Conjuntos e lógica para gente simples

Batize o Bicho Papão para domesticá-lo
Sabedoria infantil

1. Pato-lógica. Toda afirmação matemática que faz sentido (em seguida, chamaremos tais afirmações proposições) pode ser válida — 1, ou inválida — 0. A gente utilizará os seguintes sinais lógicos para formar ou ligar proposições: $\neg$ — negação; $\vee$ — ou; $\wedge$ — e; $\Longrightarrow$ — implica; $\Longleftrightarrow$ — equivalente; $\exists$ — existe; $\forall$ — para todo. Os últimos dois se chamam *quantificadores,* os restantes são *elementares.*

Em termos de validez/invalidez, temos:

$$(0\vee 0)=0,\quad (0\vee 1)=(1\vee 0)=(1\vee 1)=1;\qquad (0\wedge 0)=(0\wedge 1)=(1\wedge 0)=0,\quad (1\wedge 1)=1;$$

$$\neg 0=1,\quad \neg 1=0;\qquad (1\Longrightarrow 0)=0,\quad (0\Longrightarrow 0)=(0\Longrightarrow 1)=(1\Longrightarrow 1)=1;$$

$$(0\Longleftrightarrow 1)=(1\Longleftrightarrow 0)=0,\quad (0\Longleftrightarrow 0)=(1\Longleftrightarrow 1)=1.$$

Sejam p,p' proposições. Então

$$\neg(\neg p)=p,\qquad \neg(p\vee p')=\big((\neg p)\wedge(\neg p')\big),\qquad \neg(p\wedge p')=\big((\neg p)\vee(\neg p')\big),$$

$$(p\Longrightarrow p')=\big((\neg p)\vee p'\big),\qquad (p\Longleftrightarrow p')=\big((p\Longrightarrow p')\wedge(p\Longleftarrow p')\big),$$

etc. Em particular, vemos que basta usar apenas $\neg$ e $\vee$ (ou $\neg$ e $\wedge$). Além disso, uma proposição inválida implica qualquer outra. Por exemplo: por ser a baleia um peixe, conclui-se que ela é minha avó.

Os quantificadores se aplicam para proposições que dependem de parâmetros, ou seja, envolvem variáveis. Dada uma proposição $p(x,y,z)$ que depende das variáveis x,y,z, podemos formar a proposição $\forall x\ \exists y\ \forall z\ p(x,y,z)$. Às vezes, especificamos onde variam as variáveis: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{Z}\ \forall z\in\mathbb{C}\ p(x,y,z)$.

É fácil ver que

$$\neg\big(\forall x\ p(x)\big)=\big(\exists x\ \neg p(x)\big),\qquad \neg\big(\exists x\ p(x)\big)=\big(\forall x\ \neg p(x)\big).$$

Essas regras permitem reescrever a negação de proposições que envolvem vários quantificadores. Por exemplo, $\neg\big(\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{Z}\ \forall z\in\mathbb{C}\ p(x,y,z)\big)$ é equivalente a $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{Z}\ \exists z\in\mathbb{C}\ \neg p(x,y,z)$. Além disso, vemos que poderíamos usar apenas $\neg$ e $\forall$ (ou $\neg$ e $\exists$).

Se uma parte da proposição não depende de uma variável, podemos mudar a posição do quantificador. Por exemplo, $\forall x\ \big(p(x)\wedge p'\big)$ é equivalente a $\big(\forall x\ p(x)\big)\wedge p'$ caso p' independa de x.

Por fim, observamos que $\forall x\ p(x)$ é equivalente a $\forall y\ p(y)$. Em outras palavras, $\forall x\ p(x)$ independe de x, ou seja, após a aplicação do quantificador, a variável "desaparece". Mas é necessário ficar atento na situação do seguinte tipo: em $\exists x\ p(x,y)$ seria errado trocar x por y.

1.1. Sinônimos. Segue uma lista de sinônimos para alguns sinais lógicos.

- $\forall$ — "para todo(s)", "qualquer que seja", ...
- $\exists$ — "existe(m)", "para algum (alguns)", ...
- $p\Longrightarrow p'$ — "p implica p'", "p' segue de p", ... (p é a hipótese e p' é a conclusão da implicação $\Longrightarrow$)
- $\Longleftrightarrow$ — "equivalente", "se e só se", ...
- $:=$ — "igual por definição", ...

