $\det(zA+wB)$ é um polinômio de ordem n em z e w. Tomando $w = 0$, vemos que o coeficiente do termo z^n é $\det A$. De (3.1) e (3.2), a matriz $\Delta(z)$, dada por

$$\begin{aligned}\Delta(z) = z\left(I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta)\right) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \\ = zI - z\int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta)\end{aligned}$$

tem como entradas a soma de z ou 0 (dependendo se a entrada está na diagonal) com elementos da forma $z\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$ e $\mathcal{L}(d\eta_{ij})(z)$, onde μ_{ij} e η_{ij} são as entradas das funções matriciais μ e η. Portanto, o determinante de $\Delta(z)$ consiste de somas de produtos de tais elementos. Agrupando elementos com a mesma potência de z, segue que os coeficientes são somas de convoluções entre μ_{ij} e η_{ij} para alguns índices i e j. Concluimos que o determinante de $\Delta(z)$ pode ser representado por (3.11), tomando ξ_k como as somas das convoluções entre μ_{ij} e η_{ij}, que é coeficiente da potência z^k. □

Exemplo 3.6. Sejam $\mu, \eta \in NBV([0,2], \mathbb{C}^{2\times 2})$ dadas por

$$\mu(\theta) = \begin{pmatrix} h_1(\theta) & 2h_2(\theta) \\ 0 & h_2(\theta) \end{pmatrix} \qquad \eta(\theta) = \begin{pmatrix} 2h_0(\theta) & h_2(\theta) \\ 2h_1(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-z} & -2e^{-2z} \\ 0 & 1 - e^{-2z} \end{pmatrix},$$

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) = \begin{pmatrix} z - ze^{-z} - 2 & -2ze^{-2z} - e^{-2z} \\ -2e^{-z} & z - ze^{-2z} \end{pmatrix},$$

de onde segue que

$$\det \Delta_0(z) = 1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z},$$
$$\det \Delta(z) = z^2(1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z}) + z(-2 + 2e^{-2z} - 4e^{-3z}) - 2e^{-3z}. \tag{3.12}$$

Então, tomando ξ_0 e ξ_1 como

$$\xi_0(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 3, \\ -2, & \theta \geqslant 3, \end{cases} \qquad \xi_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0 \text{ ou } 2 \leqslant \theta < 3, \\ -2, & 0 \leqslant \theta < 2, \\ -4, & \theta \geqslant 3, \end{cases}$$

temos que (3.12) é escrita na forma (3.11) com $n = 2$.

Definição 3.7. Seja a_M definido por

$$a_M = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \#_{\Delta_0}(\lambda) < \infty\} \tag{3.13}$$

onde $\#_{\Delta_0}(\lambda)$ é o número de zeros de $\det \Delta_0(z)$ em $\mathbb{C}_{\lambda,\infty}$, isto é, para cada $\epsilon > 0$, existe um número finito de zeros ζ de $\det \Delta_0(z)$ tais que $\operatorname{Re}\zeta > a_M + \epsilon$.

Observação 3.8. Aplicando o Teorema 3.3, podemos substituir $\#_{\Delta_0}$ por $\#_\Delta$ em (3.13), onde $\#_\Delta(\lambda)$ é definido como o número de zeros do $\det \Delta(z)$ em $\mathbb{C}_{\lambda,\infty}$.

Teorema 3.9. *Para qualquer $\epsilon > 0$, existem constantes positivas q e C tais que*

$$|\det \Delta(z)| \geqslant q|z|^n \tag{3.14}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C_0|e^{-zr}|$, $|z| > C$ e $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$.

Demonstração. Do Lema 3.1, existe q tal que

$$|\det \Delta_0(z)| \geqslant 2q \tag{3.15}$$

para z satisfazendo $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$ e z fora de círculos de raio 1 centrados nos zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$. Pela Definição 3.7 e Observação 3.8, temos que existe um número finito de zeros de $\det \Delta(z)$ e $\det \Delta_0(z)$ com $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$. Seja

$$C_0 = \max\{|z| : \operatorname{Re} z > a_M + \epsilon \text{ e } \det \Delta(z) \det \Delta_0(z) = 0\} + 1,$$

Então para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$ e $|z| > C_0$, vale (3.15). Do Lema 3.5, deduzimos que

$$|\det \Delta(z)| \geqslant \left| |\det \Delta_0(z)||z|^n - \sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{L}(d\xi_m)(z)||z|^m \right|. \tag{3.16}$$

