

## **Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas**

**Nível:** graduação — mestrado — doutorado

A teoria de categorias estuda objetos do ponto de vista da interação entre si, sem olhar dentro dos mesmos. Mais precisamente, ela trata de morfismos. No lugar da palavra “teoria”, seria melhor dizer “linguagem”, dada a falta de conteúdo suficiente para qualificá-la como uma teoria. O conceito principal das categorias pode ser expresso pelas palavras “functoriedade”, “naturalidade”, “invariância”, etc.

A fonte original desta teoria foram a topologia algébrica e a geometria algébrica. Uma das vantagens da teoria é reduzir o estudo de categorias complicadas (topológicas) ao de categorias simples (algébricas), isto é, explicitar propriedades topológicas por invariantes algébricos. A teoria de categorias é a língua principal das áreas mais ativas da matemática moderna, tendo proporcionado grandes avanços nessas áreas. Por exemplo, A. Grothendieck revolucionou em termos categóricos conceitos tão fundamentais quanto os de ponto e espaço. Não seria nenhum exagero dizer que os métodos categóricos são dominantes em áreas como a geometria algébrica, a topologia algébrica, a teoria de números, a lógica matemática, a teoria de medida e de probabilidade . . . Hoje em dia, essa visão constitui uma parte indispensável da cultura matemática. Durante o curso, pretendo dar exemplos de uso da abordagem categórica em várias áreas de matemática, inclusive na análise.

. . . Uma fala cotidiana matemática diz: se há um objeto matemático, antes de nada mais, ele possui cohomologias e essas são as primeiras sujeitas ao estudo. A história da álgebra homológica começou ainda no final do século XIX em trabalhos de H. Poincaré e D. Hilbert; depois, desenvolveu-se explosivamente em trabalhos de H. Cartan, S. Eilenberg e S. Mac Lane e ganhou sua forma moderna de categorias derivadas em trabalhos revolucionários de A. Grothendieck e de seu aluno J.-L. Verdier no período 1957–1967. Em 1983–1986, na Universidade Estadual de Moscou, estava em andamento o seminário “Círculo de amadores de álgebra homológica” de alunos de graduação. Por influência posterior dos participantes do seminário, tais como A. A. Beilinson, A. I. Bondal, S. I. Gelfand, A. L. Gorodentsev, M. M. Kapranov, M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, V. A. Voevodsky, etc. — agora muito famosos (alguns até ganharam medalhas Fields) — as categorias derivadas tornaram-se ferramentas ativas de muitos matemáticos jovens.

O curso terá 4 horas semanais que incluem 1 hora para exercícios. As notas e slides de aula serão disponibilizados para os alunos desde o início do semestre.

### **Ementa**

1. Categorias, funtores e transformações naturais
2. Lema de Yoneda, funtores representativos, funtores adjuntos, categorias aditivas e categorias abelianas
3. Cohomologias
4.  $\delta$ -funtores
5. Categorias derivadas e funtores dos tipos Ext e Tor

### **Bibliografia**

- S. Anan'in, *Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas*, notas de aula, 55 pp.
- S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xx+372 pp.
- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, 262 pp.

### **Crítérios de avaliação**

Listas de exercícios distribuídas entre os alunos com antecedência a ser resolvidas (mais ou menos) pela metade por escrito em casa até o fim de semestre.

## 1. Categorias, funtores e transformações naturais

**1.1. Definição.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  consiste de:

- a. Um conjunto de *objetos*  $\text{Ob}\mathcal{C}$  que pode ser denotado também pela mesma letra  $\mathcal{C}$ .
- b. Um conjunto de *morfismos* (ou *setas*)  $\text{Mor}\mathcal{C}$ . Cada seta tem *origem* e *fim* que são objetos. O símbolo  $\text{Mor}(c, c')$ , ou  $\mathcal{C}(c, c')$ , denota o conjunto de todas as setas com origem  $c \in \mathcal{C}$  e fim  $c' \in \mathcal{C}$ . Escrevemos  $c \xrightarrow{\alpha} c'$  ou  $\alpha : c \rightarrow c'$  no caso de  $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$ .
- c. A *composição* (parcial) de setas  $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$ , que leva  $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$ , para quaisquer  $c, c', c'' \in \mathcal{C}$ . (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo  $\beta\alpha$ .)
- d. As setas  $1_c$  para todo  $c \in \mathcal{C}$ .

e satisfaz os seguintes axiomas:

- C1.**  $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$  para todos  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$ ,  $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$  e  $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$ .
- C2.**  $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$  e  $\alpha \circ 1_c = \alpha$  para todo  $c \xrightarrow{\alpha} c'$ .

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo  $1_c$  fazem o papel de objetos.

### 1.2. Exemplos.

**1. Set**, a *categoria dos conjuntos* (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor<sup>1</sup>), e funções entre si.

**2.** A *categoria de relações* **Rel**, que tem os mesmos objetos de **Set**. Por definição,  $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$  significa  $R \subset A \times B$ , isto é,  $R$  é uma relação.<sup>2</sup> Para  $R \subset A \times B$  e  $S \subset B \times C$ , a *composição*  $S \circ R$  é definida pela regra  $S \circ R := \{(a, c) \mid \exists b \in B (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$ . Assim, **Rel** é **Set** com mais setas.

**3.** A categoria dos *espaços topológicos* **Esp**, com funções contínuas.

**4.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Obtemos a categoria  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  “anti-isomorfa” a  $\mathcal{C}$ , ou *dual* a  $\mathcal{C}$ , pela troca dos sentidos de setas (ou, melhor dizendo, pela troca da ordem da composição).

**5.** Seja  $A$  um conjunto parcialmente ordenado. Então  $A$  é uma categoria:  $a \rightarrow b \iff a \leq b$ . É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico  $X$ , podemos definir a categoria  $\text{Top}X := \mathcal{T}(X)^{\text{op}}$ , onde  $\mathcal{T}(X)$  é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de  $X$  ordenado naturalmente. Assim, para  $U, V \in \text{Top}X$ , a relação  $U \rightarrow V$  significa simplesmente  $U \supset V$ . Denotemos por **1** a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por **2** a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.

**6.** A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**. Uma variante mais geral: os *objetos* têm a forma  $(E, S)$ , onde  $E \in \mathbf{Esp}$  e  $S \subset E$  é um subespaço; os *morfismos*  $(E, S) \rightarrow (E', S')$  são as classes homotópicas de funções contínuas  $E \xrightarrow{a} E'$  que preservam os subespaços,  $aS \subset S'$ , considerando apenas as homotopias que não alteram a restrição da função para o subespaço.

**7.** Seja  $X$  um espaço topológico. Denotemos por  $\pi_1 X$  a *categoria fundamental* de  $X$ . Objetos de  $\pi_1 X$  são pontos de  $X$ . As setas são as classes homotópicas de caminhos entre pontos (com extremos fixos).

**8.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Denotemos por  $\mathcal{C}^2$  a categoria das setas de  $\mathcal{C}$ . Os *objetos* de  $\mathcal{C}^2$  são as setas  $c \xrightarrow{\alpha} c'$  em  $\mathcal{C}$ . Um *morfismo* entre  $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$  e  $c'_1 \xrightarrow{\alpha'} c'_2$  consiste em duas setas  $c_1 \xrightarrow{f_1} c'_1$  e  $c_2 \xrightarrow{f_2} c'_2$  tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{f_1} & c'_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ c_2 & \xrightarrow{f_2} & c'_2 \end{array}$$

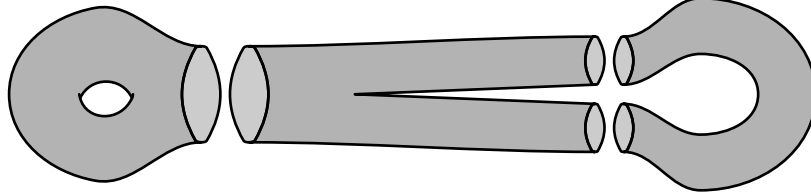
<sup>1</sup>Para escapar do paradoxo de Russell, tratamos somente das categorias do tipo mencionado.

<sup>2</sup>É melhor chamar qualquer categoria usando o nome das setas, pois as setas “sabem” tudo sobre a categoria.

**9.** As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), **Lin<sub>k</sub>** (de espaços lineares sobre um corpo  $k$ ), **CRng** (de anéis comutativos), **Mod<sub>R</sub>** (de módulos à direita sobre um anel associativo  $R$  com unidade), etc.

**10.** Seja  $A$  um anel. Consideremos a categoria  $\text{Matr } A$  das matrizes sobre  $A$ . Os objetos de  $\text{Matr } A$  são os números naturais,  $\text{Ob } \text{Matr } A = \mathbb{N}$ . Um morfismo  $M : m \rightarrow n$  é simplesmente uma  $m \times n$ -matriz com coeficientes em  $A$  (por convenção, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem uma única  $0 \times n$ -matriz e uma única  $n \times 0$ -matriz, ambas nulas).

**11.** Uma outra categoria  $\mathcal{C}$  com  $\text{Ob } \mathcal{C} = \mathbb{N}$  : *categoria das calças*. Os morfismos são as (classes de homeomorfismo de) superfícies cujas componentes do bordo são divididas nas duas partes: *início* e *fim*. No desenho abaixo, podemos encontrar 3 morfismos:  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$  e  $2 \rightarrow 0$ .



**1.3. Definição.** Um morfismo  $\alpha : c \rightarrow c'$  é dito *isomorfismo* se possui um *inverso*  $\beta : c' \rightarrow c$ , isto é,  $\beta \circ \alpha = 1_c$  e  $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$ . Neste caso, os objetos  $c$  e  $c'$  são chamados *isomorfos*. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita *grupoide*.

Um grupoide de um só objeto é simplesmente um grupo. De fato, todo grupoide conexo (isto é, entre quaisquer dois objetos existe um caminho de setas) é feito de um *grupo* de *automorfismos*  $\text{Aut } c$ , o grupo de todos os isomorfismos entre  $c$  e  $c$ , e de uma (não única) árvore de setas. A categoria  $\pi_1 X$  no Exemplo 1.2.7 é um grupoide. Caso  $X$  seja linearmente conexo, a categoria  $\pi_1 X$  é conexa. Para  $p \in X$ , o grupo  $\text{Aut } p$  é o *grupo fundamental*  $\pi_1(X, p)$ .

**1.4. Definição.** Um homomorfismo entre categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  é chamado *funtor (covariante)*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}'$  :

**F1.**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo  $F$ ).

**F2.** Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Então  $F$  define uma função  $F : \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}'(Fa, Fb)$  tal que  $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$  e  $F1_a = 1_{Fa}$ .

Por definição, um funtor *contravariante*  $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é um funtor (covariante) do tipo  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'$ . Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a *categoria de categorias*, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos ...

