Cálculo II
slides de aula

Sasha Anan′in

ICMC, USP, São Carlos

4–29 de agosto de 2014

1. “Lembranças” do cálculo I e da geometria analítica

1. “Lembranças” do cálculo I e da geometria analítica

Ninguém precisa de definições: a gente as conhece desde ser nascido.
— *Misha Kapranov*

1. “Lembranças” do cálculo I e da geometria analítica

Ninguém precisa de definições: a gente as conhece desde ser nascido.
— *Misha Kapranov* (*com sua namorada na platéia*), 1990

1. “Lembranças” do cálculo I e da geometria analítica

Ninguém precisa de definições: a gente as conhece desde ser nascido.
— *Misha Kapranov* (*com sua namorada na platéia*), 1990

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale a **desigualdade triangular**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Além disso, $|rx| = |r| \cdot |x|$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

1. "Lembranças" do cálculo I e da geometria analítica

Ninguém precisa de definições: a gente as conhece desde ser nascido.
— *Misha Kapranov* (*com sua namorada na platéia*), 1990

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale a **desigualdade triangular**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Além disso, $|rx| = |r| \cdot |x|$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

1.1. Definição. Um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto**, o que denotamos $U \subset_\circ \mathbb{R}^n$, se junto com cada seu ponto $p \in U$ ele contém uma **bola aberta centrada** neste ponto, isto é, existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset U$, onde

$$B(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < r\}.$$

Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado**, o que denotamos $F \subset_f \mathbb{R}^n$, se seu complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto, $(\mathbb{R}^n \setminus F) \subset_\circ \mathbb{R}^n$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset_\circ \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset_\circ \mathbb{R}^n$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*
2. *Se* $U_1, U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*
2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ\, \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)
3. *Se* $U_i \subset\circ\, \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$, *então* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subset\circ\, \mathbb{R}^n$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$*, então* $U_1 \cap U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$*.* (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

3. *Se* $U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$*, então* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$*.* (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$*, então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$*.* (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

3. *Se* $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$*, então* $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$*.* (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

Em particular, $\varnothing$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*
2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$*, então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$*.* (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)
3. *Se* $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$*, então* $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$*.* (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)
Em particular, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*
4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$*,* $p_1 \neq p_2$*, existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$*,* $i = 1, 2$*, (chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s) que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$*.*

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

3. *Se* $U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$, *então* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

Em particular, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*

4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, *existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, (*chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s*) *que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. (*Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

3. *Se* $U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$, *então* $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$. (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

Em particular, $\varnothing$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*

4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, *existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, (*chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s*) *que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. (*Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

Acabamos de introduzir a **topologia padrão** *em* $\mathbb{R}^n$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

3. *Se* $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$, *então* $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

Em particular, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*

4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, *existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, (*chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s*) *que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. (*Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

Acabamos de introduzir a **topologia padrão** *em* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$*, então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

3. *Se* $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$*, então* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)

Em particular, $\varnothing$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*

4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$*,* $p_1 \neq p_2$*, existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$*,* $i = 1, 2$*, (chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s) que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$*. (Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

Acabamos de introduzir a **topologia padrão** *em* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. **1.** Seja $q \in B(p, r)$. Então $|q - p| < r$ e $B(q, \varepsilon) \subset B(p, r)$ pela desigualdade triangular, onde $\varepsilon := r - |q - p| > 0$. Com efeito, $x \in B(q, \varepsilon)$ implica $|x - q| < r - |q - p|$. Logo, $|x - p| \leq |x - q| + |q - p| < |q - p| + r - |q - p| = r$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*
2. *Se* $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$, *então* $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)
3. *Se* $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I$, *então* $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$. (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto**.)
Em particular, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ *são abertos.*
4. *Para quaisquer pontos distintos* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, *existem subconjuntos abertos* $p_i \in U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, (*chamados* **vizinhanças abertas** *dos* p_i*'s*) *que são disjuntos, isto é,* $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. (*Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

Acabamos de introduzir a **topologia padrão** *em* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. **1.** Seja $q \in B(p, r)$. Então $|q - p| < r$ e $B(q, \varepsilon) \subset B(p, r)$ pela desigualdade triangular, onde $\varepsilon := r - |q - p| > 0$. Com efeito, $x \in B(q, \varepsilon)$ implica $|x - q| < r - |q - p|$. Logo, $|x - p| \leq |x - q| + |q - p| < |q - p| + r - |q - p| = r$.
2. Seja $p \in U_1 \cap U_2$. Então $B(p, r_1) \subset U_1$ e $B(p, r_2) \subset U_2$ para alguns $r_1, r_2 > 0$. Portanto, $B(p, r) \subset U_1 \cap U_2$, onde $r := \min(r_1, r_2) > 0$.

1.2. Observações. **1.** *Qualquer bola aberta é aberta.*

2. *Se $U_1, U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$, então $U_1 \cap U_2 \subset\circ \mathbb{R}^n$.* (**A interseção de dois subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

3. *Se $U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$ para todo $i \in I$, então $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$.* (**A união de qualquer família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.**)

Em particular, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos.

4. *Para quaisquer pontos distintos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, existem subconjuntos abertos $p_i \in U_i \subset\circ \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$,* (*chamados* **vizinhanças abertas** *dos p_i's*) *que são disjuntos, isto é, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.* (*Esta propriedade se chama o* **axioma de Hausdorff**.)

Acabamos de introduzir a **topologia padrão** *em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. **1.** Seja $q \in B(p, r)$. Então $|q - p| < r$ e $B(q, \varepsilon) \subset B(p, r)$ pela desigualdade triangular, onde $\varepsilon := r - |q - p| > 0$. Com efeito, $x \in B(q, \varepsilon)$ implica $|x - q| < r - |q - p|$. Logo, $|x - p| \leq |x - q| + |q - p| < |q - p| + r - |q - p| = r$.

2. Seja $p \in U_1 \cap U_2$. Então $B(p, r_1) \subset U_1$ e $B(p, r_2) \subset U_2$ para alguns $r_1, r_2 > 0$. Portanto, $B(p, r) \subset U_1 \cap U_2$, onde $r := \min(r_1, r_2) > 0$.

3. É óbvio.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular $\blacksquare$

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ■

Usando as fórmulas $C \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} S_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} S_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ∎

Usando as fórmulas $C \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

1.3. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ■

Usando as fórmulas $C \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

1.3. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.
Para a **topologia induzida** em X, um subconjunto V é **aberto em** X, o que denotamos $V \subset\!\circ\, X$, se $V = X \cap U$ para algum $U \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ■

Usando as fórmulas $C \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

1.3. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.
Para a **topologia induzida** em X, um subconjunto V é **aberto em** X, o que denotamos $V \subset\!\circ\, X$, se $V = X \cap U$ para algum $U \subset\!\circ\, \mathbb{R}^n$.
Subconjuntos abertos em X satisfazem as propriedades características semelhantes às 2–4 na Definição 1.1, pois $X \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} U_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(X \cap U_i)$ e

$X \cap \big(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(X \cap U_i)$.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ■

Usando as fórmulas $C \setminus \big(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \big(\bigcap\limits_{i\in I} S_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

1.3. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.
Para a **topologia induzida** em X, um subconjunto V é **aberto em** X, o que denotamos $V \subset_\circ X$, se $V = X \cap U$ para algum $U \subset_\circ \mathbb{R}^n$.
Subconjuntos abertos em X satisfazem as propriedades características semelhantes às 2–4 na Definição 1.1, pois $X \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} U_i\big) = \bigcap\limits_{i\in I}(X \cap U_i)$ e $X \cap \big(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\big) = \bigcup\limits_{i\in I}(X \cap U_i)$.
Equivalentemente, um subconjunto G é **fechado em** X, o que denotamos $G \subset_f X$, se $G = X \cap F$ para algum $F \subset_f \mathbb{R}^n$.