Aplicando o Lema 3.4 para cada ξ_m, temos que para todo C e para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C|e^{-zr}|$ e $|z| > C$,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{L}(d\xi_m)(z)||z|^m &\leqslant \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1-n}|z|^n \\ &= |z|^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1-n} < |z|^n \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Var} \xi_m C^{m-n}\end{aligned}$$

uma vez que $m - n + 1 \leqslant 0$ para $m \leqslant n - 1$. Então, tomando $\varrho(C) = \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Var} \xi_m C^{m-n}$ temos que

$$|\det \Delta(z)| \geqslant |z|^n(|\det \Delta_0(z)| - \varrho(C)) > |z|^n(2q - \varrho(C))$$

e então, escolhendo $C > C_0$ suficientemente grande tal que $\varrho(C) < q$ temos

$$|\det \Delta(z)| > |z|^n(2q - \varrho(C_0, C)) > q|z|^n.$$

$\square$

O próximo Lema e seu Corolário serão úteis no cálculo do contorno de integrais.

Lema 3.10. *Suponha que μ satisfaz (J). Para todo $f \in \mathcal{F}$,*

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) = 0 \tag{3.17}$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1,\gamma_2}$ com $a_M < \gamma_1 < \gamma_2$ e t em conjuntos compactos.

Demonstração. Tome $\epsilon = \frac{(\gamma_1 - a_M)}{2}$. Pelo Teorema 3.9, existe uma constante positiva q tal que, para $|z|$ suficientemente grande, temos

$$|\det \Delta(z)| \geqslant q|z|^n.$$

Seja $\operatorname{adj} \Delta(z)$ a matriz adjunta de $\Delta(z)$. Recordamos que $\operatorname{adj} \Delta(z)$ é a transposta da matriz dos cofatores $\operatorname{cof} \Delta(z)$ de $\Delta(z)$, isto é, cada entrada de $\operatorname{adj} \Delta(z)$ é o determinante de uma submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de $\Delta(z)$. Podemos aplicar para cada entrada de $\operatorname{adj} \Delta(z)$ os Lemas 3.1, 3.4 e 3.5, obtendo que cada entrada é da forma

$$(\operatorname{adj} \Delta(z))_{ij} = \operatorname{cof} \Delta_0(z)_{ji} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z) z^m \tag{3.18}$$

onde para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1,\gamma_2}$ e $|z|$ suficientemente grande

$$m_{ij} \leqslant |\operatorname{cof} \Delta_0(z)_{ji}| \leqslant M_{ij}. \tag{3.19}$$

e

$$|\mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z)| < \operatorname{Var}_{[0,r]} \xi_{k_{ij}} e^{|\gamma_1| r}. \tag{3.20}$$

Das desigualdade (3.19) e (3.20) temos que $\det(\Delta_0(z))_{ij}$ é limitado inferiormente e $\mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z)$ é limitada superiormente. Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1,\gamma_2}$ com $|z|$ suficientemente grande, temos que existe $K_0 > 0$ tal que

$$|(\operatorname{adj} \Delta(z))_{ij}| \leqslant K_0 |z|^{n-1}.$$

Como

$$\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{\det \Delta(z)} \operatorname{adj} \Delta(z)$$

obtemos que

$$|(\Delta(z)^{-1})_{ij}| \leqslant \frac{K_0}{q|z|}.$$

Como e^{zt} e $\int_0^r e^{-z\theta} df(\theta)$ são uniformemente limitados para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1,\gamma_2}$ e t em intervalos compactos, existe uma constante K_1 tal que

$$\left| e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-zt} df(t) \right) \right| \leqslant \frac{K_1}{|z|}. \tag{3.21}$$

Quando $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, temos que $|z| \to \infty$ e segue (3.17). $\square$

Corolário 3.11. *Seja* $\beth_{N(\gamma_1,\gamma_2)}$, $N \in \mathbb{R}$ *e* $a_M < \gamma_1 < \gamma_2$, *o segmento de reta horizontal ligando* $\gamma_1 + iN$ *a* $\gamma_2 + iN$. *Então, para cada* $t > 0$,

$$\lim_{N\to\pm\infty} \int_{\beth_{N(\gamma_1,\gamma_2)}} e^{zt}\Delta(z)^{-1}\left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta}df(\theta)\right)dz = 0.$$

3.2 Comportamento assintótico para $t \to \infty$

Nesta seção, obtemos, a partir dos resultados da seção 3.1 e da solução da equação de renovação dada no Teorema 2.15, os ingredientes necessários para estudar o comportamento assintótico das soluções da equação de renovação

$$x = dk * x + f$$

onde $k(\theta) = \mu(\theta) + \displaystyle\int_0^\theta \eta(s)ds$ e μ satisfaz a condição (J) na página 34.