**1.5. Definição.** Os **melhores funtores** do mundo são os seguintes. Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $c \in \mathcal{C}$ . Então temos as funções

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c, c'),$$

para objetos e

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Set}(\mathcal{C}(c, c_1), \mathcal{C}(c, c_2)), \quad (c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto ((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta \circ \alpha)),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um funtor  $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  covariante. As regras

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c', c),$$

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Set}(\mathcal{C}(c_2, c), \mathcal{C}(c_1, c)), \quad (c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2) \mapsto ((c_2 \xrightarrow{\beta} c) \mapsto (\beta \circ \alpha))$$

definem um funtor contravariante  $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

**1.6. Definição.** Sejam  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  dois funtores. Uma coleção  $t_\bullet$  de morfismos  $Fa \xrightarrow{t_a} Ga$   $t_c : Fc \rightarrow Gc$ , com  $c$  percorrendo  $\mathcal{C}$ , é dita *transformação natural* de  $F$  para  $G$ , e denotada  $F \alpha \downarrow \quad G \alpha \downarrow$  por  $t_\bullet : F \rightarrow G$ , se, para todo morfismo  $a \xrightarrow{\alpha} b$  em  $\mathcal{C}$ , o diagrama à direita é comutativo.  $Fb \xrightarrow{t_b} Gb$

Intuitivamente, uma transformação natural  $t_\bullet : F \rightarrow G$  é uma maneira bem natural de obter o valor  $Gc$  a partir do valor  $Fc$ . Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural  $t_\bullet$  é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente  $t_c$  da transformação é um isomorfismo.

**1.7. Definição.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  categorias. Dizemos que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  são *equivalentes* se existem dois funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  e  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  tais que o funtor  $G \circ F$  é isomorfo ao funtor  $1_{\mathcal{C}}$  e o funtor  $F \circ G$  é isomorfo ao funtor  $1_{\mathcal{C}'}$ .

Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$  um subconjunto de objetos. Então  $\mathcal{E}$  munido de todas as setas de  $\mathcal{C}$  possíveis é uma categoria chamada de *subcategoria completa* de  $\mathcal{C}$ .

Vamos estabelecer um critério para verificar equivalência entre categorias.

**1.8. Critério.** Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor. Denotemos por  $FC$  a subcategoria completa de  $\mathcal{C}'$  relacionada com a imagem  $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$ . Então  $F : \mathcal{C} \rightarrow FC$  define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ , a função  $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$  é uma bijeção.

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.

Sejam  $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$  uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que  $\mathcal{E}$  é um *esqueleto* de  $\mathcal{C}$  se, para qualquer objeto  $c \in \mathcal{C}$ , existe um único  $e \in \mathcal{E}$  isomorfo a  $c$ . Afiramos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
- Sejam  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  categorias do tipo esqueleto. Então  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  são equivalentes se e só se  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  são isomorfas.
- Sejam  $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}'$  categorias e seus esqueletos. Então  $\mathcal{C}$  é equivalente a  $\mathcal{C}'$  se e só se  $\mathcal{E}$  é isomorfo a  $\mathcal{E}'$ .

O Critério 1.8 é uma consequência imediata desta última afirmação.

Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor que faz  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  equivalentes. É fácil ver agora que, para  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ ,  $Fc_1$  e  $Fc_2$  são isomorfos em  $\mathcal{C}'$  se e só se  $c_1$  e  $c_2$  são isomorfos em  $\mathcal{C}$ .

### 1.9. Exemplos.

**1.** Seja  $k$  um corpo. Então a categoria  $\mathbf{Matr} k$  (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria  $\mathbf{lin}_k$  de *espaços lineares sobre  $k$  de dimensão finita*.

**2.** Seja  $V \in \mathbf{lin}_k$ , onde  $k$  é um corpo. Denotemos por  $DV$  o *espaço dual* para  $V$ ,  $DV := \mathbf{lin}_k(V, k)$ . Claramente  $D : \mathbf{lin}_k \rightarrow \mathbf{lin}_k$  é um funtor contravariante. A transformação natural  $\alpha_\bullet : 1_{\mathbf{lin}_k} \rightarrow DD$  é dada pela regra  $\alpha_V : V \rightarrow DDV$ ,  $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$ . No caso de  $\mathbf{lin}_k$ , esta transformação natural identifica  $V$  com  $DDV$ . A naturalidade diz a que a identificação “não depende da escolha de base”.

**3.** Existem dois funtores  $c, f : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ , o *começo* e o *fim* da seta em  $\mathbf{2}$ . A própria seta define uma *transformação natural*  $c \rightarrow f$ . Para uma categoria arbitrária  $\mathcal{C}$ , a categoria dos funtores  $\mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$  é isomorfa a  $\mathcal{C}$  e a categoria dos funtores  $\mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \mathcal{C})$  é isomorfa à categoria das setas  $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ . Usando os funtores  $c$  e  $f$ , obtemos os funtores  $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \rightarrow \mathcal{C}$ . A seta de  $\mathbf{2}$  induz uma transformação natural  $c^* \rightarrow f^*$ .

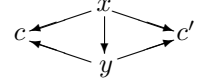
4. Seja  $A \in \mathbf{CRng}$ . Denotemos por  $GL_n A$  o grupo de todas as  $n \times n$ -matrizes inversíveis sobre  $A$ . É fácil ver que  $GL_n : \mathbf{CRng} \rightarrow \mathbf{Grp}$  é um funtor e que  $\det : GL_n \rightarrow GL_1$  é uma transformação natural.

**1.10. Definição.** Um objeto  $f \in \mathcal{C}$  é dito *final* (*universal*) se, para todo objeto  $c \in \mathcal{C}$ , existe um único morfismo  $c \rightarrow f$ . O conceito dual tem nome *inicial* (também *universal*). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

**1.11. Exemplos.**

1. Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e sejam  $c, c' \in \mathcal{C}$  dois objetos. Definamos uma nova categoria,  $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ . Os objetos de  $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$  são diagramas do tipo  $c \leftarrow x \rightarrow c'$ , com  $x \in \mathcal{C}$ . Um morfismo de  $c \leftarrow x \rightarrow c'$  para  $c \leftarrow y \rightarrow c'$  em  $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$  é uma seta  $x \rightarrow y$  tal que o diagrama à direita seja comutativo.

Um objeto final de  $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$  é dito *produto* de  $c$  e  $c'$  em  $\mathcal{C}$  (assim, para dizer que  $x \in \mathcal{C}$  é produto de  $c$  e  $c'$ , temos que indicar as setas  $c \leftarrow x \rightarrow c'$ ) e é denotado por  $c \times c'$ . O conceito dual é denominado *coproduto*, e é denotado por  $c \sqcup c'$ .



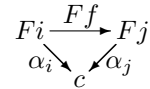
Este último em  $\mathbf{Esp}$ , ou em  $\mathbf{Set}$ , é a união disjunta.

2. Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $c \in \mathcal{C}$  um objeto. Um objeto da categoria  $\mathcal{C} \rightarrow c$  de objetos sobre  $c$  é qualquer seta  $x \rightarrow c$ , onde  $x \in \mathcal{C}$ . Sejam  $x \rightarrow c$  e  $y \rightarrow c$  dois objetos de  $\mathcal{C} \rightarrow c$ . Um morfismo entre si é uma seta  $x \rightarrow y$  tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de  $a \rightarrow c$  e  $b \rightarrow c$  nesta categoria é dito *produto sobre  $c$*  ou *produto fibrado* ou *pullback* de  $a$  e  $b$ , e é denotado por  $a \times_c b$ . Por exemplo, em  $\mathbf{Esp}$ , o produto fibrado de  $X \xrightarrow{\alpha} B$  e  $Y \xrightarrow{\beta} B$  existe e tem a forma  $X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\}$ , com a topologia induzida pela topologia de  $X \times Y$ . O conceito dual é dito *pushout*.

3. Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  duas categorias. A categoria  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  tem  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  como conjunto de objetos. Para  $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ , um morfismo entre si é simplesmente um par  $(\alpha, \alpha')$  de morfismos  $a \xrightarrow{\alpha} b$  e  $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ . A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo  $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  é um *bifuntor*. Por exemplo, é fácil ver que, de fato, os melhores funtores do mundo são bifuntores do tipo  $\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Podemos também dizer que o funtor  $\mathcal{C}(-, -)$  é um bifuntor contravariante no primeiro argumento e covariante no segundo. Por exemplo, o Critério 1.8 trata do isomorfismo natural entre dois bifuntores  $\mathcal{C}(-, -) \simeq \mathcal{C}'(F-, F-)$ .

4. Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e sejam  $\alpha_1, \alpha_2 : c \rightarrow c'$  setas em  $\mathcal{C}$ . Construimos a categoria  $x \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow[\alpha_2]{\alpha_1} c'$  cujos objetos são setas  $\beta : x \rightarrow c$  tais que  $\alpha_1 \beta = \alpha_2 \beta$ . Um morfismo de  $x \rightarrow c$  para  $y \rightarrow c$  é uma seta  $x \rightarrow y$  em  $\mathcal{C}$  tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se *equalizador* de  $\alpha_1, \alpha_2$ . O conceito dual é dito *coequalizador*. Na categoria  $\mathbf{Ab}$ , o equalizador de  $\alpha_1, \alpha_2$  é nada mais do que o núcleo  $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$ .

5. Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria, seja  $\mathcal{I}$  uma categoria (de índices) e seja  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor (isto é, um diagrama do tipo  $\mathcal{I}$  em  $\mathcal{C}$ ). Definamos a categoria  $F \rightarrow \mathcal{C}$ . Um objeto de  $F \rightarrow \mathcal{C}$  é um objeto  $c \in \mathcal{C}$  munido de uma coleção  $(\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$  de setas em  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha_i : F_i \rightarrow c$ , tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer  $i \xrightarrow{f} j$  em  $\mathcal{I}$ . Sejam  $((\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}, c)$  e  $((\alpha'_i)_{i \in \mathcal{I}}, c')$



dois objetos de  $F \rightarrow \mathcal{C}$ . Um morfismo entre si é um morfismo  $c \rightarrow c'$  compatível com os  $\alpha$ 's, isto é, tal que o diagrama à esquerda é comutativo para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Um objeto inicial de  $F \rightarrow \mathcal{C}$  é dito *limite indutivo* de  $F$  ou *limite direto* de  $F$  ou *colimite* de  $F$ , e é denotado por  $\lim_{i \in \mathcal{I}} F_i$ .

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso  $\mathcal{I}$  seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso  $\mathcal{I}$  seja a categoria  $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$ , o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso  $\mathcal{I}$  seja a categoria  $\cdot \rightrightarrows \cdot$ , o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

O conceito dual<sup>3</sup> tem nomes *limite* ou *limite inverso* ou *limite projetivo*, e é denotado por  $\lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi$ .

Dois exemplos ilustrativos:

Considerando uma função monótona  $f : A \rightarrow B$  entre os conjuntos parcialmente ordenados  $A$  e  $B$  como um funtor entre as correspondentes categorias, temos  $\lim_{\leftarrow a \in A} f(a) = \inf_{a \in A} f(a)$  e  $\lim_{\rightarrow a \in A} f(a) = \sup_{a \in A} f(a)$ .