4. Temos $|p_2 - p_1| = 2r > 0$. Basta tomar $U_i := B(p_i, r)$ e aplicar a desigualdade triangular ■

Usando as fórmulas $C \setminus \big(\bigcup_{i\in I} S_i\big) = \bigcap_{i\in I}(C \setminus S_i)$ e $C \setminus \big(\bigcap_{i\in I} S_i\big) = \bigcup_{i\in I}(C \setminus S_i)$, válidas para quaisquer subconjuntos $S_i \subset C$, $i \in I$, de um conjunto C dado, podemos reescrever as propriedades características 2–4 da topologia em termos de subconjuntos fechados.

1.3. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto.
Para a **topologia induzida** em X, um subconjunto V é **aberto em** X, o que denotamos $V \subset_\circ X$, se $V = X \cap U$ para algum $U \subset_\circ \mathbb{R}^n$.
Subconjuntos abertos em X satisfazem as propriedades características semelhantes às 2–4 na Definição 1.1, pois $X \cap \big(\bigcap_{i\in I} U_i\big) = \bigcap_{i\in I}(X \cap U_i)$ e $X \cap \big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) = \bigcup_{i\in I}(X \cap U_i)$.
Equivalentemente, um subconjunto G é **fechado em** X, o que denotamos $G \subset_f X$, se $G = X \cap F$ para algum $F \subset_f \mathbb{R}^n$. Como acima, podemos reescrever as propriedades características da topologia em X em termos de subconjuntos fechados.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto* $F \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado se e só se, para toda sequência convergente* $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, *cujos membros estão em* F, *o limite da sequência também está em* F.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se, para toda sequência convergente $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, cujos membros estão em F, o limite da sequência também está em F. Em palavras, um subconjunto é fechado se e só se ele é fechado relativamente a passar aos limites.*

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se, para toda sequência convergente $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, cujos membros estão em F, o limite da sequência também está em F. Em palavras, um subconjunto é fechado se e só se ele é fechado relativamente a passar aos limites.*

Demonstração. Recordamos que uma sequência de pontos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, é **convergente** e tem **limite** $x \in \mathbb{R}^n$, o que denotamos $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se, para toda sequência convergente $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, cujos membros estão em F, o limite da sequência também está em F. Em palavras, um subconjunto é fechado se e só se ele é fechado relativamente a passar aos limites.*

Demonstração. Recordamos que uma sequência de pontos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, é **convergente** e tem **limite** $x \in \mathbb{R}^n$, o que denotamos $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$. Podemos reformular essa definição: **para qualquer vizinhança aberta de x, a sequência fica toda nessa vizinhança a partir de um momento**.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se, para toda sequência convergente $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, cujos membros estão em F, o limite da sequência também está em F. Em palavras, um subconjunto é fechado se e só se ele é fechado relativamente a passar aos limites.*

Demonstração. Recordamos que uma sequência de pontos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, é **convergente** e tem **limite** $x \in \mathbb{R}^n$, o que denotamos $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$. Podemos reformular essa definição: **para qualquer vizinhança aberta de x, a sequência fica toda nessa vizinhança a partir de um momento**. O axioma de Hausdorff implica que qualquer sequência convergente possui um único limite.

O sentido intuitivo do conceito de subconjunto aberto é que todos os pontos bastante próximos a um ponto dado deste subconjunto estão no subconjunto. O sentido intuitivo do conceito de subconjunto fechado é dado pelo seguinte lema.

1.4. Lema. *Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se, para toda sequência convergente $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, cujos membros estão em F, o limite da sequência também está em F. Em palavras, um subconjunto é fechado se e só se ele é fechado relativamente a passar aos limites.*

Demonstração. Recordamos que uma sequência de pontos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, é **convergente** e tem **limite** $x \in \mathbb{R}^n$, o que denotamos $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i - x| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$.
Podemos reformular essa definição: **para qualquer vizinhança aberta de x, a sequência fica toda nessa vizinhança a partir de um momento**. O axioma de Hausdorff implica que qualquer sequência convergente possui um único limite.
Se F é fechado, $x_i \in F$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, mas $x \notin F$, então a partir de um momento a sequência fica na vizinhança aberta $\mathbb{R}^n \setminus F$ do ponto x. Uma contradição.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$. Uma contradição ■

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$. Uma contradição ■

1.5. Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é **contínua** se, para todo subconjunto aberto $V \subset\circ\, Y$, a **imagem inversa** $f^{-1}(V) := \big\{x \in X \mid f(x) \in V\big\}$ é aberta em X, $f^{-1}(V) \subset\circ\, X$.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. Uma contradição ■

1.5. Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é **contínua** se, para todo subconjunto aberto $V \subset_\circ Y$, a **imagem inversa** $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ é aberta em X, $f^{-1}(V) \subset_\circ X$. Uma definição equivalente usa subconjuntos fechados: $G \subset_f Y \Longrightarrow f^{-1}(G) \subset_f X$.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$. Uma contradição ■

1.5. Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é **contínua** se, para todo subconjunto aberto $V \subset_\circ Y$, a **imagem inversa** $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ é aberta em X, $f^{-1}(V) \subset_\circ X$. Uma definição equivalente usa subconjuntos fechados: $G \subset_f Y \implies f^{-1}(G) \subset_f X$. Isto segue da propriedade $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$, válida para quaisquer subconjunto $S \subset Y$ e aplicação $f : X \to Y$ entre conjuntos.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. Uma contradição ■

1.5. Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é **contínua** se, para todo subconjunto aberto $V \subset\!\circ\, Y$, a **imagem inversa** $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ é aberta em X, $f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$. Uma definição equivalente usa subconjuntos fechados: $G \subset_f Y \implies f^{-1}(G) \subset_f X$. Isto segue da propriedade $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$, válida para quaisquer subconjunto $S \subset Y$ e aplicação $f : X \to Y$ entre conjuntos.

Note que a aplicação $f : X \to Y$ é contínua se e só se a correspondente aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua já que a topologia em Y é induzida pela topologia em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado relativamente a fazer limites, então o complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Realmente, se $\mathbb{R}^n \setminus F$ não fosse aberto, poderíamos achar um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tal que nenhuma bola aberta centrada em x está contida em $\mathbb{R}^n \setminus F$. Em outras palavras, para qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a interseção $F \cap B(x, \varepsilon)$ não é vazia. Fazendo $\varepsilon := \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, encontramos um ponto $x_i \in F$ tal que $|x_i - x| < \frac{1}{i}$. É imediato que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. Uma contradição ■

1.5. Definição. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é **contínua** se, para todo subconjunto aberto $V \subset\!\circ\, Y$, a **imagem inversa** $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ é aberta em X, $f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$. Uma definição equivalente usa subconjuntos fechados: $G \subset_f Y \implies f^{-1}(G) \subset_f X$. Isto segue da propriedade $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$, válida para quaisquer subconjunto $S \subset Y$ e aplicação $f : X \to Y$ entre conjuntos.

Note que a aplicação $f : X \to Y$ é contínua se e só se a correspondente aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua já que a topologia em Y é induzida pela topologia em $\mathbb{R}^n$. Pelo mesmo motivo, a aplicação $f|_{X'} : X' \to Y$ (chamada a **restrição** de f para X') é contínua se a aplicação $f : X \to Y$ é contínua e $X' \subset X$.

Dada uma aplicação $f : X \to Y$ com $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, usando n coordenadas em $\mathbb{R}^n$, podemos interpretar a aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ como sendo n funções $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, isto é, $\hat{f}(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \in X$. Chamamos as funções f_i's **componentes** da aplicação $\hat{f}$ (ou de f).

Dada uma aplicação $f : X \to Y$ com $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, usando n coordenadas em $\mathbb{R}^n$, podemos interpretar a aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ como sendo n funções $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, isto é, $\hat{f}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \in X$. Chamamos as funções f_i's **componentes** da aplicação $\hat{f}$ (ou de f).

Dadas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ entre conjuntos, lembramos que a **aplicação composta** $g \circ f : X \to Z$ é definida pela regra $(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$ para $x \in X$.

Dada uma aplicação $f : X \to Y$ com $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, usando n coordenadas em $\mathbb{R}^n$, podemos interpretar a aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ como sendo n funções $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, isto é, $\hat{f}(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \in X$. Chamamos as funções f_i's **componentes** da aplicação $\hat{f}$ (ou de f).