Mostremos que, pela fórmula de inversão (1.15), na página 12, segue que o valor da integral complexa em (2.47), na página 30, independe da escolha de $\gamma > \gamma_0$ para algum γ_0 suficientemente grande. Denotaremos

$$Q(z) = \Delta(z)^{-1}\left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta}df(\theta)\right) \tag{3.22}$$

e definiremos Γ como o contorno fechado no plano complexo orientado positivamente que consiste de quatro segmentos de retas passando pelos vértices $\gamma_1 - iN, \gamma_1 + iN, \gamma + iN, \gamma - iN$. Tomando γ_0 como o ínfimo dos γ tais que o semi-plano $\mathrm{Re}\, z > \gamma$ é livre de raízes de $\det \Delta(z)$ e sabendo que Q é analítica no semi-plano $\mathrm{Re}\, z > \gamma_0$, o Teorema de Cauchy nos diz que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\phi e^{zt}Q(z)dz = 0 \tag{3.23}$$

para $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma$. Tomando o limite quando $N \to \infty$ e usando o limite no Corolário 3.11, temos

$$\lim_{N\to\pm\infty}\int_{\gamma_1+iN}^{\gamma+iN} e^{zt}Q(z)dz = 0 \tag{3.24}$$

e então, concluimos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_1)} e^{zt}Q(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)} e^{zt}Q(z)dz. \tag{3.25}$$

Entretanto, a estimativa (3.24) ainda é válida para $a_M < \gamma_1 < \gamma$ e, obviamente $\gamma_0 \geqslant a_M$. Assim, podemos mover a linha vertical $\operatorname{Re} z = \gamma_1$ da integração em (3.25) para $a_M < \gamma_1 < \gamma_0$ tal que não há zeros com parte real γ_1. Neste caso, o resultado da integral de linha (3.23), de acordo com o Teorema de Cauchy, torna-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zt}Q(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt}Q(z)$$

onde $\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant m$ são todas as raízes de $\det \Delta(z)$ tais que $\operatorname{Re} z > \gamma_1$. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)} e^{zt}Q(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt}Q(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_1)} e^{zt}Q(z)dz \tag{3.26}$$

para $\gamma > \gamma_0$. A partir destas considerações, conseguimos os próximos resultados. O principal deles, o Teorema 3.17, relaciona o comportamento das soluções da equação (2.46). Começamos com o Lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 3.12. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}f(\omega)d\omega\right| = 0.$$

Demonstração. Primeiro mostremos que, se λ é a medida de Lebesgue usual e f é qualquer função em $L^1(\mathbb{R})$, então

$$\lim_{h\to 0}\|f_h - f\|_1 = 0.$$

onde $f_h(\omega) \overset{\text{def}}{=} f(\omega + h)$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e considere

$$\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \text{ tal que existe } F \text{ é compacto}, \varphi(x) = 0, \forall x \in F^c \cap \mathbb{R}\}.$$

De Hewitt & Stromberg [6], temos que $\mathbb{C}_{00}(\mathbb{R})$ é denso em $L^1(\mathbb{R})$, logo podemos escolher $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ tal que $\|\varphi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico localmente compacto, segue que todas as funções em $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ são uniformemente contínuas. Portanto, φ é uniformemente contínua e existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ tal que $\varphi(t) = 0$ se $|t| \geqslant \alpha$. Escolha $0 < \delta < 1$ tal que

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{3}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \quad \text{para} \quad |h| < \delta.$$

Então, $|h| < \delta$ implica que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|dt < \frac{\epsilon}{3}$, que é o mesmo que $\|\varphi_h - \varphi\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Também temos que $\|\varphi_h - f_h\|_1 = \|\varphi - f\|_1$ para todo $h > 0$. Portanto, $\|f_h - f\|_1 \leqslant \|f_h - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - \varphi\|_1 + \|\varphi - f\|_1 < \epsilon$, se $|h| < \delta$ e então, $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