2. Juntos com conjuntos. Em vez de definir o que é um conjunto, aceitamos a visão ingênua de que é razoável imaginar um conjunto como um saco de elementos. Escrevemos $e\in E$ quando e é um elemento do conjunto E (e está no saco E). Para descrever um conjunto C usamos a notação $C:=\big\{e\mid p(e)\big\}$ ou $C:=\big\{e\in E\mid p(e)\big\}$, onde $p(x)$ é uma propriedade (de elementos) e E é um conjunto dado. Isto se lê assim: o conjunto C é formado por todos os e (ou por todos os elementos e do conjunto E) que satisfazem a propriedade p.

2.1. Notação padrão.
$\mathbb{R} := \{r \mid r$ é um número real$\}$ é o conjunto de todos os números reais;
$\mathbb{Q} := \{q \in \mathbb{R} \mid q$ é um número racional$\}$ é o conjunto de todos os números racionais;
$\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Q} \mid z$ é um número inteiro$\}$ é o conjunto de todos os números inteiros;
$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ é o conjunto de todos os números naturais;
$\mathbb{R}^{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ é o conjunto de todos os números reais não-negativos;
$\mathbb{R}^{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ é o conjunto de todos os números reais positivos;
$[a,b] := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$, $(a,b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, $[a,b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r < b\}$, $(a,b] := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leq b\}$ são os intervalos fechado, aberto e semiabertos entre $a, b \in \mathbb{R}$;
$(-\infty,b] := \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq b\}$, $(-\infty,b) := \{r \in \mathbb{R} \mid r < b\}$, $[a,\infty) := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r\}$, $(a,\infty) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r\}$, $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$ intervalos (semi)infinitos;
$\varnothing := \{e \mid e \neq e\}$ o conjunto vazio (saco vazio).

Note que $[a,b] = \varnothing$ se $a > b$.

Destes conjuntos citados, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos e enumeráveis, no sentido que têm a mesma "quantidade" de elementos (= cardinalidade) que $\mathbb{N}$. O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável. Dentre os conjuntos infinitos, os enumeráveis são os "menores": eles têm a menor cardinalidade.

2.2. Operações com conjuntos e relações entre conjuntos. Sejam A, B conjuntos. Dizemos que A está *contido* em B ou que B *contém* A se $\forall a\ a \in A \Longrightarrow a \in B$ e escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$. Em outras palavras, para verificar que $A \subset B$, precisa-se provar a implicação $a \in A \Longrightarrow a \in B$. É fácil ver que $\varnothing \subset A$ para qualquer conjunto A.

Dois conjuntos A e B são considerados como iguais se eles têm os mesmos elementos. Em outras palavras, $A = B$ é equivalente a $A \subset B$ e $A \supset B$. Por exemplo, $p \neq \{p\}$ para qualquer conjunto p. Em particular, o conjunto $\{\varnothing\}$ não é vazio.

Denotamos por $A \cap B$ a *interseção* de A e B, isto é, $A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.

Denotamos por $A \cup B := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$ a *união* de A e B.

Denotamos por $A \times B := \big\{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\big\}$ o produto *cartesiano* de A e B. Este produto é formado por todos os pares *ordenados* (a,b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Não é necessário saber o que é um par ordenado. É suficiente saber apenas a propriedade que caracteriza este conceito: $(a,b) = (a',b') \Longleftrightarrow a = a' \ \wedge \ b = b'$. (Um exemplo: $[0,1] \times [0,1]$ pode ser visto como um quadrado.) De modo análogo, podemos definir o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Seja A um conjunto e sejam $S, S' \subset A$ subconjuntos. Denotamos por $S \setminus S' := \{s \in S \mid s \notin S'\}$ o *complemento* de S' em S.

Claro que $A \cap B \subset A$, $A \cup B \supset A$, $S \setminus S' \subset S$ e $(S \setminus S') \cap S' = \varnothing$.

2.3. Famílias de conjuntos. Seja I um conjunto (de índices). Se, para cada $i \in I$, é dado um conjunto C_i, temos uma *família* de conjuntos C_i, $i \in I$.