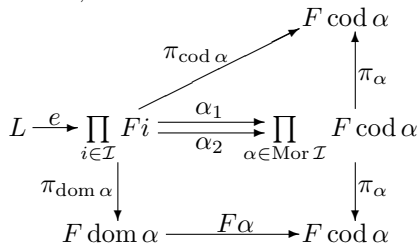
Denotando por  $\omega$  o conjunto de todos os números naturais  $\mathbb{N}$  munido da sua ordem usual, consideramos o funtor  $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{CRng}$  dado por  $i \mapsto \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  e  $(i \rightarrow j) \mapsto (\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})$  com o óbvio homomorfismo, onde  $p$  é um número primo. Então  $\mathbb{Z}_p := \lim_{\leftarrow i \in \omega^{\text{op}}} Fi$  é o anel de números  $p$ -ádicos.

Podemos exibir o anel  $\mathbb{Z}_p$  como o subanel em  $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  formado pelas seqüências  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tais que  $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Usando (co)limites, podemos introduzir também (co)produtos infinitos. Estes correspondem a uma categoria *discreta* de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

**6.** Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, geram funtores. Por exemplo, suponhamos que numa categoria  $\mathcal{C}$  sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas  $a \xrightarrow{\alpha} b$  e  $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$  induzem a seta  $a \times a' \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} b \times b'$ . Em outras palavras, obtemos um bifuntor  $-\times -$ , o *produto*. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os “valores” de  $a \times a'$ . Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos. É fácil verificar que o produto é associativo. Mais exatamente, os funtores  $(-\times -) \times -$  e  $-\times (-\times -)$  são isomorfos. No mesmo sentido, o produto é comutativo.

Em seguida, para qualquer morfismo  $\alpha$ , denotamos por  $\text{dom } \alpha$  e  $\text{cod } \alpha$  o *domínio* e *codomínio* de  $\alpha$ . Assim,  $\text{dom } \alpha \xrightarrow{\alpha} \text{cod } \alpha$ .



O anel de números  $p$ -ádicos  $\mathbb{Z}_p$  dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

**1.12. Lema.** *Seja  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor. Suponhamos que existem os produtos  $\prod_{i \in \mathcal{I}} Fi$  e  $\prod_{\alpha \in \text{Mor } \mathcal{I}} F \text{ cod } \alpha$  em  $\mathcal{C}$ . Então o limite  $\lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi$  é nada mais do que o equalizador de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  no diagrama à esquerda ■*

**1.13. Definição.** Dizemos que uma categoria  $\mathcal{C}$  possui todos os *limites finitos* se, para qualquer funtor  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  com a *categoria finita* de índices  $\mathcal{I}$  (isto significa que  $\mathcal{I}$  tem um número finito de objetos e setas), existe o limite  $\lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi$ . (A definição dual trata de categorias que possuem todos os colimites finitos.) Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita (co)*completa* se existem todos os (co)limites em  $\mathcal{C}$ .

**1.14. Corolário.** *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos ■*

**1.15. Exemplos.**

**1.** Sejam  $A \in \mathbf{CRng}$  e  $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$ . Consideremos a categoria cujos objetos são funções  $A$ -bilineares  $b : M_1 \times M_2 \rightarrow X$ , onde  $X \in \mathbf{Mod}_A$  está variando; um morfismo de  $b : M_1 \times M_2 \rightarrow X$  para  $b' : M_1 \times M_2 \rightarrow X'$  é um homomorfismo  $h : X \rightarrow X'$  de  $A$ -módulos tal que  $hb = b'$ . Um objeto inicial

<sup>3</sup>Para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em  $\mathcal{C}$ , mas não em  $\mathcal{I}$ . Às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices.

nessa categoria é dito *produto tensorial* e é denotado por  $M_1 \otimes_A M_2$ . Assim, temos uma função  $A$ -bilinear  $b : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_A M_2$  que denotamos por  $m_1 \otimes m_2 := b(m_1, m_2)$ , chamando  $m_1 \otimes m_2$  *tensor simples*. Em outras palavras, o  $A$ -módulo  $M_1 \otimes_A M_2$  (junto com a função  $\otimes : (m_1, m_2) \mapsto m_1 \otimes m_2$ ) é um lugar universal para valores das funções  $A$ -bilineares de  $M_1 \times M_2$ : qualquer outra função  $A$ -bilinear de  $M_1 \times M_2$  para algum  $A$ -módulo é a composta de  $\otimes$  com um (único) homomorfismo de  $A$ -módulos.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifunctor. Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor. Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$ ,  $a \otimes m \mapsto am$ .
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$ ,  $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$ .
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$ ,  $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$ .
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$ ,  $i : \varphi \mapsto (m_1 \mapsto (m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)))$

com a inversa dada por  $j : \psi \mapsto (m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2))$ .

- $\mathbf{Mod}_A(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)) \simeq \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$ .

Como um exemplo, demonstramos a penúltima afirmação. Sendo a expressão  $\varphi(m_1 \otimes m_2)$  trilinear em  $m_1, m_2, \varphi$ , a função  $i$  é bem definida e é um homomorfismo de  $A$ -módulos. A expressão  $\psi(m_1)(m_2)$  é trilinear em  $m_1, m_2, \psi$ , onde  $\psi \in \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$ . Pela propriedade universal do produto tensorial, a regra  $m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$  determina univocamente um homomorfismo de  $A$ -módulos  $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \rightarrow M_3$ . Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por  $\psi \mapsto \varphi$  é um homomorfismo de  $A$ -módulos. Com efeito, sejam  $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$  e  $a \in A$ . Então  $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$  e  $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$  implicam  $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$  e  $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a(\psi(m_1)(m_2)) = (a\psi)(m_1)(m_2)$ . Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto (m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)), \quad i \circ j : \psi \mapsto (m_1 \mapsto (m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2))),$$

como desejado.

**2.** Sejam  $A \in \mathbf{CRng}$ ,  $M \in \mathbf{Mod}_A$  e  $d \in \mathbb{N}$ . Consideremos a categoria cujos objetos são funções  $A$ -multilineares simétricas com  $d$  argumentos em  $M$ ,  $p : M^d \rightarrow X$ , onde  $X \in \mathbf{Mod}_A$  está variando. Ser  $p$  *simétrico* significa que  $p(m_1, \dots, m_d) = p(m_{\sigma_1}, \dots, m_{\sigma_d})$  para quaisquer  $m_1, \dots, m_d \in M$  e qualquer permutação  $\sigma : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ . Um morfismo de  $p : M^d \rightarrow X$  para  $p' : M^d \rightarrow X'$  é um homomorfismo  $h : X \rightarrow X'$  de  $A$ -módulos tal que  $hp = p'$ . Um objeto inicial nessa categoria é dito *d-ésima potência simétrica* de  $M$  e é denotado por  $\text{Sym}_A^d M$ . É imediato que  $\text{Sym}_A^d M$  é um funtor em  $M$ . O produto (comutativo)  $m_1 \dots m_d$  é, por definição, a imagem de  $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$  pela função  $p : M^d \rightarrow \text{Sym}_A^d M$ . Caso  $M$  seja um  $A$ -módulo finitamente gerado,  $M = g_1 A + \dots + g_n A$ , o  $A$ -módulo  $\text{Sym}_A^d M$  é gerado por todos os “monômios comutativos” de grau  $d$  em  $g_1, \dots, g_n$ . Se  $g_1, \dots, g_n$  são geradores livres de  $M$ , o  $A$ -módulo  $\text{Sym}_A^d M$  é formado por todos os polinômios homogêneos de grau  $d$  em  $g_1, \dots, g_n$  com coeficientes em  $A$ . Assim, a soma direta  $\text{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}_A^d M$ , chamada *álgebra simétrica* de  $M \in \mathbf{Mod}_A$ , é nada mais do que a álgebra de polinômios  $A[g_1, \dots, g_n]$  caso  $M$  seja livre de posto  $n$ .

**3.** Sejam  $A \in \mathbf{CRng}$ ,  $M \in \mathbf{Mod}_A$  e  $d \in \mathbb{N}$ . Consideremos a categoria cujos objetos são funções  $A$ -multilineares anti-simétricas com  $d$  argumentos em  $M$ ,  $p : M^d \rightarrow X$ , onde  $X \in \mathbf{Mod}_A$  está variando. Ser  $p$  *anti-simétrico* significa que  $p(m_1, \dots, m_d) = 0$  para quaisquer  $m_1, \dots, m_d \in M$  dos quais pelo menos dois são iguais. Um morfismo de  $p : M^d \rightarrow X$  para  $p' : M^d \rightarrow X'$  é um homomorfismo  $h : X \rightarrow X'$  de  $A$ -módulos tal que  $hp = p'$ . Um objeto inicial nessa categoria é dito *d-ésima potência exterior* de  $M$  e é denotado por  $\bigwedge_A^d M$ . É imediato que  $\bigwedge_A^d M$  é um funtor em  $M$ . O produto  $m_1 \wedge \dots \wedge m_d$  é, por definição,



a imagem de  $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$  pela função  $p : M^d \rightarrow \bigwedge_A^d M$ . Caso  $M$  seja um  $A$ -módulo finitamente gerado,  $M = g_1 A + \dots + g_n A$ , o  $A$ -módulo  $\bigwedge_A^d M$  é gerado por todos os “monômios anti-comutativos” de grau  $d$  em  $g_1, \dots, g_n$ . Em particular, caso  $n = d$ , o  $A$ -módulo  $\bigwedge_A^d M$  é gerado por  $g_1 \wedge \dots \wedge g_d$ . Caso  $g_1, \dots, g_d$  sejam geradores livres de  $M$ , o  $A$ -módulo  $\bigwedge_A^d M$  tem posto 1 com o gerador livre  $g_1 \wedge \dots \wedge g_d$ . (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo  $\bigwedge_A^d$  um funtor, qualquer endomorfismo  $h : M \rightarrow M$  de um  $A$ -módulo livre de posto  $d$  induz o endomorfismo  $\bigwedge^d h$  do  $A$ -módulo livre  $\bigwedge_A^d M$  de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado  $a \in A$ . Denotando  $\det h := a$ , obtemos  $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$ .

A soma direta  $\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geq 0} \bigwedge_A^d M$  é a álgebra de Grassmann de  $M \in \mathbf{Mod}_A$ .

4. Seja  $h : A \rightarrow B$  uma seta em  $\mathbf{CRng}$ . Então temos os funtores  $- \otimes_A B : \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_B$  e  $E : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Mod}_A$ . O segundo é o funtor de esquecimento que considera qualquer  $M \in \mathbf{Mod}_B$  como  $A$ -módulo com respeito ao homomorfismo  $h$ .

5. Sejam  $A \in \mathbf{CRng}$  e  $S \subset A$ . Consideremos a categoria cujos objetos são setas  $h : A \rightarrow X$  em  $\mathbf{CRng}$  tais que todos os elementos de  $hS$  são inversíveis em  $X$ ; um morfismo de  $h : A \rightarrow X$  para  $h' : A \rightarrow X'$  é uma seta  $\alpha : X \rightarrow X'$  em  $\mathbf{CRng}$  tal que  $\alpha h = h'$ . Um objeto inicial nessa categoria é dito *localização* de  $A$  em  $S$  e é denotado por  $i : A \rightarrow A[S^{-1}]$  ou por  $i : A \rightarrow S^{-1}A$ . Note que  $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$ , onde  $\hat{S}$  denota o fecho de  $S$  relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que  $SS \subset S \ni 1$ .