Considerando $\hat{f}$ definido por

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(\omega)d\omega = (-1)e^{-\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(\omega)d\omega \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\omega - \frac{\pi}{t}\right)t} f(\omega)d\omega = (-1) \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) e^{it\omega} d\omega\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}2|\hat{f}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(t)d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) d\omega \right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) - f(\omega) \right| |e^{it\omega}| d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) - f(\omega) \right| d\omega = \|f_{\frac{\pi}{t}} - f\|_1\end{aligned}$$

de onde segue que $|\hat{f}(t)|$ é arbitrariamente pequeno se $|t|$ é suficientemente grande. $\square$

Observação 3.13. Uma aplicação do lema anterior nos dá o mesmo resultado para $f \in L^1(R_+)$, ou seja,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{it\omega} f(\omega)d\omega \right| = 0.$$

Lema 3.14. *Para $t > 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t}, & \gamma > 0, \\ \pi, & \gamma = 0, \\ 0, & \gamma < 0. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} = \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} + i \left[\frac{\gamma \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} - \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} \right]$$

e, para todo $N \in \mathbb{R}$ temos que

$$\int_{-N}^{N} \frac{\gamma \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-N}^{N} \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = 0$$

uma vez que $\omega \mapsto \dfrac{\gamma \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2}$ e $\omega \mapsto \dfrac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2}$ são funções ímpares. Além disso, também temos que

$$\int_{-N}^{N} \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega = 2\int_{0}^{N} \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega,$$

$$\int_{-N}^{N} \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega = 2\int_{0}^{N} \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega,$$

já que $\omega \mapsto \dfrac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2}$ e $\omega \mapsto \dfrac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2}$ são funções pares. Logo, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{e^{i\omega t}}{\gamma+i\omega} d\omega = \lim_{N\to\infty} 2\left[\int_{0}^{N} \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega + \int_{0}^{N} \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2+\omega^2} d\omega\right]. \tag{3.27}$$

Sabemos que (cf. Conway [2, p. 121]), se $a \geqslant 0$, então

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{\cos(at)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(a+1)}{4} e^{-a}. \tag{3.28}$$

Para resolver as integrais em (3.27), consideraremos três casos distintos: quando $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ e $\gamma = 0$.

Primeiramente, considere $\gamma > 0$. Escrevendo $\omega t = \gamma t \frac{\omega}{\gamma}$, $\gamma^2 + \omega^2 = \gamma^2\left(1+\frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)$ e considerando a mudança de variável $x = \frac{\omega}{\gamma}$ e fazendo uma integração por partes, temos que o segundo membro de (3.27) torna-se

$$2\left[\int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{1+x^2} dx + \frac{2}{\gamma t}\int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{(1+x^2)^2} dx - \frac{1}{\gamma t}\int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{1+x^2} dx\right]$$
$$= 2\pi e^{-\gamma t}.$$

Para o caso, $\gamma < 0$, da mesma forma como antes, o segundo membro de (3.27) torna-se

$$2\left[-\int_0^\infty \frac{\cos((-\gamma t)x)}{1+x^2} dx - \frac{2}{\gamma t}\int_0^\infty \frac{\cos((-\gamma t)x)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{1}{\gamma t}\int_0^\infty \frac{\cos(-\gamma t)x)}{1+x^2} dx\right]$$
$$= 0.$$

Agora, se $\gamma = 0$, então de (3.27) temos

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega = \lim_{N\to\infty} 2\int_0^N \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} = \pi$$

$\square$

Lema 3.15. *Para qualquer* $\gamma > a_M$ *tal que* $\gamma \neq 0$ *e não há zeros de* $\det \Delta(z)$ *e* $\det \Delta_0(z)$ *com* $\operatorname{Re} z = \gamma$*, temos que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz = o(e^{\gamma t}) \text{ para } t \to \infty. \quad (3.29)$$

Demonstração. Seja $Q(z)$ como em (3.22), na página 45. Devemos mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \left(\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{it\omega} Q(\gamma + i\omega) d\omega \right) = 0. \quad (3.30)$$

Na demonstração do Lema 3.10, vimos em (3.21) que, para $|\omega|$ suficientemente grande, existe K_1 tal que

$$|Q(\gamma + i\omega)| \leqslant \frac{K_1}{|\gamma + i\omega|},$$

mas isto não garante que $Q(\gamma+i\omega)$ é uma função L^1 em ω, ou seja, a integral acima não necessariamente converge absolutamente e, então, não podemos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue 3.12. Porém, para qualquer N fixo, o Lema de Riemann-Lebesgue nos diz que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{it\omega} Q(\gamma + i\omega) d\omega = 0. \quad (3.31)$$

Então, se provarmos que os limites $t \to \infty$ e $N \to \infty$ podem ser trocados, pelo menos, para alguns termos da integral (3.31), obtemos a conclusão desejada para esses termos. Portanto, é suficiente mostrar que a convergência para $N \to \infty$ é uniforme para $t \geqslant t_0$ para algum t_0 fixo.

