SMA0332. PROBLEMAS PARA CÁLCULO II

2º SEMESTRE DE 2014

1. Utilizando quantificadores e símbolos lógicos, escreva sem palavras as seguintes afirmações e decida se são válidas:

1.1. Um apropriado número natural é maior do que um dado número real.

1.2. Qualquer que seja um número real positivo, encontra-se um numero racional positivo menor do que ele.

1.3. O fato que $1 = 2$ implica $2 \times 2 = 4$.

1.4. Existe um número real não-negativo tão pequenininho que é menor do que qualquer número positivo, mas ainda não é nulo.

2. Seja $p(a, b)$ uma afirmação sobre a e b. Verifique se valem as seguintes afirmações:

2.1. $\big(\forall a\ \exists b\ p(a, b)\big) \Longrightarrow \big(\exists b\ \forall a\ p(a, b)\big)$.

2.2. $\big(\exists b\ \forall a\ p(a, b)\big) \Longrightarrow \big(\forall a\ \exists b\ p(a, b)\big)$.

3. O que está errado com as seguintes sequências de símbolos?

3.1. $3 \subset \{0, 3\}$.

3.2. $C := \{c \mid C \neq C\}$.

3.3. $C := \{c \mid 1 \neq 1\}$.

4. Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

4.1. $A \cap B$ é o maior subconjunto comum de A e B. (Qual seria o menor?)

4.2. $A \cup B$ é o menor conjunto que contém A e B.

4.3. $\big((A \subset B) \wedge (B \subset C)\big) \Longrightarrow A \subset C$.

4.4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

4.5. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

4.6. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

5. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ aplicações e sejam $A' \subset A$ e $C' \subset C$. Prove que

5.1. f é injetora se $g \circ f$ é injetora.

5.2. g é sobrejetora se $g \circ f$ é sobrejetora.

5.3. f é bijetora se $A = C$ e $g \circ f = 1_A$.

5.4. $(g \circ f)(A') = g\big(f(A')\big)$.

5.5. $(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}\big(g^{-1}(C')\big)$.

6. Quais das seguintes definições são equivalentes à definição do limite $\lim\limits_{i\to\infty} f(i) = r$ para uma sequência numérica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$?

6.1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall i > m\ \big|f(i) - r\big| < \varepsilon$.

6.2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall i \geq m\ \big|f(i) - r\big| \leq \varepsilon$.

6.3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall i \geq 5m\ \big|f(i) - r\big| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

6.4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \big|f(m) - r\big| < \varepsilon$.

6.5. $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \big|f(i) - r\big| \geq \varepsilon \Longrightarrow i < m$.

7. Calcule as normas das seguintes funções.

7.1. $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7.2. $\frac{1}{x^2+1}$.
7.3. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f: x\mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.
7.4. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f: x\mapsto x^i - g(x)$, onde $i\in\mathbb{N}$ e $g(x) := \left\{\begin{smallmatrix} 0 \text{ se } x\in[0,1) \\ 1 \text{ se } \quad x=1 \end{smallmatrix}\right.$.

8. Verifique se as seguintes sequências de funções $f_i:[0,1]\to\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$, convergem uniformemente. Caso convirjam, qual é a função limite?
8.1. $f_i(x) := \sum_{k=0}^{i}\frac{x^k}{2^k}$.
8.2. $f_i(x) := x^i$ (dica: use o resultado do problema 7.4).

9. Para quais valores de a, a função $f(x) := x^a$ é uniformemente contínua em $[0,\infty)$?
9.1. $a=\frac{1}{3}$.
9.2. $a=\frac{1}{2}$.
9.3. $a=1$.
9.4. $a=2$.
9.5. $a=3$.

10.* Mostre que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(0) := 0$ e $f(x) := x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ para $x\neq 0$, é derivável sobre $\mathbb{R}$, mas $f\notin C^1(\mathbb{R})$.

