Aplicações do teorema de Stokes

1. No plano $\mathbb{R}^2$. Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade (= região) com bordo ∂R. A orientação de R (induzida de $\mathbb{R}^2$) induz em ∂R uma orientação (= uma direção de percurso) tal que, quando estamos andando nessa direção ao longo de ∂R, a região fica à esquerda (supondo que $\mathbb{R}^2$ é orientado como os livros textos usualmente representam em desenhos). Parametrizamos ∂R nessa direção por $s(t) = \big(s_1(t), s_2(t)\big)$, $t \in [a, b]$. O vetor tangente ao bordo (na direção em questão) no ponto $s(t)$ é igual a $\dot s(t) = \big(s_1'(t), s_2'(t)\big)$. Portanto, $n(t) := \big(s_2'(t), -s_1'(t)\big)$ é o vetor normal a ∂P em $s(t)$. Calculando $\det \left[\begin{smallmatrix} s_2'(t) & -s_1'(t) \\ s_1'(t) & s_2'(t) \end{smallmatrix}\right] > 0$, vemos que o par ordenado de vetores $n(t), \dot s(t)$ providencia a orientação padrão em $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras, $n(t)$ está indicando para fora de R.

Seja $F(x_1, x_2) := \big(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)\big)$ um campo sobre R. Deste campo, façamos uma 1-forma: $\omega := F_1 dx_2 - F_2 dx_1$. Pelo teorema de Stokes, $\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega$. Pela definição da integral de uma forma, $\int_{\partial R} \omega = \int_{[a,b]} \Big(F_1\big(s(t)\big) ds_2 - F_2\big(s(t)\big) ds_1\Big) = \int_a^b \Big(F_1\big(s(t)\big) s_2'(t) - F_2\big(s(t)\big) s_1'(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial R} F \cdot n$, onde $\cdot$ denota o produto escalar. Por outro lado, $d\omega = \big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\big) dx_1 \wedge dx_2$. Denotando por $\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ a função chamada a *divergência* do campo F, obtemos a **teorema da divergência no plano**: $\int_{\partial R} F \cdot n = \int_R \operatorname{div} F$. Note que, quando parametrizamos o bordo ∂R por seu comprimento, o vetor normal $n(t)$ fica unitário, $\big|n(t)\big| = 1$.

O **teorema de Green** é uma consequência imediata do teorema de Stokes: $\int_{\partial R} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \int_R \big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$.

Mais uma aplicação do teorema de Stokes no plano: $\int_{\partial R} x_1 dx_2 = -\int_{\partial R} x_1 dx_2 = \operatorname{area} R$ (note que $\int_R dx_1 \wedge dx_2 = \int_R 1 = \operatorname{area} R$). Logo, $\operatorname{area} R = \frac{1}{2} \int_{\partial R} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$.

2. No espaço $\mathbb{R}^3$. Consideremos as seguintes aplicações do teorema de Stokes.

2.1. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade (= sólido) com bordo ∂B. Escolhemos uma parametrização (local) $s(t_1, t_2) = \big(s_1(t_1, t_2), s_2(t_1, t_2), s_3(t_1, t_2)\big)$ da superfície ∂B que providencia a orientação de ∂B induzida de B, onde $(t_1, t_2) \in R$ varia numa região $R \subset \mathbb{R}^2$.

Fixando um valor da variável t_2, obtemos uma curva $s(t_1, t_2)$ parametrizada por t_1 e contida na superfície ∂B, $s(t_1, t_2) \in \partial B$. O vetor tangente a essa curva no ponto $s(t_1, t_2)$ é igual a $\frac{\partial s}{\partial t_1}(t_1, t_2)$. Ele é tangente à superfície ∂B. De maneira semelhante, $\frac{\partial s}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ é o vetor tangente a ∂B no ponto $s(t_1, t_2)$. A base linear $\frac{\partial s}{\partial t_1}(t_1, t_2), \frac{\partial s}{\partial t_2}(t_1, t_2) \in \mathrm{T}_{s(t_1, t_2)} \partial B$ do plano tangente a ∂B em $s(t_1, t_2)$ providencia a mencionada orientação deste plano. O produto vetorial $n(t_1, t_2) := \frac{\partial s}{\partial t_1}(t_1, t_2) \times \frac{\partial s}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ é um vetor normal ao plano tangente. Os vetores $\frac{\partial s}{\partial t_1}(t_1, t_2)$, $\frac{\partial s}{\partial t_2}(t_1, t_2)$, $n(t_1, t_2)$ providenciam a orientação padrão de $\mathbb{R}^3$ e, portanto, a orientação do sólido B. Concluímos daqui que o vetor normal $n(t_1, t_2)$ está indicando para fora do sólido B. (Note que, caso a parametrização $s(t_1, t_2)$ preserve a área, temos $\big|n(t_1, t_2)\big| = 1$, ou seja, o vetor normal é unitário.)