Para $\xi \in NBV([0, r], \mathbb{C})$, a integral $\int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta)$ é uniformemente limitada para $z = \gamma + i\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$. Como, por (3.1),

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta)$$

segue que, para $z = \gamma + i\omega$,

$$\det \Delta(z) = z^n \det \Delta_0(z) + \mathrm{O}(|\omega|^{n-1}), \quad |\omega| \to \infty,$$
$$\operatorname{adj} \Delta(z) = z^{n-1} \operatorname{adj} \Delta_0(z) + \mathrm{O}(|\omega|^{n-2}), \quad |\omega| \to \infty.$$

Como $\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{\det \Delta(z)} \operatorname{adj} \Delta(z)$, após alguns cálculos, concluimos que

$$\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{z} \Delta_0(z)^{-1} + O(|\omega|^{-2}).$$

Então, de (3.22) temos que

$$Q(z) = \frac{1}{z}\Delta_0(z)^{-1}\left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta}df(\theta)\right) + \mathrm{O}(|\omega|^{-2}). \tag{3.32}$$

O termo $\mathrm{O}(|\omega|^{-2})$ é integrável em $\mathbb{R}$ e do Lema de Riemann-Lebesgue 3.12 segue que

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\mathrm{O}(|\omega|^{-2})d\omega = 0. \tag{3.33}$$

Portanto, podemos nos concentrar no primeiro termo. Um aplicação do Lema 3.1 nos garante que, para $\gamma > a_M$ tal que não há zeros de $\det\Delta_0(z)$ com $\operatorname{Re} z = \gamma$, existe um $\epsilon_\gamma > 0$ tal que $|\det\Delta_0(z)| > \epsilon_\gamma$ para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z \geqslant \gamma$.

Afirmamos que $\Delta_0(z)^{-1}$ é a transformada de Laplace-Stieltjes de alguma função NBV, isto é, existe um $\zeta \in NBV([0,r], \mathbb{C}^{n\times n})$ tal que $\Delta_0(z)^{-1} = \mathcal{L}(d\zeta)(z)$. Para mostrar isto, observe que $\Delta_0 = I - \mathcal{L}(d\mu)$. Considere agora ρ solução de $\rho = d\mu * \rho - \mu$. Então

$$\begin{gathered}
\rho - d\mu * \rho = -\mu \\
d\rho - d\mu * d\rho = -d\mu \\
\mathcal{L}(d\rho)(z) - \mathcal{L}(d\mu)(z)\mathcal{L}(d\rho)(z) = -\mathcal{L}(d\mu)(z) \\
[I - \mathcal{L}(d\mu)(z)]\mathcal{L}(d\rho)(z) = -\mathcal{L}(d\mu)(z) \\
I + \Delta_0(z)\mathcal{L}(d\rho)(z) = \Delta_0(z).
\end{gathered}$$

de onde segue que

$$\Delta_0(z)^{-1} = I - \mathcal{L}(d\rho)(z) = \mathcal{L}(d(h_0 - \rho))(z) = \mathcal{L}(d\zeta)(z)$$

com $\zeta = h_0 - \rho$. Após estas considerações, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta_0(z)^{-1}\left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta}df(\theta)\right) &= \mathcal{L}(d\zeta)(z)z\mathcal{L}(f)(z) \\
&= z\mathcal{L}(d\zeta * f)(z) = \mathcal{L}(d\zeta * df)(z) = \mathcal{L}(d\xi)(z)
\end{aligned}$$

onde $\xi = d\zeta * f$. Mostremos agora que

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega}d\omega = 0.$$

Finalmente, usando o Lema 3.14, calculamos o limite da integral dada em (3.30)

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i\omega t}}{\gamma+i\omega}\Delta_0(\gamma+i\omega)^{-1}\left(f(0)+\int_0^r e^{-(\gamma+i\omega)\theta}df(\theta)\right)d\omega\\
&\qquad=\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i\omega t}}{\gamma+i\omega}\left(\int_0^r e^{-(\gamma+i\omega)\theta}d\xi(\theta)\right)d\omega\\
&\qquad=\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_0^r e^{-\gamma\theta}\left(\int_{-N}^{N}\frac{e^{i\omega(t-\theta)}}{\gamma+i\omega}d\omega\right)d\xi(\theta)\\
&\qquad=\int_0^r e^{-\gamma\theta}\left(\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i\omega(t-\theta)}}{\gamma+i\omega}d\omega\right)d\xi(\theta)=0. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

