

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Prove a seguinte versão do lema de Yoneda.

Denotamos por $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ a categoria seguinte:

- Um objeto de $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ tem a forma (\mathcal{C}, F, c) , onde \mathcal{C} é uma categoria arbitrária (isto é, $\mathcal{C} = *$), $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ é um funtor e $c \in \mathcal{C}$.
- Um morfismo em $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ entre (\mathcal{C}, F, c) e (\mathcal{C}', F', c') tem a forma (G, t, f) , onde $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um funtor, $t : F \rightarrow F' \circ G$ é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ e $f : Gc \rightarrow c'$ é um morfismo em \mathcal{C}' .
- A composição entre $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$ e $(G', t', f') : (\mathcal{C}', F', c') \rightarrow (\mathcal{C}'', F'', c'')$ é definida pela regra $(G', t', f') \circ (G, t, f) := (G' \circ G, (t' \circ G) \circ t, f' \circ G' f)$.

O funtor $-_2-3 : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \rightarrow \mathbf{Set}$ é definido como $-_2-3(\mathcal{C}, F, c) := Fc$ para um objeto (\mathcal{C}, F, c) e $-_2-3(G, t, f) := (F'f) \circ t_c : Fc \rightarrow F'c'$ para um morfismo $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$.

O funtor $T := \mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Set})(-1(-3, -4), -2-4) : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \rightarrow \mathbf{Set}$, onde $-1 \in \mathbf{Cat}$, $-2 \in \mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Set})$, $-3, -4 \in -1$, é definido de maneira seguinte. Para um objeto (\mathcal{C}, F, c) , fazemos $T(\mathcal{C}, F, c) := \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})(\mathcal{C}(c, -), F)$. Para um morfismo $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$, fazemos $T(G, t, f) : (\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto (\mathcal{C}'(c', -) \xrightarrow{\alpha'} F')$, onde $\alpha'_{x'} : (c' \xrightarrow{g} x') \mapsto ((F'g) \circ (F'f) \circ t_c \circ \alpha_c)1_c$.

A transformação natural $y : \mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Set})(-1(-3, -4), -2-4) \rightarrow -_2-3$ de fato mencionada no lema de Yoneda se aplica para os funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \rightarrow \mathbf{Set}$.

3. Se ainda está vivo/viva, imagine que, talvez, a naturalidade do exercício anterior pode ser estendida para funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \dagger) \times * \rightarrow \dagger$, onde \dagger denota uma categoria arbitrária \mathcal{S} que possui produtos finitos (e objeto final), usando o conceito de categoria \mathcal{S} no lugar de \mathbf{Set} : para “ $c, c' \in \mathcal{C}$ ”, temos “ $\mathcal{C}(c, c') \in \mathcal{S}$ ” ... Assim, como resultado, obtemos somente uma forma: só \mathbf{Cat} faz sentido ...

4. Responda à pergunta da nota de rodapé 7 na página 17 das notas de aula.

5. Encontre uma demonstração envolvendo uso de membros para a primeira parte do Lema 2.24. Tente adotá-la para a segunda parte.