$\boxed{\textbf{3.}^a \textbf{ Lista de Exercícios de EDO}}$

Professor: Everaldo de Mello Bonotto

Questão 1) Seja $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma função contínua. Suponha que $X(t)$ seja uma matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$. Seja $K > 0$ tal que $|X(t)| \leq K$ para todo $t \geq 0$ e

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_0^t trA(s)ds > -\infty.$$

Mostre que $X^{-1}(t)$ é limitada em $[0, +\infty[$ e que nenhuma solução não trivial tende a zero quando $t \to +\infty$.

Questão 2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Resolva o PVI

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = f(t) \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b. \end{cases}$$

Questão 3) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.
a) Mostre que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ se, e somente se, $AB = BA$.
b) Mostre que $Be^{At} = e^{At}B$ se, e somente se, $AB = BA$.
c) Dê exemplo de matrizes A e B tais que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Questão 4) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. Suponha que exista uma solução φ de $\dot{x} = f(x)$ tal que $\varphi(t) \to 0$ quando $t \to -\infty$. Mostre que $x \equiv 0$ é instável.

Questão 5) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. Seja φ uma solução periódica (com período $T > 0$) de $\dot{x} = f(x)$. Mostre que se φ não é constante, então φ não pode ser assintoticamente estável.
Solução
Suponha que φ se AS. Dado $t_0 > 0$ existe $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que se $|x_1 - \varphi(t_0)| < \rho$

Questão 6) Ache uma base de soluções reais de $\dot{x} = Ax$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule e^{At}.

Questão 7) Encontre condições sobre α de modo que toda solução de $\dot{x} = Ax$ tenda a zero quando $t \to +\infty$, onde $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Questão 8) *a*) Determine uma base de soluções reais de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$;
b) Revolva o PVI $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t)$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Questão 9) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, determine:
a) uma base de soluções para o autoespaço generalizado $M_\lambda(A)$ para cada autovalor λ de A;
b) uma base de soluções de $\dot{x} = Ax$;
c) a forma canônica de Jordan J de A e a matriz C tal que $J = C^{-1}AC$.
d) e^{At}, $t\mathbb{R}$.

Questão 10) Considere a equação $x^{(3)} + \ddot{x} + \dot{x} + ax = 0$. Determine os valores de a de modo que a solução nula seja assintoticamente estável.

Questão 11) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja x_0 um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$. Mostre que se os autovalores de $f_x(x_0)$ possuem parte real negativa, então a solução $\varphi(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, é uniformemente assintoticamente estável.

Questão 12) Analise a estabilidade da origem para

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 sen(x_2) - 3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

Questão 13) Analise a estabilidade da origem para $\ddot{x} + \dfrac{g}{L} sen(x) + c\dot{x} = 0$, onde $c > 0$.

Questão 14) Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que se A possui algum autovalor com parte real positiva ou se A possui algum autovalor com parte real zero mas que não possui divisores elementares simples, então a solução nula de $\dot{x} = Ax$ é instável.

Questão 15) Discuta a estabilidade dos pontos críticos de $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ e $\ddot{x} - x - x^2 = 0$..

Questão 16) Desenhe o retrato de fase de cada um dos sistemas de EDOs:

$a)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} x \qquad b)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x \qquad c)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} x$

$d)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x \qquad e)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x \qquad f)\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} x$

Questão 17) Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - xy \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy. \end{cases}$$

Determine todos os pontos de equilíbrios e esboce o retrato de fase aproximado em torno dos pontos de equilíbrios.

Questão 18) Seja $X_A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, a matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ tal que $X_A(0) = I$. Mostre que X_A é contínua em A no seguinte sentido: para todo $\epsilon > 0$ e para todo $t_0 > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que se $\int_0^{t_0} |A(s) - B(s)|ds < \delta$ então $|X_A(t) - X_B(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [0, t_0]$.

Questão 19) Sejam $A, B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas. Se x é uma solução de $\dot{x} = A(t)x + g(t)$ e y é uma solução de $\dot{x} = B(t)x + h(t)$, mostre que para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $\tau \in \mathbb{R}$,

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{\int_\tau^t |A(s)|ds}|x(\tau) - y(\tau)| + \int_\tau^t e^{\int_\tau^t |A(u)|du}(|A(s) - B(s)||y(s)| + |g(s) - h(s)|)ds.$$

Questão 20) Seja D uma matriz real não singular de ordem n. Mostre que existe uma matriz real B tal que $e^B = D^2$.

Questão 21) Seja B a matriz dada no Teorema de Floquet, com $A(t)$ real. Se $X(t)$ é matriz fundamental real, mostre que B pode ser tomada real se $P(t + 2T) = P(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Questão 22) Calcule os expoentes caracteríticos de $\dot{y} = (A + B_m(t))y$, onde $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B_m é $2m\pi$-periódica com $B_m(t) = 0$ se $0 \leq t < 2m\pi - \frac{\pi}{2}$ e $B_m(t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ se $2m\pi - \frac{\pi}{2} \leq t < 2m\pi$.

Questão 23) Seja $X_A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, a matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ tal que $X_A(0) = I$ e suponha que $t \mapsto A(t)$ seja $p-$periódica. Mostre que os multiplicadores de Floquet dependem continuamente da matriz A.