Para  $M \in \mathbf{Mod}_A$ , denotemos  $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ . Assim, obtemos o funtor de localização  $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$  e uma transformação natural  $i_\bullet : 1_{\mathbf{Mod}_A} \rightarrow E \circ S^{-1}$  dada por  $M \rightarrow M \otimes_A S^{-1}A, m \mapsto m \otimes 1$ . Abusando da notação, às vezes escreve-se  $a$  no lugar de  $ia$  e  $m$  no lugar de  $i_M m$ . Usando a propriedade universal da localização, é fácil provar que todo elemento de  $S^{-1}M$  tem a forma  $ms^{-1}$  para alguns  $m \in M$  e  $s \in S \subset A$ . Elementos  $ms^{-1}, m's'^{-1} \in S^{-1}M$  são iguais em  $S^{-1}M$  se e só se existe  $s'' \in S$  tal que  $(ms' - m's)s'' = 0$  em  $M$ .

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em  $\mathbf{Set}$ . Por exemplo, podemos definir o produto  $c \times c'$  do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto,  $x \rightarrow c \times c'$ , não é nada mais do que um par de morfismos  $x \rightarrow c$  e  $x \rightarrow c'$ . Assim, temos uma bijeção  $\mathcal{C}(x, c \times c') \rightarrow \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$ . Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores  $\mathcal{C}(*, c \times c')$  e  $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$  (dois argumentos  $*$ 's no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto  $f \in \mathcal{C}$  que produz um isomorfismo dos funtores  $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$ . Como saberemos na próxima seção, este  $f$ , através do isomorfismo natural, será munido de setas  $c \leftarrow f \rightarrow c'$  que tornam  $f$  o produto.

1.16. **Estruturas algébricas em uma categoria dada.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $G \in \mathcal{C}$ . Caso  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ , podemos definir uma estrutura de grupo em  $G$  do modo seguinte. Sejam dadas três setas  $\mu : G \times G \rightarrow G, i : G \rightarrow G$  e  $e : f \rightarrow G$  (multiplicação, inverso e unidade, respectivamente), onde  $f$  é um objeto final em  $\mathcal{C}$  (neste caso de  $\mathbf{Set}$ , qualquer conjunto de um elemento). A associatividade de  $\mu$  significa a comutatividade do diagrama acima, onde

$$\begin{array}{ccc} (G \times G) \times G & \xrightarrow{t} & G \times (G \times G) \\ \mu \times 1_G \downarrow & & \downarrow 1_G \times \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \xleftarrow{\mu} G \times G \end{array}$$

$(G \times G) \times G \xrightarrow{t} G \times (G \times G)$  é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde  $f \times G \rightarrow G \leftarrow G \times f$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{e} & G \times G & \xleftarrow{(i, 1_G)} & G \\ \downarrow (1_G, i) & & \downarrow \mu & & \downarrow (i, 1_G) \\ f & \xrightarrow{e} & G & \xleftarrow{e} & f \end{array}$$

são isomorfismos (por exemplo, observemos que  $G$ , munido das setas  $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$ , é o produto de  $f$  e  $G$ ). A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde  $(\alpha, \beta)$  denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \alpha \swarrow & \downarrow (\alpha, \beta) & \searrow \beta \\ a & & b \\ & a \times b & \end{array}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária  $\mathcal{C}$ , obtemos o conceito de *grupo* na categoria  $\mathcal{C}$ . Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos (grupos em categoria do tipo  $\mathcal{C} \rightarrow c$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria de espaços topológicos e  $c \in \mathcal{C}$ ; por exemplo, caso  $\mathcal{C} = \mathbf{Esp}$ , um grupo sobre  $B \in \mathbf{Esp}$  é uma função contínua  $G \rightarrow B$  tal que a imagem inversa de todo ponto tem estrutura de um grupo topológico e as operações são globalmente contínuas). O conceito dual tem nome *cogrupo*. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por  $\mathbf{Homot}_*$  a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto  $*$  distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto  $\vee$  é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera  $\mathbb{S}^n$  temos a comultiplicação  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$  que leva o “equador”  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$  passando por  $*$  para o ponto  $*$  de  $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ , uma counidade  $e : \mathbb{S}^n \rightarrow *$  que leva toda a esfera  $\mathbb{S}^n$  no ponto  $*$  e uma coinversa  $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  que “inverte” a esfera  $\mathbb{S}^n$  em relação ao ponto  $*$  por uma simetria. É fácil verificar que  $\mathbb{S}^n$  é um cogrupo.

**1.17. Observação.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $x'' \times_{x'} (x' \times_x t) \rightarrow x' \times_x t \rightarrow t$  seja dado um diagrama à esquerda em  $\mathcal{C}$ . Suponhamos que existam os produtos fibrados  $x' \times_x t$  e  $x'' \times_{x'} (x' \times_x t)$ . Então  $x'' \times_{x'} (x' \times_x t) = x'' \times_x t$  com respeito ao diagrama comutativo à direita ■

## 2. O lema de Yoneda, funtores representáveis, funtores adjuntos, categorias aditivas, categorias abelianas e outras bagatelas

**2.1. Funtores de Yoneda.** Qualquer morfismo  $c \xrightarrow{f} c'$  numa categoria arbitrária  $\mathcal{C}$  define uma transformação natural  $\mathcal{C}(f, -) : \mathcal{C}(c', -) \rightarrow \mathcal{C}(c, -)$ , onde, para  $x \in \mathcal{C}$ , a função  $\mathcal{C}(f, x) : \mathcal{C}(c', x) \rightarrow \mathcal{C}(c, x)$  é definida pela regra

$$\mathcal{C}(f, x) : (c' \xrightarrow{g} x) \mapsto (c \xrightarrow{g \circ f} x).$$

Portanto, obtemos um funtor contravariante  $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ , chamado *funtor de Yoneda*. O funtor de Yoneda representa a categoria  $\mathcal{C}$  na categoria dos funtores  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ . A dualidade produz o funtor covariante  $Y' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ , definido pelas seguintes regras:

$$Y' : \mathcal{C} \ni c \mapsto \mathcal{C}(-, c) \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set})$$

para objetos e

$$Y' : (c \xrightarrow{f} c') \mapsto (\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, c) \rightarrow \mathcal{C}(-, c'))$$

para morfismos, onde, para todo  $x \in \mathcal{C}$ , definimos

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, c) \rightarrow \mathcal{C}(x, c'), \quad \mathcal{C}(x, f) : (x \xrightarrow{g} c) \mapsto (x \xrightarrow{f \circ g} c').$$

O funtor  $Y'$  também é dito *funtor de Yoneda*.

**2.2. Composições de funtores com transformações naturais.** Seja  $t : F \rightarrow F'$  uma transformação natural entre funtores  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  e seja  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  um funtor. Então a regra  $(G \circ t)_c := G t_c$ , com  $c \in \mathcal{C}$ , define uma transformação natural  $G \circ t : G \circ F \rightarrow G \circ F'$ .

Seja  $s : G \rightarrow G'$  uma transformação natural entre funtores  $G, G' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  e seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor. Então a regra  $(s \circ F)_c := s_{F_c}$ , com  $c \in \mathcal{C}$ , define uma transformação natural  $s \circ F : G \circ F \rightarrow G' \circ F$ . Assim, nas circunstâncias descritas acima, temos as composições de funtor e transformação natural.

**2.3. Lema (de Yoneda).** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria, seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  um funtor e seja  $c \in \mathcal{C}$ . Então a função

$$y_{\mathcal{C}, F, c} : \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})(\mathcal{C}(c, -), F) \rightarrow Fc, \quad y_{\mathcal{C}, F, c} : (\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{t} F) \mapsto t_c 1_c \in Fc$$

é uma bijeção. A função  $y_{\mathcal{C}, -, -}$  é natural.

**Demonstração.** Sejam  $F \xrightarrow{t} F'$  uma transformação natural entre funtores  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  e  $f : c \rightarrow c'$  um morfismo da categoria  $\mathcal{C}$ . Pelo diagrama comutativo à direita, obtemos o morfismo  $\gamma := F'f \circ t_c = t_{c'} \circ Ff : Fc \rightarrow F'c'$  induzido por  $t$  e  $f$ . É fácil ver que este  $\gamma$  atende as propriedades functoriais, ou seja, obtemos um funtor  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ , que leva o par  $(F, c)$  para  $Fc$  e o morfismo  $(t, f) : (F, c) \rightarrow (F', c')$  para  $\gamma$ . Realmente, temos  $\gamma = F'f \circ t_c$  e  $\gamma' = F''f' \circ t'_{c'}$  para  $(t', f') : (F', c') \rightarrow (F'', c'')$ . Sendo  $t'$  uma transformação natural,  $\gamma' \circ \gamma = F''f' \circ t'_{c'} \circ F'f \circ t_c = F''f' \circ F''f \circ t'_{c'} \circ t_c = F''(f' \circ f) \circ (t' \circ t)_c$ . Para verificar que  $y_{\mathcal{C}, -, -}$  é uma transformação natural entre funtores deste tipo, basta verificar a comutatividade do diagrama acima à esquerda, onde  $\Gamma$ , induzido por  $t$  e  $f$ , é dado pela regra  $\Gamma : (\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto t \circ \alpha \circ \mathcal{C}(f, -)$ . Seja  $\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F$  uma transformação natural. Então o diagrama à direita é comutativo e  $\mathcal{C}(c, f) : 1_c \mapsto f$ . Portanto,  $Ff(\alpha_c 1_c) = \alpha_{c'} f$  e  $\gamma \circ y_{\mathcal{C}, F, c} : \alpha \mapsto (t_{c'} \circ Ff)(\alpha_c 1_c) = t_{c'}(Ff(\alpha_c 1_c)) = t_{c'}(\alpha_{c'} f)$ . Por outro lado,  $y_{\mathcal{C}, F', c'} \circ \Gamma : \alpha \mapsto (t \circ \alpha \circ \mathcal{C}(f, -))_{c'} 1_{c'} = (t_{c'} \circ \alpha_{c'} \circ \mathcal{C}(f, c')) 1_{c'} = t_{c'}(\alpha_{c'}(1_{c'} \circ f)) = t_{c'}(\alpha_{c'} f)$ .