Dadas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ entre conjuntos, lembramos que a **aplicação composta** $g \circ f : X \to Z$ é definida pela regra $(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$ para $x \in X$. Uma verificação direta mostra a fórmula $(g \circ f)^{-1}(S) = f^{-1}\big(g^{-1}(S)\big)$ para imagens inversas, onde $S \subset Z$.

Dada uma aplicação $f : X \to Y$ com $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, usando n coordenadas em $\mathbb{R}^n$, podemos interpretar a aplicação $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^n$ como sendo n funções $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, isto é, $\hat{f}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \in X$. Chamamos as funções f_i's **componentes** da aplicação $\hat{f}$ (ou de f).

Dadas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ entre conjuntos, lembramos que a **aplicação composta** $g \circ f : X \to Z$ é definida pela regra $(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$ para $x \in X$. Uma verificação direta mostra a fórmula $(g \circ f)^{-1}(S) = f^{-1}\big(g^{-1}(S)\big)$ para imagens inversas, onde $S \subset Z$.

A seguinte proposição é uma lista das propriedades básicas de aplicações contínuas. Na maioria dos casos que encontraremos em nossa prática, a proposição junto com a continuidade das funções elementares é uma ferramenta adequada para demonstrar que uma aplicação concreta é contínua.

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

2. *Se* f *é contínua, então sua restrição* $f|_{X'} : X' \to Y$ *é contínua.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

2. *Se* f *é contínua, então sua restrição* $f|_{X'} : X' \to Y$ *é contínua.*

3. *Se* f *e* g *são contínuas, então a composta* $g \circ f$ *é contínua.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

2. *Se* f *é contínua, então sua restrição* $f|_{X'} : X' \to Y$ *é contínua.*

3. *Se* f *e* g *são contínuas, então a composta* $g \circ f$ *é contínua.*

4. *Sejam* $U_i \subset\circ X$*,* $i \in I$*, subconjuntos abertos tais que* $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$*. Então a aplicação* f *é contínua se e só se todas as restrições* $f|_{U_i}$*,* $i \in I$*, são contínuas. Em palavras, "ser contínua" é uma* **propriedade local** *de uma aplicação.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

2. *Se* f *é contínua, então sua restrição* $f|_{X'} : X' \to Y$ *é contínua.*

3. *Se* f *e* g *são contínuas, então a composta* $g \circ f$ *é contínua.*

4. *Sejam* $U_i \subset\!\circ\, X$*,* $i \in I$*, subconjuntos abertos tais que* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$*. Então a aplicação* f *é contínua se e só se todas as restrições* $f|_{U_i}$*,* $i \in I$*, são contínuas. Em palavras, "ser contínua" é uma* **propriedade local** *de uma aplicação.*

5. *A aplicação* f *é contínua se e só se ela* **preserva limites***.*

1.6. Proposição. *Sejam* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *funções contínuas,* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *aplicações,* $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *aplicações contínuas,* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear,* $X' \subset X$ *e* $p \in \mathbb{R}^n$*, onde* $X \subset \mathbb{R}^l$*,* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^n$*. Então as seguintes afirmações são válidas.*

1. *A aplicação* f *é contínua se e só se a correspondente aplicação* $\hat{f} : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

2. *Se* f *é contínua, então sua restrição* $f|_{X'} : X' \to Y$ *é contínua.*

3. *Se* f *e* g *são contínuas, então a composta* $g \circ f$ *é contínua.*

4. *Sejam* $U_i \subset\!\circ\, X$*,* $i \in I$*, subconjuntos abertos tais que* $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$*. Então a aplicação* f *é contínua se e só se todas as restrições* $f|_{U_i}$*,* $i \in I$*, são contínuas. Em palavras, "ser contínua" é uma* **propriedade local** *de uma aplicação.*

5. *A aplicação* f *é contínua se e só se ela* **preserva limites**. *Isto significa que, toda vez em que temos uma sequência* $x_i \in X$*,* $i \in \mathbb{N}$*, convergente a um ponto* $x \in X$*,* $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$*, a sequência* $f(x_i)$*,* $i \in \mathbb{N}$*, é convergente e* $\lim\limits_{i \to \infty} f(x_i) = f(x)$*, ou seja,* $\lim\limits_{i \to \infty} f(x_i) = f\big(\lim\limits_{i \to \infty} x_i\big)$*.*

6. *A aplicação* f *é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento"* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *de algumas coordenadas em* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua.*

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathrm{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

8. *As funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas. Se $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função f_1/f_2 é contínua.*

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

8. *As funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas. Se $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função f_1/f_2 é contínua.*

9. *A aplicação $f_1 g_1 + f_2 g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua.*

6. *A aplicação* f *é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento"* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *de algumas coordenadas em* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações* $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ *e as funções* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, *dadas pelas regras* $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ *e* $x \mapsto x^{-1}$, *são contínuas.*

8. *As funções* $f_1 + f_2$ *e* $f_1 f_2$ *são contínuas. Se* $f_2(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X$, *então a função* f_1/f_2 *é contínua.*

9. *A aplicação* $f_1 g_1 + f_2 g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ *é contínua.*

10. *A aplicação linear* L *é contínua.*

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

8. *As funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas. Se $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função f_1/f_2 é contínua.*

9. *A aplicação $f_1 g_1 + f_2 g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua.*

10. *A aplicação linear L é contínua.*

Demonstração. **1.** Discutido acima.

2. Discutido acima.

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

8. *As funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas. Se $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função f_1/f_2 é contínua.*

9. *A aplicação $f_1 g_1 + f_2 g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua.*

10. *A aplicação linear L é contínua.*

Demonstração. **1.** Discutido acima.

2. Discutido acima.

3. Uma consequência direta da fórmula $(g \circ f)^{-1}(S) = f^{-1}\big(g^{-1}(S)\big)$ e da definição de aplicação contínua.

6. *A aplicação f é contínua se e só se suas componentes são funções contínuas. Em particular, o "esquecimento" $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de algumas coordenadas em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.*

7. *As aplicações $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ e as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$, dadas pelas regras $x \mapsto p$, $x \mapsto x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas.*

8. *As funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são contínuas. Se $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então a função f_1/f_2 é contínua.*

9. *A aplicação $f_1 g_1 + f_2 g_2 : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua.*

10. *A aplicação linear L é contínua.*

Demonstração. **1.** Discutido acima.

2. Discutido acima.

3. Uma consequência direta da fórmula $(g \circ f)^{-1}(S) = f^{-1}\big(g^{-1}(S)\big)$ e da definição de aplicação contínua.

4. Suponhamos que todas as restrições $f|_{U_i} : U_i \to Y$, $i \in I$, são contínuas e seja $V \subset\!\circ\, Y$. Precisamos verificar que $f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$. É fácil ver que $(f|_{U_i})^{-1}(V) = U_i \cap f^{-1}(V)$. Logo, $U_i \cap f^{-1}(V) \subset\!\circ\, U_i$ para todo $i \in I$, ou seja, $U_i \cap f^{-1}(V) = U_i \cap W_i$ para algum $W_i \subset\!\circ\, X$, implicando $U_i \cap f^{-1}(V)$

$\subset\!\circ X$. Concluímos de $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i \in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\!\circ X$.
A recíproca segue do item 2.

$\subset\!\circ\, X$. Concluímos de $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i \in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\!\circ\, X$.
A recíproca segue do item 2.

5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$.

$\subset\circ X$. Concluímos de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\circ X$.
A recíproca segue do item 2.
5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\circ Y$.

$\subset\circ X$. Concluímos de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\circ X$.
A recíproca segue do item 2.

5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\circ Y$. Então $x \in f^{-1}(V) \subset\circ X$ é uma vizinhança aberta de x. Logo, a partir de um momento k, temos $x_i \in f^{-1}(V)$ para $i \geq k$. Portanto, $f(x_i) \in V$ para $i \geq k$, como desejado.