A *união* da família é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos membros da família, $\bigcup\limits_{i \in I} C_i := \{x \mid \exists i \in I \ x \in C_i\}$.

A *interseção* da família é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a todos os membros da família, $\bigcap\limits_{i \in I} C_i := \{x \in X \mid \forall i \in I \ x \in C_i\}$.

Seja dada uma família de conjuntos $C_i \subset X$, $i \in I$. Qualquer subconjunto $I' \subset I$ determina uma nova família C_i, $i \in I'$, chamada *subfamília* da original. Podemos considerar também uma família de subfamílias. Formalmente, seja $I_j \subset I$, $j \in J$, uma família de subconjuntos de índices que induzirá a família com índices $j \in J$, cujo j-ésimo membro é a família C_i, $i \in I_j$. Fazendo $I' = \bigcup\limits_{j \in J} I_j$, obtemos as fórmulas $\bigcup\limits_{j \in J} \Big(\bigcup\limits_{i \in I_j} C_i \Big) = \bigcup\limits_{i \in I'} C_i$ e $\bigcap\limits_{j \in J} \Big(\bigcap\limits_{i \in I_j} C_i \Big) = \bigcap\limits_{i \in I'} C_i$.

2.4. Funções e aplicações. Uma *aplicação* (*função*, se $C \subset \mathbb{R}$) $f : D \to C$ de D para C é uma lei pela qual a cada elemento $d \in D$ está associado um único elemento $c \in C$, denotado por $c = f(d)$ e chamado a *imagem* de d. Escreve-se também $D \xrightarrow{f} C$. Dizemos que D é o *domínio* e C é o *codomínio* de f. Note que, por definição, consideramos duas aplicações $f : D \to C$ e $g : D \to C'$ como diferentes se os codomínios são diferentes, isto é, $C \neq C'$, mesmo se a lei parece a mesma. Por exemplo, temos duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : r \mapsto r^2$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $g : r \mapsto r^2$, que são diferentes embora dadas através da mesma lei $r \mapsto r^2$. (Escrevendo $f : d \mapsto c$ enfatizamos como f "age" sobre elementos; isto é equivalente a escrever $f(d) = c$.)

Seja $f : D \to C$ uma aplicação. Denotamos por $\Gamma_f := \Big\{\big(d, f(d)\big) \mid d \in D\Big\}$ o *gráfico* da aplicação f. Caso $D, C \subset \mathbb{R}$, o gráfico é o usual.

Seja $f : D \to C$ uma aplicação e sejam $D' \subset D$ e $C' \subset C$. Então $f(D') := \big\{f(d) \mid d \in D'\big\}$ é a *imagem* de D' por f e $f^{-1}(C') := \big\{d \in D \mid f(d) \in C'\big\}$ é a imagem *inversa* de C' por f. Definimos a *restrição* $f|_{D'} : D' \to C$ de f para D' pela regra óbvia $f|_{D'} : d' \mapsto f(d')$. A aplicação de *inclusão* $i : D' \hookrightarrow D$ é dada pela regra $i : d' \mapsto d'$ para todo $d' \in D'$.

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ duas aplicações dos formatos indicados. Definimos a aplicação *composta* ou a *composição* $g \circ f : A \to C$ pela regra $(g \circ f)(a) := g\big(f(a)\big)$ para todo $a \in A$. Essa operação é associativa: é fácil verificar que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ para aplicações $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Podemos observar também que a restrição $f|_{A'}$ da aplicação $f : A \to B$ para $A' \subset A$ é a composição $f \circ i$, isto é, $f|_{A'} = f \circ i$, onde $i : A' \hookrightarrow A$ é a aplicação de inclusão. Para qualquer conjunto A, temos a aplicação *idêntica* $1_A : A \to A$ dada pela regra $1_A : a \mapsto a$. Essa aplicação satisfaz as identidades $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$ para quaisquer aplicações $f : A \to B$ e $g : C \to A$.

Uma aplicação $f : A \to B$ é dita *injetora* ou uma *injeção* se $\forall a_1, a_2 \in A \ f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$. A aplicação de inclusão considerada acima é um exemplo de uma aplicação injetora. Uma aplicação $f : A \to B$ é dita *sobrejetora* ou uma *sobrejeção* se todo elemento de B é a imagem por f de um elemento de A, isto é, se $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ f(a) = b$. Uma aplicação $f : A \to B$ simultâneamente injetora e sobrejetora é dita *bijetora* ou uma *bijeção*. (Dizemos que conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade* se existe uma bijeção entre A e B.)