Se  $\alpha_c 1_c$  é conhecido, então, pela comutatividade do diagrama acima, segue que, para qualquer morfismo  $f : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$ , é necessário definir  $\alpha_{c'} f = Ff(\alpha_c 1_c)$ . Em outras palavras, o valor de  $\alpha_c 1_c$  define univocamente toda função  $\alpha_{c'}$ , com  $c' \in \mathcal{C}$ , e, portanto, define univocamente a transformação  $\alpha$ . Assim,  $y_{\mathcal{C}, F, c}$  é injetivo. Seja  $s \in Fc$ . Precisamos criar uma transformação natural  $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \rightarrow F$  que, por  $y_{\mathcal{C}, F, c}$ , vai para  $s$ . Para qualquer  $f \in \mathcal{C}(c, c')$ , fazemos  $\alpha_{c'} f = Ff(s) \in Fc'$ . Como  $\alpha_c 1_c = s$ , é suficiente verificar que  $\alpha$  é uma transformação natural, isto é, que para qualquer  $g \in \mathcal{C}(c', c'')$  é válida a igualdade  $\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g) = Fg \circ \alpha_{c'}$ . Aplicando as partes da igualdade a um morfismo arbitrário  $f : c \rightarrow c'$ , temos  $(Fg \circ \alpha_{c'})(f) = Fg(Ff(s))$  e  $(\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g))(f) = \alpha_{c''}(g \circ f) = F(g \circ f)(s) = (Fg \circ Ff)(s) = Fg(Ff(s))$  ■

**2.4. Definição.** Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  isomorfo a um funtor do tipo  $\mathcal{C}(c, -)$ ,  $c \in \mathcal{C}$ , é dito *representável*. Um funtor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  isomorfo a um funtor do tipo  $\mathcal{C}(-, c)$  também é dito representável. Dizemos que  $c$  *representa*  $F$ . Pelo Lema 2.3 e pelo Critério 1.8, o funtor de Yoneda  $Y$  induz uma anti-equivalência entre a categoria  $\mathcal{C}$  e a categoria (completa) de todos os funtores representáveis (covariantes). O Lema 2.3 tem o seu dual (cuja prova pode ser lida num espelho), seguindo daí que o funtor de Yoneda  $Y'$  também induz a equivalência entre  $\mathcal{C}$  e a categoria dos funtores representáveis (contravariantes).

Assim, sendo conhecidas, todas as setas de  $c$  (outra variante: para  $c$ ) definem um objeto  $c \in \mathcal{C}$  univocamente a menos de isomorfismo. Portanto, podemos estudar objetos usando somente “interrelações” (= setas) entre si. Uma outra “consequência” do lema de Yoneda: caso um funtor não-representável faça muito bem o papel de objeto, poderíamos estender a categoria original adicionando um objeto novo, ou seja, supondo que o funtor é representável.

Funtores representáveis são relacionados com construções universais. Já vimos no Exemplo 1.15.6 que um objeto que representa o funtor  $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$  é simplesmente o produto  $c \times c'$ . Mais geralmente, podemos definir uma construção universal numa categoria arbitrária, usando a construção análoga à feita em  $\mathbf{Set}$  (os “melhores funtores do mundo” traduzem uma para outra) e requerendo que o funtor correspondente seja representável.

Por exemplo, o limite pode ser definido como o objeto que representa um funtor apropriado. Seja  $\mathcal{I}$  uma categoria (de índices) e seja  $\mathcal{C}$  uma categoria arbitrária. Definamos o *funtor diagonal*  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ . Para  $c \in \mathcal{C}$ , o funtor  $\Delta_c$  é constante:  $\Delta_c i = c$  e  $\Delta_c f = 1_c$  para todos  $i \in \mathcal{I}$  e  $f \in \text{Mor } \mathcal{I}$ . Para um morfismo  $c \xrightarrow{f} c'$  em  $\mathcal{C}$ , a transformação natural  $\Delta f_i : \Delta_c i \rightarrow \Delta_{c'} i$  é simplesmente  $f$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Seja  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor. O limite  $\lim_{i \in \mathcal{I}} F_i$  representa o

funtor contravariante  $c \mapsto \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_c, F)$ . Em outras palavras, temos um isomorfismo natural  $\mathcal{C}(-, \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} Fi) \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_-, F)$ . A seta  $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} Fi \rightarrow Fi$  para  $i \in \mathcal{I}$  é induzida pela transformação

natural  $\mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_-, F) \rightarrow \mathcal{C}(-, Fi)$  dada por  $(\Delta_c \xrightarrow{t} F) \mapsto (c = \Delta_c i \xrightarrow{t_i} Fi)$ .

Os “melhores funtores do mundo” também traduzem estruturas definidas em **Set** para outra categoria  $\mathcal{C}$ . Já sabemos como definir uma estrutura de grupo para um objeto  $G \in \mathcal{C}$  na categoria  $\mathcal{C}$ .

Podemos definir um grupo de outro modo: seja  $\mathcal{C}$  uma categoria com produtos finitos, isto é, existe o produto para qualquer coleção finita de objetos de  $\mathcal{C}$ . Um objeto  $G \in \mathcal{C}$  é um grupo em  $\mathcal{C}$  se e só se toda componente  $\mathcal{C}(c, G)$  do funtor  $\mathcal{C}(-, G)$  for um grupo (no sentido ordinário) em **Set** e, para todo morfismo  $h : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$ , a função  $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  for um homomorfismo de grupos. Em outras palavras, o funtor  $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  passa pela categoria de grupos, ou seja, podemos decompor  $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp} \xrightarrow{R} \mathbf{Set}$ , onde  $E$  é o funtor “esquecimento”, que “esquece” a estrutura de grupos em **Set**. Verifiquemos a equivalência das definições.

Seja  $G \in \mathcal{C}$  um grupo como na primeira definição. Então temos três setas  $\mu : G \times G \rightarrow G$ ,  $i : G \rightarrow G$  e  $e : f \rightarrow G$ , onde  $f$  é um objeto final em  $\mathcal{C}$ . Estas setas satisfazem as propriedades de associatividade, do inverso e da unidade, como nos diagramas acima. O morfismo  $\mu : G \times G \rightarrow G$  induz uma transformação natural

$$\bar{\mu}_\bullet : \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}(*, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(*, G)$$

que define a operação em  $\mathcal{C}(c, G)$  (de fato, pela composição com  $\mu$ ) para todo  $c \in \mathcal{C}$ . Sendo  $\bar{\mu}_\bullet$  uma transformação natural, a função  $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  é um homomorfismo para qualquer morfismo  $h : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$ . Apliquemos o funtor  $\mathcal{C}(c, -)$  ao diagrama de associatividade. Observemos que a transformação

$$\mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}(*, (G \times G) \times G) \simeq \mathcal{C}(*, G \times (G \times G)) \simeq \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G)$$

induzida por  $t$  é idêntica. Utilizando nossos isomorfismos naturais, é fácil verificar que o diagrama à direita é comutativo, isto é, a operação em  $\mathcal{C}(c, G)$  é associativa. O morfismo  $e : f \rightarrow G$  induz a função  $\mathcal{C}(c, e) :$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) & \xrightarrow{1_{\mathcal{C}(c, G)} \times \bar{\mu}_c} & \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \\ \bar{\mu}_c \times 1_{\mathcal{C}(c, G)} \downarrow & & \bar{\mu}_c \downarrow \\ \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & \mathcal{C}(c, G) \end{array}$$

$\mathcal{C}(c, f) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  que leva o único morfismo de  $\mathcal{C}(c, f)$  em  $u_c \in \mathcal{C}(c, G)$ . Aplicando o funtor  $\mathcal{C}(c, -)$  ao diagrama da unidade, é fácil observar que  $u_c$  é a unidade em  $\mathcal{C}(c, G)$ . Analogamente, verificamos que a função  $\mathcal{C}(c, i) : \mathcal{C}(c, G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  indica o inverso em  $\mathcal{C}(c, G)$ .

Reciprocamente, se o funtor  $\mathcal{C}(-, G)$  passa pela categoria **Grp**,

então, para todo morfismo  $h : c \rightarrow c'$  em  $\mathcal{C}$ , a função  $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  é um homomorfismo de grupos. Em outras palavras, o diagrama à direita é comutativo, onde  $\mu_c$  denota a função  $\mu_c : \mathcal{C}(c, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  induzida pela operação em  $\mathcal{C}(c, G)$ . Assim

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, G \times G) & \xrightarrow{\mu_c} & \mathcal{C}(c, G) \\ \uparrow \mathcal{C}(h, G \times G) \quad \mathcal{C}(h, G) \uparrow & & \\ \mathcal{C}(c', G \times G) & \xrightarrow{\mu_{c'}} & \mathcal{C}(c', G) \end{array}$$

obtemos uma transformação natural  $\mu_\bullet : \mathcal{C}(-, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$  que, pelo lema de Yoneda, é induzida por uma seta  $\mu : G \times G \rightarrow G$ . Já sabemos que a associatividade da operação  $\mu_c$  se expressa na forma da comutatividade do diagrama obtido pela aplicação do funtor  $\mathcal{C}(c, -)$  ao diagrama de associatividade na primeira definição de grupo. Sendo a comutatividade válida para qualquer  $c \in \mathcal{C}$ , obtemos um análogo diagrama comutativo de transformações naturais. Pelo lema de Yoneda, daí segue que  $\mu$  é associativo.

Na categoria com produtos finitos  $\mathcal{C}$  existe um objeto final  $f \in \mathcal{C}$ , produto de zero objetos. Para todo  $c \in \mathcal{C}$ , consideremos a função  $e_c : \mathcal{C}(c, f) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$  que leva o único morfismo de  $\mathcal{C}(c, f)$  na unidade  $u_c$  do grupo  $\mathcal{C}(c, G)$ . Para todo morfismo  $h : c \rightarrow c'$ , o diagrama é comutativo, pois o homomorfismo  $\mathcal{C}(h, G)$  leva a unidade  $u_{c'}$  de  $\mathcal{C}(c', G)$  na unidade  $u_c$  de  $\mathcal{C}(c, G)$ . Assim

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, f) & \xrightarrow{e_c} & \mathcal{C}(c, G) \\ \uparrow \mathcal{C}(h, f) \quad \mathcal{C}(h, G) \uparrow & & \\ \mathcal{C}(c', f) & \xrightarrow{e_{c'}} & \mathcal{C}(c', G) \end{array}$$

obtemos uma transformação natural  $e_{\bullet} : \mathcal{C}(-, f) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$  que, pelo lema de Yoneda, é induzida por uma única seta  $e : f \rightarrow G$ . É fácil verificar que o diagrama da unidade é comutativo. De forma análoga, obtemos uma transformação natural  $i_{\bullet} : \mathcal{C}(-, G) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$ , definida em cada componente pela indicação do inverso. Ela é induzida por um único morfismo  $i : G \rightarrow G$  que satisfaz a comutatividade do diagrama do inverso.

Para o conceito dual, se  $G$  é um cogrupo na categoria  $\mathcal{C}$ , então  $G$  é um grupo na categoria  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Assim, o funtor  $\mathcal{C}^{\text{op}}(-, G) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$  induz um funtor  $\mathcal{C}(G, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , ou seja, para todo  $c \in \mathcal{C}$ , temos  $\mathcal{C}(G, c)$  um grupo em  $\mathbf{Set}$ . A esfera  $\mathbb{S}^n$  com a comultiplicação  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$  é um cogrupo na categoria  $\mathbf{Homot}_*$ . Portanto, se  $X \in \mathbf{Homot}_*$  é um espaço topológico com um ponto  $*$  distinguido,  $\pi_n(X, *) := \mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^n, X)$  é um grupo em  $\mathbf{Set}$ . Este grupo é dito *n-ésimo grupo homotópico* de  $X$ . Em particular, para  $n = 1$ , obtemos  $\pi_1(X, *) := \mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^1, X)$ , o grupo fundamental.