$\subset\!\circ\, X$. Concluímos de $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i \in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\!\circ\, X$.
A recíproca segue do item 2.
5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\!\circ\, Y$. Então $x \in f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$ é uma vizinhança aberta de x. Logo, a partir de um momento k, temos $x_i \in f^{-1}(V)$ para $i \geq k$. Portanto, $f(x_i) \in V$ para $i \geq k$, como desejado.
Reciprocamente, suponhamos que f preserva limites e seja $V \subset\!\circ\, Y$.

$\subset\!\circ\, X$. Concluímos de $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\!\circ\, X$.
A recíproca segue do item 2.
5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\!\circ\, Y$. Então $x \in f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$ é uma vizinhança aberta de x. Logo, a partir de um momento k, temos $x_i \in f^{-1}(V)$ para $i \geq k$. Portanto, $f(x_i) \in V$ para $i \geq k$, como desejado.
Reciprocamente, suponhamos que f preserva limites e seja $V \subset\!\circ\, Y$. Tomemos qualquer ponto $x \in f^{-1}(V)$.

$\subset\!\circ\, X$. Concluímos de $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i\in I} \big(U_i \cap f^{-1}(V)\big) \subset\!\circ\, X$.
A recíproca segue do item 2.
5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\!\circ\, Y$. Então $x \in f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$ é uma vizinhança aberta de x. Logo, a partir de um momento k, temos $x_i \in f^{-1}(V)$ para $i \geq k$. Portanto, $f(x_i) \in V$ para $i \geq k$, como desejado.
Reciprocamente, suponhamos que f preserva limites e seja $V \subset\!\circ\, Y$. Tomemos qualquer ponto $x \in f^{-1}(V)$. Precisamos provar que existe uma bola aberta $B(x,\varepsilon)$ centrada em x tal que $X \cap B(x,\varepsilon) \subset f^{-1}(V)$.

$\subset\!\circ\, X$. Concluímos de $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i\in I} \left(U_i \cap f^{-1}(V)\right) \subset\!\circ\, X$.
A recíproca segue do item 2.

5. Suponhamos que f é contínua e que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ com $x_i, x \in X$. Tomemos uma vizinhança aberta arbitrária $f(x) \in V \subset\!\circ\, Y$. Então $x \in f^{-1}(V) \subset\!\circ\, X$ é uma vizinhança aberta de x. Logo, a partir de um momento k, temos $x_i \in f^{-1}(V)$ para $i \geq k$. Portanto, $f(x_i) \in V$ para $i \geq k$, como desejado.

Reciprocamente, suponhamos que f preserva limites e seja $V \subset\!\circ\, Y$. Tomemos qualquer ponto $x \in f^{-1}(V)$. Precisamos provar que existe uma bola aberta $B(x,\varepsilon)$ centrada em x tal que $X \cap B(x,\varepsilon) \subset f^{-1}(V)$. Senão, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos $X \cap B(x, \frac{1}{i}) \not\subset f^{-1}(V)$. Podemos escolher então um ponto $x_i \in X \cap B(x, \frac{1}{i})$ tal que $x_i \notin f^{-1}(V)$. Claro que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. Concluímos daí que $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = f(x)$. Mas $f(x) \in V \subset\!\circ\, Y$ é uma vizinhança aberta de $f(x)$ e $x_i \notin f^{-1}(V)$ implica $f(x_i) \notin V$. Uma contradição com a definição de limite.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \ldots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \leq (p_{ji} - q_j)^2 \leq |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \ldots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \leq (p_{ji} - q_j)^2 \leq |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

De fato, raciocínios parecidos aos acima mostram que o limite de uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$ se calcula por componentes.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \ldots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \leq (p_{ji} - q_j)^2 \leq |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

De fato, raciocínios parecidos aos acima mostram que o limite de uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$ se calcula por componentes.

A j-ésima componente de $\hat{f}$ é nada mais do que $\pi_j \circ \hat{f}$. Pelo item 3, a função $\pi_j \circ \hat{f}$ é contínua se $\hat{f}$ for contínua.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \ldots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \leq (p_{ji} - q_j)^2 \leq |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

De fato, raciocínios parecidos aos acima mostram que o limite de uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$ se calcula por componentes.

A j-ésima componente de $\hat{f}$ é nada mais do que $\pi_j \circ \hat{f}$. Pelo item 3, a função $\pi_j \circ \hat{f}$ é contínua se $\hat{f}$ for contínua.

Reciprocamente, suponhamos que todas as componentes $f_1, \ldots, f_m$ de $\hat{f}$ são contínuas e seja $p_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a um ponto $q \in X$, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \dots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \leq (p_{ji} - q_j)^2 \leq |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

De fato, raciocínios parecidos aos acima mostram que o limite de uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$ se calcula por componentes.

A j-ésima componente de $\hat{f}$ é nada mais do que $\pi_j \circ \hat{f}$. Pelo item 3, a função $\pi_j \circ \hat{f}$ é contínua se $\hat{f}$ for contínua.

Reciprocamente, suponhamos que todas as componentes $f_1, \dots, f_m$ de $\hat{f}$ são contínuas e seja $p_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a um ponto $q \in X$, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$. Precisamos demonstrar que $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{f}(p_i) = \hat{f}(q)$.

6. Primeiramente observamos, utilizando o item 4, que a **função de projeção** $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R}$, definida pela regra $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_j$, é contínua. Com efeito, se $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ para $p_i = (p_{1i}, \dots, p_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ e $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, então $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q| = 0$ pela definição de limite. Logo, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|^2 = 0$ e $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j)^2 = 0$, pois $0 \le (p_{ji} - q_j)^2 \le |p_i - q|^2$. Daí segue $\lim\limits_{i\to\infty} (p_{ji} - q_j) = 0$, como desejado.

De fato, raciocínios parecidos aos acima mostram que o limite de uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$ se calcula por componentes.

A j-ésima componente de $\hat{f}$ é nada mais do que $\pi_j \circ \hat{f}$. Pelo item 3, a função $\pi_j \circ \hat{f}$ é contínua se $\hat{f}$ for contínua.

Reciprocamente, suponhamos que todas as componentes $f_1, \dots, f_m$ de $\hat{f}$ são contínuas e seja $p_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a um ponto $q \in X$, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$. Precisamos demonstrar que $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{f}(p_i) = \hat{f}(q)$. Como foi observado, o limite se calcula por componentes. Deste modo, precisamos verificar que $\lim\limits_{i\to\infty} f_j(p_i) = f_j(q)$. Mas isto segue da continuidade da componente f_j pelo item 5.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

O mesmo funciona para a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$. Sejam $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabemos que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{-1} = x^{-1}$.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

O mesmo funciona para a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$. Sejam $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabemos que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{-1} = x^{-1}$.

8. Consideremos a aplicação $h : X \to \mathbb{R}^2$ cujas componentes são f_1 e f_2. A função $f_1 + f_2$ é a composta da função $+$ (vide item 7) e da aplicação h.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

O mesmo funciona para a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$. Sejam $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabemos que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{-1} = x^{-1}$.

8. Consideremos a aplicação $h : X \to \mathbb{R}^2$ cujas componentes são f_1 e f_2. A função $f_1 + f_2$ é a composta da função $+$ (vide item 7) e da aplicação h. Pelo item 3, $f_1 + f_2$ é contínua.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

O mesmo funciona para a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$. Sejam $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabemos que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{-1} = x^{-1}$.

8. Consideremos a aplicação $h : X \to \mathbb{R}^2$ cujas componentes são f_1 e f_2. A função $f_1 + f_2$ é a composta da função $+$ (vide item 7) e da aplicação h. Pelo item 3, $f_1 + f_2$ é contínua. Da mesma maneira, a função $f_1 f_2$, sendo a composta de $\times$ e de h, é contínua.

7. A aplicação $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{const}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ou vazia (se $p \notin S$) ou todo $\mathbb{R}^m$ (se $p \in S$).

A aplicação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$ é contínua, pois a imagem inversa de qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é ele mesmo.