11. Encontre uma função $f: D\to\mathbb{R}$ contínua, limitada, mas não uniformemente contínua, onde
11.1.* $D=(0,1]$.
11.2.* $D=[0,\infty)$.
11.3. $D=[0,1]$.

12.* Sejam $f_1, f_2 : D\to\mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas, onde $D\subset\mathbb{R}^n$. É verdade que a função
12.1 f_1+f_2
12.2. $f_1 f_2$
é uniformemente contínua? E se pedirmos que f_1, f_2 são limitadas?

13. Escolhendo caminhos apropriados, mostre que os seguintes limites não existem.
13.1. $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$.
13.2. $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$.
13.3. $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.
13.4. $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$.
13.5.* $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\dfrac{e^{x_1}(x_1\cos x_2 + x_2 \operatorname{sen} x_2) - x_1}{x_1^2+x_2^2}$.
13.6.* $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to 0}\dfrac{e^{x_1}(x_1\operatorname{sen} x_2 - x_2 \cos x_2) + x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

14. Verifique se as regras seguintes definem uma norma em $\mathbb{R}^n$.
14.1. $\big|(x_1,\ldots,x_n)\big| := \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$.
14.2. $\big|(x_1,\ldots,x_n)\big| := \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

15. Qual a melhor aproximação linear da aplicação $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ nas proximidades do ponto $(1,2)$?

16. Seja $f(x,y) = (e^x, xy)$ e seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma aplicação tal que $D_{(1,0)}g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Calcule a derivada da função $g\circ f$ no ponto $(0,0)$.

17. Definindo a função $f(r) := \begin{cases} r^2 & \text{se} \quad r \geq 0 \\ -r^2 & \text{se} \quad r < 0 \end{cases}$, considere a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) := \big(f(x-y), f(x+y)\big)$. Calcule a matriz jacobiana de g. Para quais $k \in \mathbb{N}$ a aplicação g é de classe C^k ?

18. Prove que a soma e o produto de duas funções de classe C^k é uma função de classe C^k.

19. Mostre que a composta de aplicações de classe C^k é uma aplicação de classe C^k.

20. Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $f = c + l + g$, onde c é uma função constante, $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função linear e a função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $tg = 0$ para todo $t \in \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$.

21. Sejam $f, f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções de classe C^∞. Suponhamos que f é nula no conjunto $\big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x)f_2(x) = 0\big\}$. Prove que $f = f_1 f_2 g$ para alguma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ou construa um contra-exemplo nos seguintes casos.

21.1.* $f_1 := x_1$, $f_2 := x_2$.

21.2.** $f_1 := x_1$, $f_2 := x_1 - x_2^2$.

22. Seja $f : B(0, 2) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞, onde $\mathbb{R}^3 \circ\!\!\supset B(0, 2)$ denota a bola aberta de raio 2 centrada na origem.

22.1. Será que sempre podemos estender a função f a uma função $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ ? Justifique a resposta.

22.2. Será que sempre podemos estender a restrição $f|_{B(0,1)}$ a uma função $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ ? Justifique a resposta.

23. Desenhe um esboço da trajetória do caminho $c : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definido pela regra $c : t \mapsto (t^2, t^3)$. Parece uma curva lisa? Será que c é um caminho de classe C^∞ ?

24. Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função de classe C^∞; $p := (2014, 2015) \in \mathbb{R}^2$ um ponto em $\mathbb{R}^2$; $u := (1, 2)$, $v := (-2, -1)$ e $w := (1, -1)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Sabendo que $u_p f = 1$ e $v_p f = -2$, calcule $w_p f$.

25. Seja F um campo vetorial suave sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $Fx_1 = Fx_2 = 0$, onde $x_1, x_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções coordenadas. O que você pode dizer sobre o campo F ?

25.1. Não é possível dizer nada.

25.2. Não sei.

25.3. Não quero saber.

25.4. Tenho ódio de quem sabe.

25.5. $F = 0$.

26. Suponhamos que, para uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, existam ambas as derivadas parciais (de ordem 2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Será que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$? (Dica: considere a função dada por $f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$ para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.)

27. Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^∞. Qual das seguintes identidades é válida para campos vetoriais sobre $\mathbb{R}^2$? Justifique a resposta. (Note que, cada vez, um campo é "horizontal" e outro é "vertical".)

27.1. $\big[f_1(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}, f_2(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\big] = 0$.

27.2. $\big[f_1(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}, f_2(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\big] = 0$.

28. Apresente a curva integral do campo $F := x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ sobre $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $p_0 = (1, 2)$.

29. Procure o polinômio de Taylor de grau 3 centrado na origem para a função $e^{x_1 x_2} \cos x_1$.

30. Encontre e classifique os pontos críticos das seguintes funções de duas variáveis.

30.1. $f(x_1, x_2) := (x_1^2 + x_2^2)e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$.

30.2. $f(x_1, x_2) := \ln(x_1^2 + x_2^2 + 1)$.

30.3. $f(x_1, x_2) := x_1^5 x_2 + x_1 x_2^5 + x_1 x_2$.

31. Usando a norma padrão em $\mathbb{R}^2$, calcule a norma da aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela matriz $L := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

32. Se $x_1 = \operatorname{sen} y_1 + \cos y_2$ e $x_2 y_2 = y_1^2 - y_2^2$, será que é possível (em princípio) expressar (y_1, y_2) como função de classe C^2 de (x_1, x_2) em pequenas vizinhanças dos pontos indicados abaixo?

32.1. $(x_1, x_2) = (\sqrt{2}, 0)$, $(y_1, y_2) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

32.2. $(x_1, x_2) = (-1, -\pi)$, $(y_1, y_2) = (0, \pi)$.

33. Uma aplicação $\mathbb{R}^2 \circ\!\!\supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ de classe C^1 com componentes (f_1, f_2) satisfaz as equações

$$x_1 f_1(x_1, x_2) + x_2 \big(f_1(x_1, x_2)\big)^2 f_2(x_1, x_2) = x_1 \big(f_1(x_1, x_2)\big)^3 + x_2^2 \big(f_2(x_1, x_2)\big)^4 = 2.$$

Supondo que $(1,1) \in U$ e $f(1,1) = (1,1)$, calcule $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1,1)$. Justifique a resposta.

34. Prove que $\frac{8\sqrt{3}}{9} a_1 a_2 a_3$ é o volume máximo de um paralelepípedo reto inscrito no elipsoide dado em $\mathbb{R}^3$ pela equação $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$.

35. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície dada pela equação $e^{x_1} = x_1 + \cos x_2 + \ln(x_3^2 + 1)$. Escreva a equação do plano tangente a S nos seguintes pontos.

35.1. $(1, \pi, \sqrt{e^e - 1})$.

35.2. $(0,0,0)$.

36. Seja $\mathbb{R}^2 \circ\!\!\supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 0$ para todo $p \in U$.

36.1.* Prove que f independe de x_2 caso $U = \mathbb{R}^2$.

36.2.** Construa uma função f de classe C^∞ que realmente depende de x_2 caso $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\big\}$.

37.* Seja $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Será que f pode ser uma bijeção? (Dica: Note que $\big\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \neq 0\big\} \subset\!\!\circ\, \mathbb{R}^2$.)

38. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^∞ tal que a aplicação linear $D_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

38.1.* Prove que f é uma bijeção caso $n = 1$.

38.2.* Será que f é uma bijeção caso $n > 1$? (Dica: Tome $n = 2$ e f com componentes $f_1(x_1, x_2) := e^{x_1} \cos x_2$ e $f_2(x_1, x_2) := e^{x_1} \operatorname{sen} x_2$. Verifique que f é de classe C^∞ e que $D_p f$ é um isomorfismo para para todo $p \in \mathbb{R}^2$. É f uma bijeção?)