Em coordenadas, $\frac{\partial s}{\partial t_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial s_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_1} \end{bmatrix}$ e $\frac{\partial s}{\partial t_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_2} \end{bmatrix}$. Calculando $n(t_1, t_2)$ pelas fórmulas conhecidas da geometria analítica, obtemos as componentes $n_1(t_1, t_2) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial s_2}{\partial t_1} & \frac{\partial s_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_1} & \frac{\partial s_3}{\partial t_2} \end{bmatrix}$, $n_2(t_1, t_2) = -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} & \frac{\partial s_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_1} & \frac{\partial s_3}{\partial t_2} \end{bmatrix}$ e

$n_3(t_1,t_2) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} & \frac{\partial s_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_2}{\partial t_1} & \frac{\partial s_2}{\partial t_2} \end{bmatrix}$ do vetor $n(t_1,t_2)$.

Seja $F(x_1,x_2,x_3) := \big(F_1(x_1,x_2,x_3), F_2(x_1,x_2,x_3), F_3(x_1,x_2,x_3)\big)$ um campo sobre B. Deste campo, façamos uma 2-forma: $\omega := F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$. Pelo teorema de Stokes, $\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega$. Calculando $d\omega$, obtemos

$$d\omega = \tfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \tfrac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \tfrac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (\operatorname{div} F) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

onde a função $\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$ é a *divergência* do campo F. Logo, $\int_B d\omega = \int_B \operatorname{div} F$. Por outro lado, $\int_{\partial B} \omega = \int_R s^*\omega$ pela definição da integral de uma forma. Temos

$$s^*\omega = F_1\big(s(t_1,t_2)\big) ds_2 \wedge ds_3 + F_2\big(s(t_1,t_2)\big) ds_3 \wedge ds_1 + F_3\big(s(t_1,t_2)\big) ds_1 \wedge ds_2,$$

$$ds_2 \wedge ds_3 = \big(\tfrac{\partial s_2}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_2}{\partial t_2} dt_2\big) \wedge \big(\tfrac{\partial s_3}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_3}{\partial t_2} dt_2\big) = \tfrac{\partial s_2}{\partial t_1}\tfrac{\partial s_3}{\partial t_2} dt_1 \wedge dt_2 + \tfrac{\partial s_2}{\partial t_2}\tfrac{\partial s_3}{\partial t_1} dt_2 \wedge dt_1 =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial s_2}{\partial t_1} & \frac{\partial s_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_1} & \frac{\partial s_3}{\partial t_2} \end{bmatrix} dt_1 \wedge dt_2 = n_1(t_1,t_2) dt_1 \wedge dt_2,$$

$$ds_3 \wedge ds_1 = \big(\tfrac{\partial s_3}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_3}{\partial t_2} dt_2\big) \wedge \big(\tfrac{\partial s_1}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_1}{\partial t_2} dt_2\big) = \tfrac{\partial s_3}{\partial t_1}\tfrac{\partial s_1}{\partial t_2} dt_1 \wedge dt_2 + \tfrac{\partial s_3}{\partial t_2}\tfrac{\partial s_1}{\partial t_1} dt_2 \wedge dt_1 =$$

$$= -\det\begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} & \frac{\partial s_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t_1} & \frac{\partial s_3}{\partial t_2} \end{bmatrix} dt_1 \wedge dt_2 = n_2(t_1,t_2) dt_1 \wedge dt_2,$$

$$ds_1 \wedge ds_2 = \big(\tfrac{\partial s_1}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_1}{\partial t_2} dt_2\big) \wedge \big(\tfrac{\partial s_2}{\partial t_1} dt_1 + \tfrac{\partial s_2}{\partial t_2} dt_2\big) = \tfrac{\partial s_1}{\partial t_1}\tfrac{\partial s_2}{\partial t_2} dt_1 \wedge dt_2 + \tfrac{\partial s_1}{\partial t_2}\tfrac{\partial s_2}{\partial t_1} dt_2 \wedge dt_1 =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} & \frac{\partial s_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial s_2}{\partial t_1} & \frac{\partial s_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} dt_1 \wedge dt_2 = n_3(t_1,t_2) dt_1 \wedge dt_2.$$

Concluímos que $s^*\omega = \Big(F_1\big(s(t_1,t_2)\big) n_1(t_1,t_2) + F_2\big(s(t_1,t_2)\big) n_2(t_1,t_2) + F_3\big(s(t_1,t_2)\big) n_3(t_1,t_2)\Big) dt_1 \wedge dt_2$, ou seja, $s^*w = \big(F \cdot n(t_1,t_2)\big) dt_1 \wedge dt_2$. Assim, $\int_R s^*\omega = \int_R F\big(s(t_1,t_2)\big) \cdot n(t_1,t_2)$. Chegamos ao **teorema de Gauss**: $\int_{\partial B} F \cdot n = \int_B \operatorname{div} F$.

Sendo $n(t_1,t_2) = \frac{\partial s}{\partial t_1}(t_1,t_2) \times \frac{\partial s}{\partial t_2}(t_1,t_2)$, o módulo $\big|n(t_1,t_2)\big|$ do vetor normal $n(t_1,t_2)$ expressa o "elemento de área" $\mathrm{d}A$ em ∂B, pois $\operatorname{area} \partial B = \int_R \big|n(t_1,t_2)\big| \,\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$. Assim, podemos interpretar $F \cdot n$ como $F_n \,\mathrm{d}A$, onde F_n é a componente do campo F normal a ∂B, e escrever $\int_{\partial B} F_n \,\mathrm{d}A = \int_B \operatorname{div} F$.