Para demonstrar que as funções $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$ são contínuas, tomemos uma sequência $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ convergente a um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i, y_i) = (x, y)$. Como foi observado na demonstração do item anterior, isto significa que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ e $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$. Lembramos agora que $\lim\limits_{i\to\infty}(x_i + y_i) = x + y$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i = xy$. Resta utilizar o item 5.

O mesmo funciona para a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R}$. Sejam $x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabemos que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{-1} = x^{-1}$.

8. Consideremos a aplicação $h : X \to \mathbb{R}^2$ cujas componentes são f_1 e f_2. A função $f_1 + f_2$ é a composta da função $+$ (vide item 7) e da aplicação h. Pelo item 3, $f_1 + f_2$ é contínua. Da mesma maneira, a função $f_1 f_2$, sendo a composta de $\times$ e de h, é contínua. Finalmente, $f_1/f_2 = f_1(1/f_2)$. A função $1/f_2$, sendo a composta da função $f_2 : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com a função ${}^{-1}$ (vide item 7), é contínua pelo item 3.

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.
10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 $\blacksquare$

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.

10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ■

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.
10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ∎

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$
Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.

10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ∎

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$

Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

1.7.1. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** sobre X se

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x_0, x_1 \in X\ |x_1 - x_0| < \delta \implies \big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.
10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ■

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.
Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

1.7.1. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** sobre X se
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x_0, x_1 \in X\ |x_1 - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.

1.7.2. Definição. Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** se ele está contido em uma bola.

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.

10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 $\blacksquare$

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.
Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

1.7.1. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** sobre X se
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x_0, x_1 \in X\ |x_1 - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.

1.7.2. Definição. Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** se ele está contido em uma bola. Equivalentemente, L é limitado se $|L| \leq r$ para algum $r \in \mathbb{R}$.

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.
10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ∎

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$
Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

1.7.1. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** sobre X se
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x_0, x_1 \in X\ |x_1 - x_0| < \delta \Longrightarrow \big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$

1.7.2. Definição. Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** se ele está contido em uma bola. Equivalentemente, L é limitado se $|L| \leq r$ para algum $r \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\varnothing \neq K \subset \mathbb{R}^n$ é um **compacto** se K é fechado em $\mathbb{R}^n$, $K \subset_f \mathbb{R}^n$, e limitado.

9. A afirmação segue dos itens 8 e 6.
10. Pelo item 6, podemos supor que $n = 1$, ou seja, $L(x_1, \dots, x_m) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ para alguns $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Agora, o fato segue do item 8 e da segunda afirmação do item 6 ■

1.7. Continuidade uniforme e convergência uniforme. Como sabemos, a continuidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se expressa assim:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in X\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.
Enfatizamos que δ depende de $x_0 \in X$ e de ε. Se trocarmos os quantificadores, ou seja, se fizermos δ independer de $x_0 \in X$, obtemos a seguinte

1.7.1. Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** sobre X se
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x_0, x_1 \in X\ |x_1 - x_0| < \delta \implies \big|f(x_1) - f(x_0)\big| < \varepsilon$.

1.7.2. Definição. Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** se ele está contido em uma bola. Equivalentemente, L é limitado se $|L| \leq r$ para algum $r \in \mathbb{R}$.
Dizemos que $\varnothing \neq K \subset \mathbb{R}^n$ é um **compacto** se K é fechado em $\mathbb{R}^n$, $K \subset_f \mathbb{R}^n$, e limitado.

Um exemplo de um compacto é um retângulo fechado $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior.

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S \subset \mathbb{R}$: $S \leq \sup S$ (isto significa que $s \leq \sup S$ para todo $s \in S$) e, para qualquer $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $S \leq r$, temos $\sup S \leq r$.)

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S \subset \mathbb{R} : S \le \sup S$ (isto significa que $s \le \sup S$ para todo $s \in S$) e, para qualquer $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $S \le r$, temos $\sup S \le r$.) Claro que $||f|| = 0$ implica $f = 0$.

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S \subset \mathbb{R}$: $S \leq \sup S$ (isto significa que $s \leq \sup S$ para todo $s \in S$) e, para qualquer $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $S \leq r$, temos $\sup S \leq r$.) Claro que $||f|| = 0$ implica $f = 0$.

1.7.5. Lema. *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções. Então* $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ *e* $||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S \subset \mathbb{R}$: $S \leq \sup S$ (isto significa que $s \leq \sup S$ para todo $s \in S$) e, para qualquer $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $S \leq r$, temos $\sup S \leq r$.) Claro que $||f|| = 0$ implica $f = 0$.

1.7.5. Lema. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções. Então $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e $||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.*

Demonstração. Para qualquer $x \in X$, temos
$\big|f(x) + g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leq ||f|| + ||g||$

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f|| := ||f||_X := \sup \big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S \subset \mathbb{R}$: $S \leq \sup S$ (isto significa que $s \leq \sup S$ para todo $s \in S$) e, para qualquer $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $S \leq r$, temos $\sup S \leq r$.) Claro que $||f|| = 0$ implica $f = 0$.

1.7.5. Lema. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções. Então $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e $||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.*

Demonstração. Para qualquer $x \in X$, temos
$\big|f(x) + g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leq ||f|| + ||g||$ e
$\big|f(x) \cdot g(x)\big| = \big|f(x)\big| \cdot \big|g(x)\big| \leq ||f|| \cdot ||g||$ ■

1.7.3. Exercício. Utilizando o fato que as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ são contínuas pela Proposição 1.6 (6), prove que o retângulo $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ é fechado.

1.7.4. Definição. Seja $f:X\to\mathbb{R}$ uma função. Definimos a **norma** de f (sobre X) pela fórmula $||f||:=||f||_X:=\sup\big|f(X)\big|$, onde $\sup S$ denota o **supremo**, isto é, a menor cota superior. (A propriedade característica do supremo de $S\subset\mathbb{R}$: $S\leq\sup S$ (isto significa que $s\leq\sup S$ para todo $s\in S$) e, para qualquer $r\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ tal que $S\leq r$, temos $\sup S\leq r$.) Claro que $||f||=0$ implica $f=0$.

1.7.5. Lema. *Sejam $f,g:X\to\mathbb{R}$ funções. Então $||f+g||\leq||f||+||g||$ e $||fg||\leq||f||\cdot||g||$.*

Demonstração. Para qualquer $x\in X$, temos
$\big|f(x)+g(x)\big|\leq\big|f(x)\big|+\big|g(x)\big|\leq||f||+||g||$ e
$\big|f(x)\cdot g(x)\big|=\big|f(x)\big|\cdot\big|g(x)\big|\leq||f||\cdot||g||$ ∎

1.7.6. Definição. Dizemos que uma sequência de funções $f_i:X\to\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$, converge **uniformemente** a uma função $f:X\to\mathbb{R}$ e escrevemos $\lim\limits_{i\to\infty}f_i=f$ se $\lim\limits_{i\to\infty}||f_i-f||=0$.

O fato que $||f_i - f|| \le \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f.

O fato que $||f_i - f|| \leq \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_i está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do "gráfico" de f para todo i suficientemente grande.

O fato que $||f_i - f|| \leq \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_i está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do "gráfico" de f para todo i suficientemente grande.

Recordamos agora o

1.7.7. Lema (teorema de Lagrange). *Seja $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ uma função contínua derivável em (u, v).*

O fato que $||f_i - f|| \leq \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_i está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do "gráfico" de f para todo i suficientemente grande.

Recordamos agora o

1.7.7. Lema (teorema de Lagrange). *Seja $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ uma função contínua derivável em (u, v). Então $f(v) = f(u) + f'(\xi)(v - u)$ para algum $\xi \in (u, v)$.*

O fato que $||f_i - f|| \leq \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_i está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do "gráfico" de f para todo i suficientemente grande.

Recordamos agora o

1.7.7. Lema (teorema de Lagrange). *Seja $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ uma função contínua derivável em (u, v). Então $f(v) = f(u) + f'(\xi)(v - u)$ para algum $\xi \in (u, v)$.*

1.7.8. Definição. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita **integrável** se f é o limite uniforme de uma sequência de funções escada $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i\to\infty} f_i = f$.

