Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\operatorname{Centre} G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o *centro* do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \operatorname{Centre} G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C. Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?

4. Encontre dois funtores $F_1, F_2 : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ tais que $F_i G = G$ para todos $i = 1, 2$ e $G \in \mathbf{Grp}$.

5. Seja $S \in \mathbf{Set}$. Definamos $\mathrm{ev}_X : \mathbf{Set}(S, X) \times S \to X$ pela regra $(f, s) \mapsto f(s)$. Prove que $\mathrm{ev}_\bullet$ é uma transformação natural.

6. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtores. Mostre que uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é nada mais do que um funtor $t : \mathcal{C} \times \mathbf{2} \to \mathcal{C}'$ tal que $t(-, 0) = F$ e $t(-, 1) = G$, onde $\mathbf{2}$ é a categoria com 2 objetos $0, 1$ e uma única seta não-trivial $0 \to 1$.

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfimos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}'^{\mathrm{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}')$.

9. Denotemos por $\mathcal{D}$ a categoria com 3 objetos e apenas duas setas não-triviais $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor, $c \in \mathcal{C}$ e $\Delta c : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um *funtor constante* relacionado com c (isto significa que Δc manda todos os objetos para c e todos os morfismos para 1_c). Descreva de um modo simples todos as transformações naturais do tipo $\Delta c \to F$. (Será que já encontramos este animal?)

10. Uma categoria $\mathcal{C}$ é *pré-ordem* se, para todos $c, c' \in \mathcal{C}$, existe no máximo um morfismo $c \to c'$. Denotemos por **Preord** a subcategoria completa de **Cat** formada por todos as pré-ordens. Mostre que **Preord** é fechada relativamente a produtos.

11. Descreva os (co)produtos nas categorias Matr_k e **Preord**.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \to B$ setas em **CRng**. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.

13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\operatorname{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.

14. Sejam $G, G' \in \mathcal{C}$ grupos em $\mathcal{C}$. Defina um homomorfismo $G \to G'$.

15. Um *monoide* é um conjunto M munido de uma operação binária $\cdot$ associativa que possui unidade. Dizemos que um monoide M *age* sobre um conjunto S quando é dada uma operação binária $M \times S \xrightarrow{\circ} S$ tal que $1 \circ s = s$ e $m_1 \circ (m_2 \circ s) = (m_1 \cdot m_2) \circ s$ para todos $m_1, m_2 \in M$ e $s \in S$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina monoide em $\mathcal{C}$. Defina ação de monoide em $\mathcal{C}$ sobre um objeto de $\mathcal{C}$.

16. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina uma categoria em $\mathcal{C}$.