39. Seja $f : [a,b] \to [0, \infty)$ uma função contínua. Denotemos por $S_f \subset \mathbb{R}^3$ o sólido limitado pela superfície de revolução R_f obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x. Isto é, $R_f := \big\{(x,y,z) \mid f(x) = \sqrt{y^2 + z^2},\ x \in [a,b]\big\}$ e $S_f := \big\{(x,y,z) \mid f(x) \geq \sqrt{y^2 + z^2},\ x \in [a,b]\big\}$.

39.1. Prove que o volume $v(S_v)$ é igual a $v(S_f) = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$.

39.2. Supondo que f é de classe C^1, prove que a área $a(R_f)$ de R_f se calcula pela fórmula $a(R_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \,\mathrm{d}x$.

40. Sejam $0 \leq a < b$ e seja $f : [a,b] \to [0, \infty)$ uma função contínua. Denotamos por F_f a figura limitada pelo gráfico de f e por três segmentos ligando consecutivamente os pontos $\big(a, f(a)\big)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, $\big(b, f(b)\big)$. Consideramos o plano da figura F_f como estando em $\mathbb{R}^3$ e seja S_f o sólido obtido pela rotação de F_f em torno do eixo y. Prove que o volume $v(S_f)$ de S_f é igual a $v(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) x \,\mathrm{d}x$.

41. Denotemos $B := [0,1] \times [0,1]$. Calcule $\int_B f$ para as seguintes funções $f(x,y)$.

41.1. $f(x,y) := \operatorname{sen}(x + y)$.

41.2. $f(x,y) := \ln\big((x+1)(y+1)\big)$.

42. Compare as integrais $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ nos seguintes casos.

42.1. $f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

42.2.* $f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 2y & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$.

43. Calcule a integral $\int_R f$ nos seguintes casos.

43.1. $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}$ e $R := \{(x,y) \in \overline{B}(0,1) \mid y \leq 0\}$.

43.2. $f(x,y,z) := \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ e $R := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq |v| \leq b\}$, onde $0 < a < b$.

43.3. $f(x,y,z) := xyz(x^2+y^2+z^2)$ e $R := \overline{B}(0,r)$, onde $r > 0$.

44. Calcule a integral $\int_\gamma \omega$, onde ω é uma 1-forma e γ é um caminho parametrizado em $\mathbb{R}^3$ que começa no ponto p e termina no ponto q.

44.1. $\omega := x_2dx_1 - x_1dx_2$, $\gamma(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

44.2. $\omega := x_1dx_1 + x_2dx_2$, $\gamma(t) := (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, 1)$ para $t \in [0, 2]$.

44.3. $\omega := 2x_1x_2x_3dx_1 + x_1^2x_3dx_2 + x_1^2x_2dx_3$, $p := (2,1,1)$, $q := (1,-1,1)$.

44.4. $\omega := x_2dx_1 + (3x_2^3 - x_1)dx_2 + x_3dx_3$, $\gamma(t) := (t, t^n, 0)$ para $t \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$.

45. Seja S uma superfície dada por $S := \{(x_1 \cos x_2, x_1 \operatorname{sen} x_2, x_1) \mid (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \geq 0\}$.

45.1. As fórmulas na definição de S providenciam uma parametrização de S pelo semiplano H^2 ?

45.2. Prove que S é uma variedade.

46. Seja S uma superfície dada por $S := \{(x_1 \cos x_2, x_1 \operatorname{sen} x_2, x_2) \mid (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \geq 0\}$.

46.1. As fórmulas na definição de S providenciam uma parametrização de S pelo semiplano H^2 ?

46.2. Prove que S é uma variedade.

47. Calcule $\omega_1 \wedge \omega_2$, $\omega_2 \wedge \omega_1$, $d\omega_2$ e $\varphi^*\omega_2$, onde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, nos seguintes casos.

47.1. $\omega_1 := y_2dy_1 + y_1dy_2 + dy_3$, $\omega_2 := y_3dy_1 \wedge dy_2 + dy_1 \wedge dy_3 + y_1dy_2 \wedge dy_3$, $\varphi(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1x_2)$.