2.4.1. Lema. *Uma aplicação $f : A \to B$ é bijetora se e só se existe uma aplicação $g : B \to A$* (chamada *inversa* para f e denotada por f^{-1}) *tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$* ■

2.4.2. Observação. Há o hábito de se associar a uma função *numérica* $f : A \to B$ (isto significa que $A, B \subset \mathbb{R}$) o "maior" domínio possível e o "menor" contra-domínio possível. Por exemplo, nessa visão, a função $\frac{1}{x}$ tem os domínio e codomínio iguais a $\{r \in \mathbb{R} \mid r \neq 0\}$.

2.4.3. Operações com funções. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções. Definimos as funções $f+g, f-g, f\cdot g : A \to \mathbb{R}$ respectivamente pelas regras $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$, $(f-g)(a) := f(a) - g(a)$, $(f \cdot g)(a) := f(a)g(a)$. Caso $g(a) \neq 0$ para todo $a \in A$, definimos a função $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ pela regra $\frac{f}{g}(a) := \frac{f(a)}{g(a)}$.

2.5. Fórmulas. Sejam $S, S_i \subset C$, $i \in I$, subconjuntos de um conjunto C. Então são válidas as seguintes fórmulas.

- $S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I}(S \setminus S_i)$
- $S \setminus \Big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I}(S \setminus S_i)$
- $S \cap \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I}(S \cap S_i)$
- $S \cup \Big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I}(S \cup S_i)$
- $S \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(S \cap S_i)$
- $S \cup \big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(S \cup S_i)$

Sejam $f : D \to C$, $g : C \to B$ aplicações, sejam $D_i \subset D$, $i \in I$, e $C_j \subset C$, $j \in J$, famílias de subconjuntos e sejam $D' \subset D$, $C' \subset C$ e $B' \subset B$ subconjuntos. Então são válidas as seguintes fórmulas.

- $f\Big(\bigcup\limits_{i\in I} D_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} f(D_i)$
- $f\Big(\bigcap\limits_{i\in I} D_i\Big) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(D_i)$
- $(g \circ f)(D') = g\big(f(D')\big)$
- $(g \circ f)^{-1}(B') = f^{-1}\big(g^{-1}(B')\big)$
- $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{j\in J} C_j\Big) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(C_j)$
- $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{j\in J} C_j\Big) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(C_j)$
- $f^{-1}(C \setminus C') = D \setminus f^{-1}(C')$

O aluno inexperiente nessa matéria pode considerar todas as fórmulas apresentadas acima (e outras semelhantes que encontrará em seguida) como exercícios de demonstrações. Enquanto isso, tente a seguinte demonstração (não-vazia): todos os conjuntos vazios são iguais.

Como lidar com essas e outras fórmulas e definições? Pura e simplesmente através de raciocínio lógico elementar. Demonstremos, para exemplificar, a primeira fórmula dos complementos: $S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$.

Para mostrar a igualdade de dois conjuntos, normalmente verificamos a dupla inclusão: que o primeiro conjunto está incluído no segundo e que o segundo está incluído no primeiro. No caso, iremos provar as inclusões $S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big) \subset \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$ e $S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big) \supset \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$.

Para verificarmos a primeira, tomemos um elemento $s \in S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big)$ qualquer, isto é, $S \ni s \notin \bigcup\limits_{i\in I} S_i$, e provemos que $s \in \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$. De $s \notin \bigcup\limits_{i\in I} S_i$ segue, pela definição da união de família de conjuntos, que $\forall i \in I \; s \notin S_i$, ou seja, $\forall i \in I \; s \in S \setminus S_i$. Pela definição da interseção de família de conjuntos, constatamos $s \in \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$.

Quanto à segunda, tomemos um elemento $s \in \bigcap\limits_{i\in I} (S \setminus S_i)$ qualquer. Temos $\forall i \in I \; S \ni s \notin S_i$. Portanto, s não pertence à união, $s \notin \bigcup\limits_{i\in I} S_i$ e, assim, $s \in S \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\Big)$.

A demonstração está completa $\blacksquare$