2.2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superficie orientável com bordo ∂S e seja $G(x_1,x_2,x_3)$ um campo sobre S, $G(x_1,x_2,x_3) := \big(G_1(x_1,x_2,x_3), G_2(x_1,x_2,x_3), G_3(x_1,x_2,x_3)\big)$. Deste campo, façamos uma 1-forma $\eta := G_1 dx_1 + G_2 dx_2 + G_3 dx_3$. Pelo teorema de Stokes, $\int_{\partial S} \eta = \int_S d\eta$. Calculando $d\eta$, obtemos

$$d\eta = \big(\tfrac{\partial G_1}{\partial x_1} dx_1 + \tfrac{\partial G_1}{\partial x_2} dx_2 + \tfrac{\partial G_1}{\partial x_3} dx_3\big) \wedge dx_1 + \big(\tfrac{\partial G_2}{\partial x_1} dx_1 + \tfrac{\partial G_2}{\partial x_2} dx_2 + \tfrac{\partial G_2}{\partial x_3} dx_3\big) \wedge dx_2 +$$

$$+ \big(\tfrac{\partial G_3}{\partial x_1} dx_1 + \tfrac{\partial G_3}{\partial x_2} dx_2 + \tfrac{\partial G_3}{\partial x_3} dx_3\big) \wedge dx_3 = -\tfrac{\partial G_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \tfrac{\partial G_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 +$$

$$+ \tfrac{\partial G_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \tfrac{\partial G_2}{\partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 - \tfrac{\partial G_3}{\partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 + \tfrac{\partial G_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= \big(\tfrac{\partial G_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial G_2}{\partial x_3}\big) dx_2 \wedge dx_3 + \big(\tfrac{\partial G_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial G_3}{\partial x_1}\big) dx_3 \wedge dx_1 + \big(\tfrac{\partial G_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial G_1}{\partial x_2}\big) dx_1 \wedge dx_2 =,$$

$$= F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

onde $F := \operatorname{rot} G := \big(\frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}, \frac{\partial G_1}{\partial x_3} - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}, \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}\big)$ denota o *rotacional*[1] do campo G. Integrando como acima a 2-forma $\omega := d\eta$ sobre S, obtemos $\int_S d\eta = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n$, onde n denota o vetor normal a S.

[1]Para lembrar essa fórmula, use a "regra" $\operatorname{rot} G := \big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\big) \times (G_1, G_2, G_3)$ envolvendo o produto vetorial.

Seja $s(t) = \big(s_1(t), s_2(t), s_3(t)\big)$, $t \in [a,b]$, uma parametrização (local) de ∂S. Então o vetor tangente a ∂S em $s(t)$ é igual a $v(t) := \dot{s}(t) = \big(s_1'(t), s_2'(t), s_3'(t)\big)$. Pela definição da integral de uma forma, $\int_{\partial S} \eta = \int_a^b s^*\eta$. Calculando $s^*\eta$, obtemos

$$s^*\eta = G_1\big(s(t)\big)ds_1 + G_2\big(s(t)\big)ds_2 + G_3\big(s(t)\big)ds_3 =$$

$$= \Big(G_1\big(s(t)\big)s_1'(t) + G_2\big(s(t)\big)s_2'(t) + G_3\big(s(t)\big)s_3'(t)\Big)dt = (G \cdot \dot{s})dt.$$

Chegamos ao teorema (chamado o **teorema de Stokes** em livros de cálculo) : $\int_{\partial S} G \cdot v = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n$.

O módulo $\big|\dot{s}(t)\big|$ do vetor tangente v expressa o "elemento de comprimento" $\mathrm{d}c$ em ∂S, pois $\int_a^b \big|\dot{s}(t)\big|\,\mathrm{d}t$ é o comprimento do bordo ∂S. Assim, podemos interpretar $G \cdot v$ como $G_t\,\mathrm{d}c$, onde G_t é a componente do campo G tangencial a ∂S, e escrever $\int_{\partial S} G_t\,\mathrm{d}c = \int_S (\operatorname{div} F)_n\,\mathrm{d}A$.

2.3. Caso uma 2-forma ω seja *fechada,* isto é, $d\omega = 0$, temos $\int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega$, onde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ são superficies com bordo comum, $\partial S_1 = \partial S_2$, orientadas de modo que as orientações induzidas no bordo coincidem. Caso a superfície $S := S_1 \cup S_2$ (sem bordo) limite um sólido $B \subset \mathbb{R}^3$, isto segue diretamente do teorema de Stokes: temos $\partial B = S_1 \cup S_2'$, onde S_2' é S_2 com a orienação oposta; pelo teorema de Stokes $0 = \int_B d\omega = \int_S \omega = \int_{S_1} \omega - \int_{S_2} \omega$.

Isto possibilita mudar a superfície sobre a qual integramos (mantendo o bordo).