47.2. $\omega_1 := \operatorname{sen} y_1 dy_1 - \cos y_1 dy_2 + e^{y_3}dy_3$, $\omega_2 := e^{-y_3}dy_1 \wedge dy_2 + \cos y_1 dy_1 \wedge dy_3 + \operatorname{sen} y_1 dy_2 \wedge dy_3$, $\varphi(x_1,x_2) = (x_2^2, x_1x_2, x_1^2)$.

48. Considere a forma $\omega := \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou em $S := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$.

48.1. Mostre que $d\omega = 0$.

48.2. Será que existe uma função f tal que $\omega = df$? (Dica: no primeiro caso, procure um certo caminho fechado.)

49. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um tetraedro limitado pelos três planos coordenados e pelo plano dado pela equação $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$. Calcule $\int_{\partial S} g_1dx_1 \wedge dx_2 + g_2dx_2 \wedge dx_3 + g_3dx_1 \wedge dx_3$ com uso e sem uso do teorema de Stokes nos seguintes casos.

49.1. $g_1(x_1,x_2,x_3) := -3x_1$, $g_2(x_1,x_2,x_3) := 12$, $g_3(x_1,x_2,x_3) := 18x_3$.

49.2. $g_1(x_1,x_2,x_3) := -x_3$, $g_2(x_1,x_2,x_3) := -x_2$, $g_3(x_1,x_2,x_3) := x_2^2$.

50. Calcule $\int_{\mathbb{S}^2} x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1dx_2 \wedge dx_3 - x_2dx_1 \wedge dx_3$ com uso e sem uso do teorema de Stokes.

51. Seja $T := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ o toro dado pelas equações $x_1^2 + x_4^2 = x_2^2 + x_3^2 = 1$. Calcule a integral $\int_T \omega$ nos seguintes casos.

51.1. $\omega := x_1x_2dx_3 \wedge dx_4$.

51.2. $\omega := x_4\cos(x_1x_4)dx_1 \wedge dx_2 + x_4e^{x_3x_4}dx_1 \wedge dx_3 + x_3e^{x_3x_4}dx_1 \wedge dx_4 - x_1\cos(x_1x_4)dx_2 \wedge dx_4$.

52. Considere a curva $C := C_1 \sqcup C_2 \subset \mathbb{R}^2$ que consiste de duas circunferências centradas na origem de raios 1 e 2, a primeira orientada no sentido horário e a segunda, no anti-horário. Calcule a integral $\int_C (x_1^3 + x_2^3)dx_1 + (2x_2^3 - x_1^3)dx_2$.

53. Calcule a área do “caracol” limitado em $\mathbb{R}^2$ pela curva $(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e pelo segmento $[0, e^{2\pi}]$ no eixo de x_1.

54.* Calcule a área da região contida em $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \geq x_2\}$ e limitada pela curva dada pela equação $x_1^4 = x_1 x_2^2 + x_2^3$. (Escrevendo $x_2 = t x_1$, podemos parametrizá-la?)

55. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície sem bordo composta por uma parte do plano dado pela equação $x_3 = 1$ e por uma parte do parabolóide dado pela equação $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Seja F o campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_1, x_3^2)$. Calcule a integral $\int_S F \cdot n_S$, onde n_S denota o vetor normal a S (onde ele é definido) e $\cdot$ denota o produto escalar.

56. Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a curva no plano $x_1 = 0$ composta pelo segmento $[0, 1]$ no eixo de x_2, pelo segmento $[0, 1]$ no eixo de x_3 e pela curva parametrizada $(0, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0 \frac{\pi}{2}]$. Calcule a integral $\int_C F \cdot v$, onde F é o campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3, x_1)$ e $v(p)$ denota o vetor tangente a C em $p \in C$.

57.* Calcule a integral $\int_C F \cdot v$, onde $C \subset \mathbb{R}^3$ é a circunferência dada pelas equações $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$, F é o campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x_1, x_2, x_3) := (x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2)$ e $v(p)$ denota o vetor tangente a C em $p \in C$.