O fato que $||f_i - f|| \leq \varepsilon$ significa que o "gráfico" de f_i está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do "gráfico" de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_i está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do "gráfico" de f para todo i suficientemente grande.

Recordamos agora o

1.7.7. Lema (teorema de Lagrange). *Seja $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ uma função contínua derivável em (u, v). Então $f(v) = f(u) + f'(\xi)(v - u)$ para algum $\xi \in (u, v)$.*

1.7.8. Definição. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita **integrável** se f é o limite uniforme de uma sequência de funções escada $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i\to\infty} f_i = f$.

Lembramos também as propriedades básicas da integral de funções de uma variável real.

1.7.9. Proposição. *Sejam $f, f_1, f_2, h_i : [a, c] \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, funções integráveis, $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ uma função, $b \in [a, c]$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Então os seguintes fatos são válidos.*

• *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$
$= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t.$

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$
$= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a, c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$
$= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$
$= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
- $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$ $+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$ $= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
- $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.
- *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$ $+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$ $= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
- $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.
- *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*
- *Se* $\big|f(t)\big| \geq m > 0$ *para todo* $t \in [a,c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a, c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
- $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c - a)$.
- *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*
- *Se* $\big|f(t)\big| \geq m > 0$ *para todo* $t \in [a, c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*
- *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty} \int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$.

• *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

• *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

• *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

• *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.

• $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.

• *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*

• *Se* $\big|f(t)\big| \geq m > 0$ *para todo* $t \in [a,c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*

• *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty} \int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral.*

- *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $r_1f_1 + r_2f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1f_1(t) + r_2f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = r_1\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2\int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Se* $f_1(t) \le f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
- *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \le \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
- $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \le ||f||(c-a)$.
- *A função* f_1f_2 *é integrável.*
- *Se* $\big|f(t)\big| \ge m > 0$ *para todo* $t \in [a,c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*
- *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty}\int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral. Em particular, toda função contínua é integrável.*

• *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

• *A função* $r_1f_1 + r_2f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1f_1(t) + r_2f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = r_1\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2\int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

• *Se* $f_1(t) \le f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

• *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \le \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.

• $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \le ||f||(c-a)$.

• *A função* f_1f_2 *é integrável.*

• *Se* $\big|f(t)\big| \ge m > 0$ *para todo* $t \in [a,c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*

• *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty}\int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral. Em particular, toda função contínua é integrável.*

Nossas "reminiscências" já estão ultrapassando todos os limites. Vamos por isto adiar a demonstração do seguinte lema até um momento adequado.

1.7.10. Lema. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^m$ *um compacto e* $g : K \to \mathbb{R}$ *uma função contínua.*

• *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t +$
$+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
• *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$
$= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
• *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a, c]$, *então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
• *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
• $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.
• *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*
• *Se* $\big|f(t)\big| \geq m > 0$ *para todo* $t \in [a, c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$, *a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*
• *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty} \int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral. Em particular, toda função contínua é integrável.*

Nossas "reminiscências" já estão ultrapassando todos os limites. Vamos por isto adiar a demonstração do seguinte lema até um momento adequado.

1.7.10. Lema. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^m$ *um compacto e* $g : K \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então a função* g *é uniformemente contínua.*

• *As funções* $f|_{[a,b]}$ *e* $f|_{[b,c]}$ *são integráveis e* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + {}$ $+ \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$.
• *A função* $r_1 f_1 + r_2 f_2$ *é integrável e* $\int_a^c \big(r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{d}t =$ $= r_1 \int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t + r_2 \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
• *Se* $f_1(t) \leq f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,c]$*, então* $\int_a^c f_1(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
• *A função* $|f|$ *é integrável e* $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq \int_a^c \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
• $\big|\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leq ||f||(c-a)$.
• *A função* $f_1 f_2$ *é integrável.*
• *Se* $\big|f(t)\big| \geq m > 0$ *para todo* $t \in [a,c]$ *e algum* $m \in \mathbb{R}$*, a função* $\frac{1}{f}$ *é integrável.*
• *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} h_i = h$ *é limite uniforme, então* h *é uma função integrável e* $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{i\to\infty} \int_a^c h_i(t)\,\mathrm{d}t$*. Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral. Em particular, toda função contínua é integrável.*

Nossas "reminiscências" já estão ultrapassando todos os limites. Vamos por isto adiar a demonstração do seguinte lema até um momento adequado.

1.7.10. Lema. *Sejam* $K \subset \mathbb{R}^m$ *um compacto e* $g : K \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então a função* g *é uniformemente contínua. Além disso, existem* $k_0, k_1 \in K$ *tais que* $g(k_0) \leq g(k) \leq g(k_1)$ *para todo* $k \in K$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$*. Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$*.*

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a,b] \times (u,v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t,s)$ *é derivável em* $s \in (u,v)$ *para cada* $t \in [a,b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)$ *é contínua em* $[a,b] \times (u,v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)\,\mathrm{d}t$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f:[a,b]\times(u,v)\to\mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t,s)$ *é derivável em* $s\in(u,v)$ *para cada* $t\in[a,b]$*. Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)$ *é contínua em* $[a,b]\times(u,v)$*. Então a função* $h(s):=$ $=\int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s):=\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)\,\mathrm{d}t$*. Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(t,s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(t,s)$ *é contínua em* $[a,b]\times(u,v)$*.*

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$.

Demonstração. Seja $s \in (u, v)$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$.

Demonstração. Seja $s \in (u, v)$. Precisamos mostrar que, para qualquer sequência $s \neq s_i \in (u, v)$, $i \in \mathbb{N}$, convergente a s, $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, vale

$\lim\limits_{i\to\infty} \frac{h(s_i) - h(s)}{s_i - s} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t,$

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a,b] \times (u,v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t,s)$ *é derivável em* $s \in (u,v)$ *para cada* $t \in [a,b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)$ *é contínua em* $[a,b] \times (u,v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t,s)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(t,s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t,s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t,s)$ *é contínua em* $[a,b] \times (u,v)$.

Demonstração. Seja $s \in (u,v)$. Precisamos mostrar que, para qualquer sequência $s \neq s_i \in (u,v)$, $i \in \mathbb{N}$, convergente a s, $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, vale $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{h(s_i)-h(s)}{s_i - s} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t,s)\,\mathrm{d}t$, isto é, $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s}\,\mathrm{d}t = = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t,s)\,\mathrm{d}t$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$*. Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$*. Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)\,\mathrm{d}t$*. Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$*.*

Demonstração. Seja $s \in (u, v)$. Precisamos mostrar que, para qualquer sequência $s \neq s_i \in (u, v)$, $i \in \mathbb{N}$, convergente a s, $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, vale $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{h(s_i)-h(s)}{s_i-s} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$, isto é, $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}\,\mathrm{d}t = = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$. Pela Proposição 1.7.9, é suficiente provar que a função $g(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ é o limite uniforme da sequência de funções $g_i(t) := = \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}$, $i \in \mathbb{N}$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$.

Demonstração. Seja $s \in (u, v)$. Precisamos mostrar que, para qualquer sequência $s \neq s_i \in (u, v)$, $i \in \mathbb{N}$, convergente a s, $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, vale $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{h(s_i)-h(s)}{s_i-s} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$, isto é, $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}\,\mathrm{d}t = = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$. Pela Proposição 1.7.9, é suficiente provar que a função $g(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ é o limite uniforme da sequência de funções $g_i(t) := = \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}$, $i \in \mathbb{N}$. É claro que existe um intervalo fechado $[c, d] \subset \subset (u, v)$ tal que $s, s_i \in [c, d]$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Os conceitos e fatos introduzidos acima possibilitam em certas circunstâncias comutar a derivação com a integração:

1.7.11. Lema. *Seja* $f : [a, b] \times (u, v) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(t, s)$ *é derivável em* $s \in (u, v)$ *para cada* $t \in [a, b]$. *Suponhamos que a função* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$. *Então a função* $h(s) := = \int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *é derivável e* $h'(s) := \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(t, s)\,\mathrm{d}t$. *Em outras palavras,* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b f(t, s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$ *se a função* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ *é contínua em* $[a, b] \times (u, v)$.