Seja  $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor. Suponhamos que, para todo  $c \in \mathcal{C}$ , o funtor contravariante  $\mathcal{C}(L-, c) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Set}$  seja representável. Então existe um  $Rc \in \mathcal{S}$  tal que  $\mathcal{C}(L-, c) \simeq \mathcal{S}(-, Rc)$ . Todo morfismo  $h : c \rightarrow c'$  induz uma transformação natural  $\mathcal{C}(L-, h) : \mathcal{C}(L-, c) \rightarrow \mathcal{C}(L-, c')$ , que é simplesmente a composição  $\mathcal{C}(-, h) \circ L$  de um funtor com uma transformação natural definida anteriormente. Portanto, obtemos uma transformação natural  $\mathcal{S}(-, Rc) \rightarrow \mathcal{S}(-, Rc')$ . Pelo lema de Yoneda, ela é induzida por um morfismo  $Rf : Rc \rightarrow Rc'$ . Em outras palavras, obtemos um funtor  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  e, finalmente, um isomorfismo natural  $\mathcal{C}(L-, -) \simeq \mathcal{S}(-, R-)$ .

**2.5. Definição.** Funtores  $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  são ditos *adjuntos* ( $L$  é adjunto a  $R$  à esquerda e  $R$  é adjunto a  $L$  à direita) se temos um isomorfismo natural  $\mathcal{C}(L-, -) \simeq \mathcal{S}(-, R-)$ . Da consideração acima, segue que o funtor adjunto à direita a um funtor  $L$  é único a menos de isomorfismo. Pela dualidade, o mesmo é válido para o funtor adjunto à esquerda.

## 2.6. Exemplos.

1. Consideremos uma categoria algébrica  $\mathcal{A}$  cujos objetos têm por base um conjunto (tais como módulos, grupos, álgebras, espaços lineares, etc.). Ao olhar tais objetos apenas como conjuntos, estamos aplicando um funtor  $R$  que “esquece” a estrutura embutida nos objetos. Este funtor tem um adjunto  $L$  que gera livremente por um conjunto de geradores o objeto da estrutura em questão (módulo livre, grupo livre, anel de polinômios, etc.).

Caso  $\mathcal{A} = \mathbf{Lin}_k$ , o funtor  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Lin}_k$  associa a  $B \in \mathbf{Set}$  o espaço  $k$ -linear  $kB$  com base  $B$ .

Caso  $\mathcal{A} = \mathbf{Grp}$ , obtemos grupo livre  $LB$  com geradores livres  $B \in \mathbf{Set}$ .

Caso  $\mathcal{A} = \mathbf{CAlg}_A$  com  $A \in \mathbf{CRng}$  (a categoria de  $A$ -álgebras comutativas), temos a álgebra de polinômios  $LB := A[B]$  com coeficientes em  $A$ , cujas variáveis são elementos de  $B$ .

2. Podemos “esquecer” apenas uma parte da estrutura.

Para o funtor de esquecimento  $R : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , o adjunto à esquerda é a abelianização de um grupo,  $LG := G/[G, G]$ .

Para o funtor  $R : {}_R \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , onde  $R \in \mathbf{Rng}$  é um anel associativo, o adjunto à esquerda tem a forma  $R \otimes_{\mathbb{Z}} -$ .

Para o funtor  $R : {}_R \mathbf{Mod}_{R'} \rightarrow {}_R \mathbf{Mod}$  (os objetos da categoria  ${}_R \mathbf{Mod}_{R'}$  são  $(R, R')$ -bimódulos, onde  $R, R' \in \mathbf{Rng}$ ), o adjunto à esquerda tem a forma  $- \otimes_{\mathbb{Z}} R'$ .

Para o funtor  $R : \mathbf{Alg}_A \rightarrow \mathbf{Mon}$ , onde  $\mathbf{Mon}$  denota a categoria de monoides e  $A \in \mathbf{CRng}$ , o adjunto à esquerda tem a forma  $LM := A[M]$ . A construção  $A[G]$ , chamada *A-álgebra do grupo  $G$* , se usa com frequência para  $G \in \mathbf{Grp}$ .

Para o funtor  $R : \mathbf{Alg}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_A$ ,  $A \in \mathbf{CRng}$ , o adjunto à esquerda é a  $A$ -álgebra tensorial  $LM := T_A M := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M^{\otimes i}$ , onde  $M^{\otimes i} := \underbrace{M \otimes_A \cdots \otimes_A M}_i$  e  $M^{\otimes 0} := A$ . A multiplicação em  $T_A M$  é

induzida pelo produto tensorial de elementos.

Denotemos por  $\mathbf{Dom}_m$  a categoria de domínios comutativos cujos morfismos são homomorfismos injetores e por  $R : \mathbf{Fld} \hookrightarrow \mathbf{Dom}_m$ , a subcategoria completa de corpos comutativos. O funtor adjunto a  $R$  à esquerda produz o corpo de frações de um domínio,  $LD := KD$ .

Denotemos por  $\mathbf{Met}$  a categoria de espaços métricos; os morfismos são funções que preservam a métrica. Seja  $R : \mathbf{CompMet} \hookrightarrow \mathbf{Met}$  a subcategoria completa de espaços métricos completos. Então o funtor adjunto a  $R$  à esquerda elabora o completamento de um espaço métrico,  $LM := \widehat{M}$ .

**3.** Sejam  $\mathcal{I}$  uma categoria (de índices),  $\mathcal{C}$  uma categoria completa e  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor. O isomorfismo de funtores  $\mathcal{C}(-, \lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi) \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_{-}, F)$  é natural em  $F$ . Isto significa que o funtor  $\lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}}$  é adjunto à direita ao funtor diagonal  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ .

**2.7. Lema.** *Seja  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  um funtor que possui o limite  $\lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi$  e sejam  $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  funtores adjuntos. Então  $R \lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi = \lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} RFi$ . Em palavras: qualquer funtor que possui adjunto à esquerda preserva limites.*

**Demonstração.** Denotemos  $l := \lim_{\leftarrow i \in \mathcal{I}} Fi$  e sejam  $\alpha_i : l \rightarrow Fi$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , as correspondentes setas em  $\mathcal{C}$ .

Consideremos um objeto  $((\beta_i)_{i \in \mathcal{I}}, s)$  da categoria  $\mathcal{S} \rightarrow RF$ , onde  $\beta_i : s \rightarrow RFi$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , são setas em  $\mathcal{S}$ . O isomorfismo natural  $\varphi : \mathcal{C}(L-, -) \rightarrow \mathcal{S}(-, R-)$  providencia as setas  $\gamma_i : Ls \rightarrow Fi$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , isto é,  $\gamma_i = \varphi^{-1}\beta_i$ . Para toda seta  $f : i \rightarrow j$  em  $\mathcal{I}$ , temos  $(RFf)\beta_i = \beta_j$ . Pela naturalidade de  $\varphi^{-1}$ , obtemos  $(Ff)\gamma_i = \gamma_j$ . Em outras palavras,  $((\gamma_i)_{i \in \mathcal{I}}, Ls)$  é um objeto da categoria  $\mathcal{C} \rightarrow F$ . Pela definição de limite, ganhamos uma única seta  $g : Ls \rightarrow l$  tal que  $\alpha_i g = \gamma_i$ . Aplicando  $\varphi$  a  $g$ , obtemos a seta  $h := \varphi g : s \rightarrow Rl$  que satisfaz  $(R\alpha_i)h = \beta_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  pela naturalidade de  $\varphi$ . A unicidade de tal  $h$  se obtém por aplicar novamente o isomorfismo natural  $\varphi$  ■

**2.8. Lema.** *Sejam  $L : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  funtores.*

*Se  $L$  e  $R$  são adjuntos através de um isomorfismo natural  $\varphi : \mathcal{C}(L-, -) \rightarrow \mathcal{S}(-, R-)$ , então temos as transformações naturais (chamadas *unidade* e *counidade*)*

$$(2.8.1) \quad \eta : 1_{\mathcal{S}} \rightarrow RL, \quad \varepsilon : LR \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

*definidas pelas regras  $\eta_s = \varphi_{s, Ls} 1_{Ls}$  e  $\varepsilon_c = \varphi_{Rc, c}^{-1} 1_{Rc}$  para  $c \in \mathcal{C}$  e  $s \in \mathcal{S}$ . As composições*

$$(2.8.2) \quad R \xrightarrow{\eta \circ R} RLR \xrightarrow{R \circ \varepsilon} R \quad L \xrightarrow{L \circ \eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon \circ L} L$$

*são iguais a  $1_R$  e  $1_L$ , respectivamente.*

*Reciprocamente, sejam dadas transformações naturais (2.8.1) tais que as composições (2.8.2) são iguais a  $1_R$  e  $1_L$ , respectivamente. Então  $\varphi_{s, c}$  definido pela regra  $\varphi_{s, c} f = (Rf)\eta_s$  para  $f : Ls \rightarrow c$  é um isomorfismo natural  $\varphi : \mathcal{C}(L-, -) \rightarrow \mathcal{S}(-, R-)$ .<sup>4</sup>*

**Demonstração.** Sejam  $f : c \rightarrow c'$  e  $g : s \rightarrow s'$  morfismos em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente. Pela comutativi-

$$\begin{array}{ccc} 1_{Ls} \in \mathcal{C}(Ls, Ls) \xrightarrow{\varphi_{s, Ls}} \mathcal{S}(s, RLs) \ni \eta_s & \varepsilon_c \in \mathcal{C}(LRc, c) \xrightarrow{\varphi_{Rc, c}} \mathcal{S}(Rc, Rc) \ni 1_{Rc} & \\ \mathcal{C}(Ls, Lg) \downarrow & \mathcal{C}(LRc, f) \downarrow & \mathcal{S}(s, RLg) \downarrow \mathcal{S}(Rc, Rf) \\ Lg \in \mathcal{C}(Ls, Ls') \xrightarrow{\varphi_{s, Ls'}} \mathcal{S}(s, RLs') \ni * & ** \in \mathcal{C}(LRc, c') \xrightarrow{\varphi_{Rc, c'}} \mathcal{S}(Rc, Rc') \ni Rf & \\ \mathcal{C}(Lg, Ls') \uparrow & \mathcal{C}(LRf, c') \uparrow & \mathcal{S}(g, RLs') \uparrow \mathcal{S}(Rf, Rc') \\ 1_{Ls'} \in \mathcal{C}(Ls', Ls') \xrightarrow{\varphi_{s', Ls'}} \mathcal{S}(s', RLs') \ni \eta_{s'} & \varepsilon_{c'} \in \mathcal{C}(LRc', c') \xrightarrow{\varphi_{Rc', c'}} \mathcal{S}(Rc', Rc') \ni 1_{Rc'} & \end{array}$$

dade do primeiro diagrama, o elemento marcado por  $*$  é igual a  $(RLg)\eta_s = \eta_{s'}g$ , implicando que  $\eta$  é natural. Pela comutatividade do segundo diagrama, as  $\varphi_{Rc, c'}$ -imagens dos elementos  $f\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_{c'}(LRf)$ , marcados por  $**$ , são iguais. Sendo  $\varphi_{Rc, c'}$  injetivo, concluímos que  $\varepsilon$  é natural.