De (3.31), (3.32), (3.33) e de (3.34), obtemos o resultado. □

Lema 3.16. *Seja λ um zero de $\det\Delta(z)$ de ordem m. Então*

$$\operatorname*{Res}_{z=\lambda} e^{zt}Q(z)=p(t)e^{\lambda t}, \qquad (3.35)$$

onde p é um polinômio com valores em $\mathbb{C}^n$ em t de grau menor ou igual a $m-1$.

Demonstração. Em uma vizinhança de $z=\lambda$, temos as seguintes expansões em séries de Laurent

$$\begin{aligned}
\Delta(z)^{-1}&=\frac{1}{\det\Delta(z)}\operatorname{adj}\Delta(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}(z-\lambda)^kA_k,\\
f(0)+\int_0^r e^{-z\theta}df(\theta)&=\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^kv_k,\\
e^{zt}&=e^{\lambda t}e^{(z-\lambda)t}=e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(z-\lambda)^k.
\end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever $e^{zt}Q(z)$ como série de Laurent em torno de $z=\lambda$ da forma abaixo

$$e^{zt}Q(z)=e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(z-\lambda)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(z-\lambda)^kv_k\right)\left(\sum_{k=-m}^{\infty}(z-\lambda)^kA_k\right). \qquad (3.36)$$

Como o resíduo em $z=\lambda$ é igual ao coeficiente do termo $(z-\lambda)^{-1}$ da série de Laurent de $e^{zt}Q(z)$, segue o resultado. □

Agora estamos prontos para formular o nosso principal resultado.

Teorema 3.17. *Seja x uma solução da EDF dada por* (2.1)–(2.2)*, sujeita à condição inicial $x_0 = \varphi$, onde μ satisfaz a condição (J). Seja $\gamma > a_M$ tal que $\gamma \neq 0$ e para z na reta* $\operatorname{Re} z = \gamma$ $\det \Delta(z) \neq 0$ *e* $\det \Delta_0(z) \neq 0$*. Então temos a expansão assintótica*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{l} p_j(t) e^{\lambda_j t} + o(e^{\gamma t}), \qquad t \to \infty \tag{3.37}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ são os zeros de $\det \Delta(z)$ *com parte real maior que γ e $p_j(t)$ são polinômios em t com valores em $\mathbb{C}^n$ com grau maior ou igual a $m_j - 1$, onde m_j é a multiplicidade de λ_j como zero de* $\det \Delta_0(z)$*.*

Demonstração. A idéia da prova é dada na discussão anterior ao Lema de Riemann-Lebesgue. Para γ_1 suficientemente grande, obtemos, do Teorema 2.15 que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz.$$

Da equação (3.26), temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz.$$

Do Lema 3.15 temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz = \mathrm{o}(e^{\gamma t}) \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

e do Lema 3.16, temos a forma polinomial para o resíduo em $z = \lambda_j$

$$\operatorname*{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z) = p_j(t) e^{\lambda_j t}.$$

Então, combinando estes resultados temos

$$x(t) = \sum_{j=1}^{l} p_j(t) e^{\lambda_j t} + \mathrm{o}(e^{\gamma t}) \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bellman, R., and Cooke, K. L. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York, 1963.

[2] Conway, J. B. *Functions of one complex variable*, second ed., vol. 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] Diekmann, O., van Gils, S. A., Verduyn Lunel, S. M., and Walther, H.-O. *Delay equations*, vol. 110 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995. Functional, complex, and nonlinear analysis.

[4] Frasson, M. *Large time behaviour of neutral delay systems*. PhD thesis, Leiden University, 2005.

[5] Hale, J. K., and Verduyn Lunel, S. M. *Introduction to functional-differential equations*, vol. 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] Hewitt, E., and Stromberg, K. *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, New York, 1965.

[7] Royden, H. L. *Real analysis*, third ed. Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[8] Rudin, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[9] SALAMON, D. *Control and observation of neutral systems*, vol. 91 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[10] VERDUYN LUNEL, S. M. *Exponential type calculus for linear delay equations*, vol. 57 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989.

[11] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.