Demonstração. Seja $s \in (u, v)$. Precisamos mostrar que, para qualquer sequência $s \neq s_i \in (u, v)$, $i \in \mathbb{N}$, convergente a s, $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, vale $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{h(s_i)-h(s)}{s_i-s} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$, isto é, $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}\,\mathrm{d}t = = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)\,\mathrm{d}t$. Pela Proposição 1.7.9, é suficiente provar que a função $g(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, s)$ é o limite uniforme da sequência de funções $g_i(t) := = \frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s}$, $i \in \mathbb{N}$. É claro que existe um intervalo fechado $[c, d] \subset \subset (u, v)$ tal que $s, s_i \in [c, d]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sendo $g(t, x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t, x)$ contínua em $[a, b] \times (u, v)$, ela é uniformemente contínua em $[a, b] \times [c, d]$ pelos Exercício 1.7.3 e Lema 1.7.10.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t, x)$ uniformemente contínua em $[a, b] \times [c, d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t, x) - g(t, s)\big| < \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t, x)$ uniformemente contínua em $[a, b] \times [c, d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t, x) - g(t, s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i \to \infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a, b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s} = g(t, \xi_i)$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \implies \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i-s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i \to \infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

1.8. Definição. Uma aplicação contínua $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se chama **caminho de classe C^0** em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente **caminho** em $\mathbb{R}^n$ ou **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

1.8. Definição. Uma aplicação contínua $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se chama **caminho de classe C^0** em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente **caminho** em $\mathbb{R}^n$ ou **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$. Um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dito **diferenciável** se existe a derivada $\dot{c}(t_0) := c'(t_0) := \lim\limits_{\substack{[a,b]\ni t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0}$ para todo

$t_0 \in [a,b]$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

1.8. Definição. Uma aplicação contínua $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se chama **caminho de classe C^0** em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente **caminho** em $\mathbb{R}^n$ ou **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$. Um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dito **diferenciável** se existe a derivada $\dot{c}(t_0) := c'(t_0) := \lim\limits_{\substack{[a,b]\ni t\to t_0 \\ t\neq t_0}} \frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0}$ para todo $t_0 \in [a,b]$. Se, por sua vez, $\dot{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^0, ou seja, é contínuo, dizemos que c é um caminho **de classe C^1**.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b]\times[c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x)-g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i)-g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t)-g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

1.8. Definição. Uma aplicação contínua $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se chama **caminho de classe C^0** em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente **caminho** em $\mathbb{R}^n$ ou **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$. Um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dito **diferenciável** se existe a derivada $\dot{c}(t_0) := c'(t_0) := \lim\limits_{\substack{[a,b]\ni t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{c(t)-c(t_0)}{t-t_0}$ para todo $t_0 \in [a,b]$. Se, por sua vez, $\dot{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^0, ou seja, é contínuo, dizemos que c é um caminho **de classe C^1**. Por indução, um caminho **de classe C^{k+1}** é um caminho diferenciável cuja derivada é de classe C^k.

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Sendo $g(t,x)$ uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - s| < \delta \Longrightarrow \big|g(t,x) - g(t,s)\big| < \varepsilon$. Devido a $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = s$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|s_i - s| < \delta$ para todo $i \geq m$. Pelo teorema de Lagrange (o Lema 1.7.7), para cada $i \geq m$ e cada $t \in [a,b]$, podemos encontrar ξ_i entre s_i e s tal que $\frac{f(t,s_i)-f(t,s)}{s_i - s} = g(t,\xi_i)$. Já que $|s_i - s| < \delta$ implica $|\xi_i - s| < \delta$, obtemos $\big|g(t,\xi_i) - g(t,s)\big| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$, ou seja, $\big|g_i(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ para todos $i \geq m$ e $t \in [a,b]$. Isto significa que $||g_i - g|| < \varepsilon$ para todo $i \geq m$ ■

1.8. Definição. Uma aplicação contínua $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se chama **caminho de classe C^0** em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente **caminho** em $\mathbb{R}^n$ ou **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$. Um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dito **diferenciável** se existe a derivada $\dot{c}(t_0) := c'(t_0) := \lim\limits_{\substack{[a,b]\ni t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{c(t)-c(t_0)}{t - t_0}$ para todo $t_0 \in [a,b]$. Se, por sua vez, $\dot{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^0, ou seja, é contínuo, dizemos que c é um caminho **de classe C^1**. Por indução, um caminho **de classe C^{k+1}** é um caminho diferenciável cuja derivada é de classe C^k. Se um caminho é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$, dizemos que o caminho é **de classe C^∞**.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \dots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \dots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c. Deste modo, um caminho diferenciável $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é simplesmente n funções deriváveis.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.
Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \dots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c. Deste modo, um caminho diferenciável $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é simplesmente n funções deriváveis.

1.9. Integração de caminho. A gente pode integrar caminhos do mesmo jeito como acabamos de derivá-los.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \dots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c. Deste modo, um caminho diferenciável $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é simplesmente n funções deriváveis.

1.9. Integração de caminho. A gente pode integrar caminhos do mesmo jeito como acabamos de derivá-los. Por exemplo, os itens 1, 2, 3 (interpretando a desigualdade $(p_1, \dots, p_n) \leq (q_1, \dots, q_n)$ como $p_i \leq q_i$ para todo $i = 1, \dots, n$) e 8 da Proposição 1.7.9 são obviamente válidos para caminhos.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \ldots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c. Deste modo, um caminho diferenciável $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é simplesmente n funções deriváveis.

1.9. Integração de caminho. A gente pode integrar caminhos do mesmo jeito como acabamos de derivá-los. Por exemplo, os itens 1, 2, 3 (interpretando a desigualdade $(p_1, \ldots, p_n) \leq (q_1, \ldots, q_n)$ como $p_i \leq q_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$) e 8 da Proposição 1.7.9 são obviamente válidos para caminhos. Os itens 4 e, consequentemente, 5 também permanecem válidos para caminhos, mas o 4 exige uma demonstração.

Às vezes, vale a pena pensar no parâmetro t em $c(t)$ como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $c(t)$ indica no espaço a posição do ponto no momento t. Fazendo t variar, $c(t)$ descreve o movimento do ponto no espaço e, em particular, a trajetória do ponto. A derivada $\dot{c}(t_0)$ (quando existir) pode ser considerada como **vetor velocidade** no momento $t_0 \in [a, b]$. A segunda derivada $\ddot{c}(t_0)$ pode ser interpretada como **vetor aceleração**.

Pela Proposição 1.6 (6), um caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é nada mais do que n funções contínuas $c_1, \dots, c_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, as componentes de c. Deste modo, um caminho diferenciável $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é simplesmente n funções deriváveis.

1.9. Integração de caminho. A gente pode integrar caminhos do mesmo jeito como acabamos de derivá-los. Por exemplo, os itens 1, 2, 3 (interpretando a desigualdade $(p_1, \dots, p_n) \leq (q_1, \dots, q_n)$ como $p_i \leq q_i$ para todo $i = 1, \dots, n$) e 8 da Proposição 1.7.9 são obviamente válidos para caminhos. Os itens 4 e, consequentemente, 5 também permanecem válidos para caminhos, mas o 4 exige uma demonstração. "Lembraremos" tudo isto quando necessitarmos.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |:V\to\mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ \ |: V \to \mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v| \geq 0$ para todo $v \in V$ com $|v| = 0$ apenas no caso $v = 0$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ \ |: V \to \mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v| \geq 0$ para todo $v \in V$ com $|v| = 0$ apenas no caso $v = 0$.
- $|rv| = |r| \cdot |v|$ para todos $v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |:V\to\mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v|\geq 0$ para todo $v\in V$ com $|v|=0$ apenas no caso $v=0$.
- $|rv|=|r|\cdot|v|$ para todos $v\in V$ e $r\in\mathbb{R}$.
- $|v_1+v_2|\leq|v_1|+|v_2|$ para todos $v_1,v_2\in V$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |:V\to\mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v|\geq 0$ para todo $v\in V$ com $|v|=0$ apenas no caso $v=0$.
- $|rv|=|r|\cdot|v|$ para todos $v\in V$ e $r\in\mathbb{R}$.
- $|v_1+v_2|\leq|v_1|+|v_2|$ para todos $v_1,v_2\in V$.