<sup>4</sup> $\varphi_{s, c}$  pode ser também definido através da counidade: para  $g : s \rightarrow Rc$ , fazemos  $(\varphi_{s, c})^{-1}g = \varepsilon_c(Lg)$ .

Para morfismos  $f : Ls \rightarrow c$  e  $g : s \rightarrow Rc$  em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente, temos os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} 1_{Ls} \in \mathcal{C}(Ls, Ls) \xrightarrow{\varphi_{s, Ls}} \mathcal{S}(s, RLs) \ni \eta_s & & \varepsilon_c(Lg) \in \mathcal{C}(Ls, c) \xrightarrow{\varphi_{s, c}} \mathcal{S}(s, Rc) \ni g \\ \mathcal{C}(Ls, f) \downarrow & & \mathcal{C}(Lg, c) \uparrow \\ f \in \mathcal{C}(Ls, c) \xrightarrow{\varphi_{s, c}} \mathcal{S}(s, Rc) \ni (Rf)\eta_s & & \varepsilon_c \in \mathcal{C}(LRc, c) \xrightarrow{\varphi_{Rc, c}} \mathcal{S}(Rc, Rc) \ni 1_{Rc} \end{array}$$

isto é,

$$(2.8.3) \quad \varphi_{s, c}f = (Rf)\eta_s, \quad \varphi_{s, c}(\varepsilon_c(Lg)) = g.$$

Da primeira igualdade com  $s := Rc$  e  $f := \varepsilon_c$ , obtemos  $1_{Rc} = \varphi_{Rc, c}\varepsilon_c = (R\varepsilon_c)\eta_{Rc} = (R \circ \varepsilon)_c(\eta \circ R)_c$ , portanto,  $1_R = (R \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ R)$ . Aplicando a segunda igualdade de (2.8.3) a  $c := Ls$  e  $g := \eta_s$ , obtemos  $\varphi_{s, Ls}(\varepsilon_{Ls}(L\eta_s)) = \eta_s = \varphi_{s, Ls}1_{Ls}$ . Como  $\varphi_{s, Ls}$  é injetivo, então  $1_{Ls} = \varepsilon_{Ls}(L\eta_s) = (\varepsilon \circ L)_s(L \circ \eta)_s$  e, portanto,  $1_L = (\varepsilon \circ L) \circ (L \circ \eta)$ .

Reciprocamente, sejam dadas transformações naturais (2.8.1) tais que as composições (2.8.2) são iguais a  $1_R$  e  $1_L$ , respectivamente. Primeiramente verifiquemos que  $\varphi$  introduzida no Lema 2.8 é uma transformação natural. Sejam  $a : c \rightarrow c'$  e  $b : s' \rightarrow s$  morfismos em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente. Então o diagrama à direita é comutativo, pois, para  $f : Ls \rightarrow c$ , são válidas as igualdades

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Ls, c) \xrightarrow{\varphi_{s, c}} \mathcal{S}(s, Rc) & & \mathcal{C}(Lb, a) \downarrow \\ \mathcal{C}(Ls', c') \xrightarrow{\varphi_{s', c'}} \mathcal{S}(s', Rc') & & \mathcal{S}(b, Ra) \downarrow \end{array}$$

$$\mathcal{S}(b, Ra)(\varphi_{s, c}f) = \mathcal{S}(b, Ra)((Rf)\eta_s) = (Ra)(Rf)\eta_s b,$$

$$\varphi_{s', c'}(\mathcal{C}(Lb, a)f) = \varphi_{s', c'}(af(Lb)) = R(af(Lb))\eta_{s'} = (Ra)(Rf)(RLb)\eta_{s'}$$

e  $\eta$  é uma transformação natural:  $\eta_s b = (RLb)\eta_{s'}$ .

Para qualquer morfismo  $g : s \rightarrow Rc$  em  $\mathcal{S}$ , façamos  $\psi_{s, c}g := \varepsilon_c(Lg)$ . Agora

$$\begin{aligned} \psi_{s, c}(\varphi_{s, c}f) &= \psi_{s, c}((Rf)\eta_s) = \varepsilon_c(L((Rf)\eta_s)) = \varepsilon_c(LRf)(L\eta_s) = \\ &= f\varepsilon_{Ls}(L\eta_s) = f(\varepsilon \circ L)_s(L \circ \eta)_s = f1_{Ls} = f, \end{aligned}$$

pois  $\varepsilon$  é natural e a segunda composição em (2.8.2) é igual a  $1_L$ . De forma semelhante,

$$\begin{aligned} \varphi_{s, c}(\psi_{s, c}g) &= \varphi_{s, c}(\varepsilon_c(Lg)) = (R(\varepsilon_c(Lg)))\eta_s = (R\varepsilon_c)(RLg)\eta_s = \\ &= (R\varepsilon_c)\eta_{Rc}g = (R \circ \varepsilon)_c(\eta \circ R)_c g = 1_{Rc}g = g, \end{aligned}$$

pois  $\eta$  é natural e a primeira composição em (2.8.2) é igual a  $1_R$  ■

**2.9. Definição.** Um morfismo  $i$  é dito *monomorfismo* (ou *mono*) se  $ig_1 = ig_2$  implica  $g_1 = g_2$ . Um morfismo  $p$  é dito *epimorfismo* (ou *epi*) se  $f_1p = f_2p$  implica  $f_1 = f_2$ .

É claro que a composição de dois monomorfismos (epimorfismos) é um monomorfismo (epimorfismo). Se  $fg$  é mono (epi), então  $g$  é mono ( $f$  é epi). Em particular, se  $fg$  é um isomorfismo, então  $f$  é epi e  $g$  é mono.

**2.10. Definição.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  cujos  $\mathcal{C}(c, c')$  são munidos de estrutura de grupo abeliano de modo que a composição de morfismos seja biaditiva é dita **Ab**-categoria. É óbvio que a categoria dual  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  a uma **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  é uma **Ab**-categoria. Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um functor entre **Ab**-categorias. O functor  $F$  é dito *aditivo* se preserva a adição de morfismos, isto é, se  $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$  é um homomorfismo de grupos abelianos para todos  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ .

Do mesmo jeito que uma categoria de um objeto só é um monoide, uma **Ab**-categoria de apenas um objeto é simplesmente um anel (associativo, não-comutativo e com unidade). Portanto, podemos tratar de **Ab**-categorias como sendo “anéis” com vários objetos. Desta maneira, os funtores aditivos são simplesmente os “homomorfismos” de “anéis”.

Os funtores “melhores do mundo” relacionados com uma **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  são obviamente aditivos, e, portanto, podemos considerar os funtores  $\mathcal{C}(c, -)$  e  $\mathcal{C}(-, c)$  como funtores aditivos dos tipos  $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  e  $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .<sup>5</sup> (Além disso, o bifuntor  $\mathcal{C}(-, -)$  é biaditivo.)

Em qualquer **Ab**-categoria, um monomorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à esquerda e um epimorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à direita.

Seja  $0 \in \mathcal{C}$  um objeto numa **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{C}(0, 0) = 0$ . Então  $0$  é final e inicial. Realmente,  $h0 = h0 + h0$  implica  $h0 = 0$ . Pelas mesmas razões,  $0h = 0$ . Agora  $1_0 = 0$  e  $\mathcal{C}(c, 0) = \mathcal{C}(0, 0)\mathcal{C}(c, 0) = \{0\}$ , isto é,  $0$  é final. De forma análoga,  $0$  é inicial. Obviamente, o morfismo  $0 : c \rightarrow c'$  é simplesmente a composição  $c \rightarrow 0 \rightarrow c'$ .

Vamos supor que tal  $0 \in \mathcal{C}$ , chamado de *objeto nulo*, exista.

Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$  dois objetos. Suponhamos que existam o coproduto  $a \xrightarrow{j_1} a \sqcup b \xleftarrow{j_2} b$  e o produto

$a \xleftarrow{\pi_1} a \times b \xrightarrow{\pi_2} b$ . Então os diagramas laterais produzem os morfismos  $a \xleftarrow{p_1} a \sqcup b \xrightarrow{p_2} b$  satisfazendo as igualdades  $p_1 j_1 = 1_a$ ,  $p_1 j_2 = 0$ ,  $p_2 j_1 = 0$ ,  $p_2 j_2 = 1_b$ . Portanto, obtemos o diagrama comutativo central com  $\pi_1 i = p_1$  e  $\pi_2 i = p_2$ .

**2.11. Definição.** Se o  $i$  indicado é um isomorfismo, então dizemos que os objetos  $a, b \in \mathcal{C}$  possuem *biproduto*. Neste caso, podemos supor que  $i = 1$ . Daí temos  $p_1 = \pi_1$ ,  $p_2 = \pi_2$  e

$$(2.11.1) \quad \pi_1 j_1 = 1_a, \quad \pi_1 j_2 = 0, \quad \pi_2 j_1 = 0, \quad \pi_2 j_2 = 1_b, \quad j_1 \pi_1 + j_2 \pi_2 = 1_{a \times b}.$$

A última igualdade é válida pelas propriedades do produto  $a \times b$ , pois  $\pi_1(j_1 \pi_1 + j_2 \pi_2) = \pi_1 = \pi_1 1_{a \times b}$  e  $\pi_2(j_1 \pi_1 + j_2 \pi_2) = \pi_2 = \pi_2 1_{a \times b}$ . É fácil verificar que os morfismos  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $\pi_1$  e  $\pi_2$  satisfazendo as igualdades (2.11.1) definem o biproduto. Usando o delta de Kronecker, podemos reescrever as igualdades (2.11.1) como

$$(2.11.2) \quad \pi_\alpha j_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha j_\alpha \pi_\alpha = 1.$$

De forma semelhante, podemos definir o biproduto de qualquer coleção finita de objetos. Seja dada uma coleção finita de objetos  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Suponhamos que existam coproduto e produto destes objetos, e denotemos por  $j_\alpha$  e  $\pi_\alpha$  os respectivos morfismos de/para  $a_\alpha$ . Então as igualdades (2.11.2) (com um isomorfismo no lugar de 1) implicam o isomorfismo  $a_1 \sqcup \dots \sqcup a_n \simeq a_1 \times \dots \times a_n$ . Ainda mais, as igualdades (2.11.2) implicam que os morfismos  $j_\alpha$ 's e  $\pi_\alpha$ 's definem coproduto e produto. Vamos denotar o biproduto por  $\oplus$  e chamar os  $j$ 's e  $\pi$ 's de *injeções* e *projeções*, respectivamente. Assim, concluímos que qualquer functor aditivo entre **Ab**-categorias preserva biprodutos. É fácil verificar que o biproduto é, num certo sentido, associativo e comutativo.