Duas **normas** $|\ |$ **e** $|\ |'$ em V são **equivalentes** se existem constantes c,c' tais que $|v|'\leq c|v|$ e $|v|\leq c'|v|'$ para todo $v\in V$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |: V \to \mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v| \geq 0$ para todo $v \in V$ com $|v| = 0$ apenas no caso $v = 0$.
- $|rv| = |r| \cdot |v|$ para todos $v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.
- $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$ para todos $v_1, v_2 \in V$.

Duas **normas $|\ |$ e $|\ |'$** em V são **equivalentes** se existem constantes c, c' tais que $|v|' \leq c|v|$ e $|v| \leq c'|v|'$ para todo $v \in V$.

1.10.2. Lema. *Se V é um espaço $\mathbb{R}$-linear de dimensão finita, então todas as normas em V são equivalentes.*

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |: V \to \mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v| \geq 0$ para todo $v \in V$ com $|v| = 0$ apenas no caso $v = 0$.
- $|rv| = |r| \cdot |v|$ para todos $v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.
- $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$ para todos $v_1, v_2 \in V$.

Duas **normas $|\ |$ e $|\ |'$** em V são **equivalentes** se existem constantes c, c' tais que $|v|' \leq c|v|$ e $|v| \leq c'|v|'$ para todo $v \in V$.

1.10.2. Lema. *Se V é um espaço $\mathbb{R}$-linear de dimensão finita, então todas as normas em V são equivalentes.*

Demonstração. Basta considerar a norma "padrão" $|\ |$ e uma norma arbitrária $|\ |'$ em V.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |: V \to \mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v| \geq 0$ para todo $v \in V$ com $|v| = 0$ apenas no caso $v = 0$.
- $|rv| = |r| \cdot |v|$ para todos $v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.
- $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$ para todos $v_1, v_2 \in V$.

Duas **normas $|\ |$ e $|\ |'$** em V são **equivalentes** se existem constantes c, c' tais que $|v|' \leq c|v|$ e $|v| \leq c'|v|'$ para todo $v \in V$.

1.10.2. Lema. *Se V é um espaço $\mathbb{R}$-linear de dimensão finita, então todas as normas em V são equivalentes.*

Demonstração. Basta considerar a norma "padrão" $|\ |$ e uma norma arbitrária $|\ |'$ em V.
Note que $\big||p|' - |q|'\big| \leq |p - q|'$. Realmente, $|p|' = |p - q + q|' \leq |p - q|' + |q|'$ implica $|p|' - |q|' \leq |p - q|'$.

1.10. Topologia e normas em $\mathbb{R}^n$. Na Definição 1.1, introduzimos a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ usando de fato uma norma "padrão" em $\mathbb{R}^n$.

1.10.1. Definição. Seja V um espaço $\mathbb{R}$-linear. Uma aplicação $|\ |:V\to\mathbb{R}$ se chama **norma em V** se são válidos os seguintes axiomas.

- $|v|\geq 0$ para todo $v\in V$ com $|v|=0$ apenas no caso $v=0$.
- $|rv|=|r|\cdot|v|$ para todos $v\in V$ e $r\in\mathbb{R}$.
- $|v_1+v_2|\leq|v_1|+|v_2|$ para todos $v_1,v_2\in V$.

Duas **normas $|\ |$ e $|\ |'$** em V são **equivalentes** se existem constantes c,c' tais que $|v|'\leq c|v|$ e $|v|\leq c'|v|'$ para todo $v\in V$.

1.10.2. Lema. *Se V é um espaço $\mathbb{R}$-linear de dimensão finita, então todas as normas em V são equivalentes.*

Demonstração. Basta considerar a norma "padrão" $|\ |$ e uma norma arbitrária $|\ |'$ em V.

Note que $\big||p|'-|q|'\big|\leq|p-q|'$. Realmente, $|p|'=|p-q+q|'\leq|p-q|'+$ $+|q|'$ implica $|p|'-|q|'\leq|p-q|'$. Pela simetria, $|q|'-|p|'\leq|q-p|'=$ $=\big|(-1)(p-q)\big|'=|p-q|'$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' =$ $= 0$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$.

Primeiramente observamos que a função $|\ \ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim_{i\to\infty} |p_i - q|' = = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim\limits_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim\limits_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Sendo a imagem inversa do conjunto fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ em relação à função contínua $|\ |$, a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \big\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\big\}$ é compacta, pois é obviamente limitada.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim\limits_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \le \sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Sendo a imagem inversa do conjunto fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ em relação à função contínua $|\ |$, a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \big\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\big\}$ é compacta, pois é obviamente limitada. Pelo Lema 1.7.10, a função contínua $|\ |'$ assume em $\mathbb{S}^{n-1}$ seu mínimo $\frac{1}{c'} > 0$ e seu máximo $c > 0$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim\limits_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Sendo a imagem inversa do conjunto fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ em relação à função contínua $|\ |$, a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \big\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\big\}$ é compacta, pois é obviamente limitada. Pelo Lema 1.7.10, a função contínua $|\ |'$ assume em $\mathbb{S}^{n-1}$ seu mínimo $\frac{1}{c'} > 0$ e seu máximo $c > 0$. Para qualquer $0 \neq v \in V$, temos $\frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Primeiramente observamos que a função $|\ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = \Big|\sum_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \leq \sum_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Sendo a imagem inversa do conjunto fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ em relação à função contínua $|\ |$, a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \big\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\big\}$ é compacta, pois é obviamente limitada. Pelo Lema 1.7.10, a função contínua $|\ |'$ assume em $\mathbb{S}^{n-1}$ seu mínimo $\frac{1}{c'} > 0$ e seu máximo $c > 0$. Para qualquer $0 \neq v \in V$, temos $\frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Consequentemente, $\frac{1}{c'} \leq |\frac{v}{|v|}|' \leq c$, isto é, $\frac{1}{c'}|v| \leq |v|' \leq c|v|$ ■

Primeiramente observamos que a função $|\ \ |'$ é contínua em V. Com efeito, pela Proposição 1.6 (5), basta ver que $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = q$ implica $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i|' = |q|'$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} \big||p_i|' - |q|'\big| = 0$. Logo, é suficiente provar que $\lim\limits_{i\to\infty} |p_i - q|' = 0$. Escrevendo q e p_i em termos da base "padrão" $e_1, \dots, e_n \in V = \mathbb{R}^n$, obtemos $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ e $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j e_j$ com $p_{ij}, q_j \in \mathbb{R}$. Como foi observado na demonstração da Proposição 1.6 (6), temos $\lim\limits_{i\to\infty} p_{ij} = q_j$, ou seja, $\lim\limits_{i\to\infty} |p_{ij} - q_j| = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Agora concluímos que $|p_i - q|' = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_j) e_j\Big|' \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij} - q_j| \cdot |e_j|'$ tende a 0 quando $i \to \infty$.

Sendo a imagem inversa do conjunto fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ em relação à função contínua $|\ \ |$, a esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \big\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| = 1\big\}$ é compacta, pois é obviamente limitada. Pelo Lema 1.7.10, a função contínua $|\ \ |'$ assume em $\mathbb{S}^{n-1}$ seu mínimo $\frac{1}{c'} > 0$ e seu máximo $c > 0$. Para qualquer $0 \neq v \in V$, temos $\frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Consequentemente, $\frac{1}{c'} \leq |\frac{v}{|v|}|' \leq c$, isto é, $\frac{1}{c'}|v| \leq |v|' \leq c|v|$ ■

Concluímos do Lema 1.10.2 que a topologia padrão em $\mathbb{R}^n$ independe da escolha de norma em $\mathbb{R}^n$.