**2.12. Observação.** Sejam  $a = a_1 \oplus \dots \oplus a_l$  e  $a' = a'_1 \oplus \dots \oplus a'_m$  biprodutos numa **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  munidos de projeções e injeções  $\pi_\alpha, \pi'_\beta, j_\alpha, j'_\beta$ , respectivamente. Então o grupo abeliano  $\mathcal{C}(a, a')$  é a soma direta dos grupos abelianos  $\mathcal{C}(a_\alpha, a'_\beta)$  e pode ser apresentado na forma de uma matriz

<sup>5</sup> Assim, se  $\mathcal{C}$  possui produtos finitos, todo objeto de  $\mathcal{C}$  é um grupo (e é cogrupo) abeliano em  $\mathcal{C}$ .



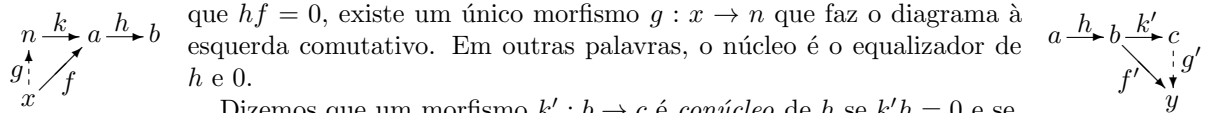
$$(2.12.1) \quad \mathcal{C}(a, a') = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(a_1, a'_1) & \dots & \mathcal{C}(a_l, a'_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}(a_1, a'_m) & \dots & \mathcal{C}(a_l, a'_m) \end{bmatrix}$$

onde o morfismo  $h \in \mathcal{C}(a, a')$  tem as componentes  $h_{\beta\alpha} = \pi'_\beta h j_\alpha$  na matriz  $M_h$ . Se  $a'' = a''_1 \oplus \dots \oplus a''_n$  é um terceiro biproduto, então podemos calcular a composição  $h'h$  de  $h \in \mathcal{C}(a, a')$  e  $h' \in \mathcal{C}(a', a'')$  usando a multiplicação “usual” das matrizes correspondentes:  $M_{h'h} = M_{h'} M_h$ <sup>6</sup> ■

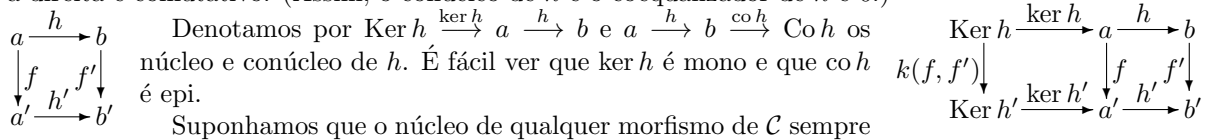
**2.13. Definição.** Uma **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  é dita *aditiva* se possui um objeto nulo e biprodutos.

**2.14. Definição.** Seja  $h : a \rightarrow b$  um morfismo numa **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$ .

Dizemos que um morfismo  $k : n \rightarrow a$  é *núcleo* de  $h$  se  $hk = 0$  e se, para todo morfismo  $f : x \rightarrow a$  tal



Dizemos que um morfismo  $k' : b \rightarrow c$  é *conúcleo* de  $h$  se  $k'h = 0$  e se, para todo morfismo  $f' : b \rightarrow y$  tal que  $f'h = 0$ , existe um único morfismo  $g' : c \rightarrow y$  que faz o diagrama à direita é comutativo. (Assim, o conúcleo de  $h$  é o coequalizador de  $h$  e  $0$ .)

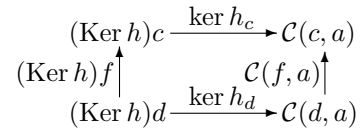


Suponhamos que o núcleo de qualquer morfismo de  $\mathcal{C}$  sempre exista. Neste caso, se o diagrama à esquerda é comutativo, então existe um único morfismo  $k(f, f')$  tal que o diagrama à direita é comutativo. Em outras palavras,  $\text{Ker}$  é um funtor  $\text{Ker} : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$  e  $\text{ker}$  é uma transformação natural  $\text{ker} : \text{Ker} \rightarrow \mathcal{C}^*$ , onde  $\mathcal{C}^* : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$  é o funtor “começo” de seta definido no Exemplo 1.9.3. O fato análogo é válido para o conúcleo.

Seja  $\mathcal{C}$  uma **Ab**-categoria e seja  $h : a \rightarrow b$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ .

Consideremos o funtor contravariante  $\text{Ker } h- : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  definindo

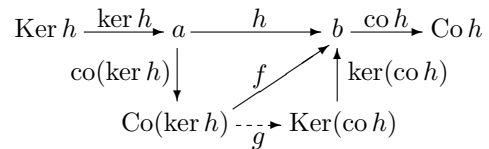
$(\text{Ker } h)c := \text{Ker } \mathcal{C}(c, h)$  para  $c \in \mathcal{C}$  e determinando  $(\text{Ker } h)f$  no diagrama comutativo à direita para  $f : c \rightarrow d$ . No diagrama, a transformação natural  $\text{ker } h_\bullet$  é de fato a inclusão  $(\text{Ker } h)c \hookrightarrow \mathcal{C}(c, a)$ . Seja  $n \in \mathcal{C}$  um núcleo de  $h$ . Então é fácil ver que o funtor  $\text{Ker } h-$  é representado em  $\mathcal{C}$  por  $n$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\text{Ker } h-$  é representável e seja  $n \in \mathcal{C}$  um objeto que o representa. Então  $\text{ker } h_\bullet$  induz uma transformação natural  $\mathcal{C}(-, n) \rightarrow \mathcal{C}(-, a)$  que, pelo lema de Yoneda, é induzida por um único morfismo  $k : n \rightarrow a$ ,  $k \in (\text{Ker } h)n$ . Usando o isomorfismo  $\text{Ker } h- \simeq \mathcal{C}(-, n)$ , podemos verificar que  $n$  é o núcleo de  $h$ . Assim, podemos definir, de maneira equivalente, o núcleo de  $h$  pela representatividade do funtor  $\text{Ker } h-$ .<sup>7</sup>



Seja  $n \in \mathcal{C}$  um núcleo de  $h$ . Então é fácil ver que o funtor  $\text{Ker } h-$  é representado em  $\mathcal{C}$  por  $n$ . Reciprocamente, suponhamos que  $\text{Ker } h-$  é representável e seja  $n \in \mathcal{C}$  um objeto que o representa. Então  $\text{ker } h_\bullet$  induz uma transformação natural  $\mathcal{C}(-, n) \rightarrow \mathcal{C}(-, a)$  que, pelo lema de Yoneda, é induzida por um único morfismo  $k : n \rightarrow a$ ,  $k \in (\text{Ker } h)n$ . Usando o isomorfismo  $\text{Ker } h- \simeq \mathcal{C}(-, n)$ , podemos verificar que  $n$  é o núcleo de  $h$ . Assim, podemos definir, de maneira equivalente, o núcleo de  $h$  pela representatividade do funtor  $\text{Ker } h-$ .<sup>7</sup>

Suponhamos que numa **Ab**-categoria  $\mathcal{C}$  os núcleos e conúcleos sempre existam. Seja  $h : a \rightarrow b$  um morfismo de  $\mathcal{C}$ .

Como  $h \text{ker } h = 0$ , então existe um (único) morfismo  $f : \text{Co}(\text{ker } h) \rightarrow b$  tal que  $f \text{co}(\text{ker } h) = h$ . Sendo  $(\text{co } h)h = 0$ , concluímos daí que  $(\text{co } h)f \text{co}(\text{ker } h) = 0$ . Sabemos que  $\text{co}(\text{ker } h)$  é epi, logo,  $(\text{co } h)f = 0$ . Agora podemos encontrar um (único) morfismo  $g : \text{Co}(\text{ker } h) \rightarrow \text{Ker}(\text{co } h)$  tal que  $(\text{ker}(\text{co } h))g = f$ . Finalmente, encontramos  $g$  tal que  $h = (\text{ker}(\text{co } h))g \text{co}(\text{ker } h)$ . Este



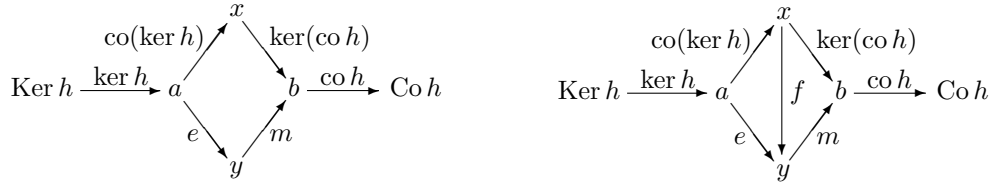
<sup>6</sup> Assim, é melhor pensar que as matrizes em (2.12.1) estão aplicadas à coluna  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix}$ .

<sup>7</sup> Pode afirmar e demonstrar algo dual para conúcleos?

$g$  é único, pois  $\ker(\text{co } f)$  é mono e  $\text{co}(\ker f)$  é epi. (O leitor pode descobrir toda essa argumentação só olhando para o diagrama, sem ler o texto. A mesma receita serve na maioria dos casos a seguir.)

**2.15. Definição.** Uma categoria aditiva  $\mathcal{C}$  é dita *abeliana* se todo morfismo  $h$  de  $\mathcal{C}$  possui núcleo e conúcleo e o morfismo  $g : \text{Co}(\ker h) \rightarrow \text{Ker}(\text{co } h)$  construído acima é um isomorfismo.

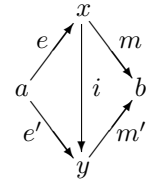
Grosso modo, podemos falar que uma categoria aditiva é abeliana se  $\text{Co}(\ker h) = \text{Ker}(\text{co } h)$  para todo morfismo  $h$ . Neste caso, todo morfismo  $h$  está decomposto em um epimorfismo e um monomorfismo,  $h = me$ .



Vamos mostrar que esta decomposição é única a menos de um isomorfismo. Consideremos o diagrama comutativo à esquerda com  $e$  epi,  $m$  mono e com  $h = (\ker(\text{co } h)) \text{co}(\ker h)$ . Sendo  $h \ker h = 0$ , concluímos que  $me \ker h = 0$ . Daí,  $e \ker h = 0$ , pois  $m$  é mono. Logo, existe um morfismo  $f : x \rightarrow y$  tal que  $e = f \text{co}(\ker h)$ . Agora  $(\ker(\text{co } h)) \text{co}(\ker h) = h = me = mf \text{co}(\ker h)$  com  $\text{co}(\ker h)$  epi. Portanto,  $\ker(\text{co } h) = mf$  e o diagrama à direita é comutativo. Isto implica que  $f$  é epi e mono. Resta aplicar o item 3 da

**2.16. Proposição.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana e seja  $h : a \rightarrow b$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ . Então são válidas as seguintes afirmações.

1.  $h$  é mono se e só se  $\text{Ker } h = 0$ .
2.  $h$  é epi se e só se  $\text{Co } h = 0$ .
3.  $h$  é um isomorfismo se e só se  $h$  é mono e epi.
4.  $h$  é epi se e só se  $h = \text{co}(\ker h)$ .
5.  $h$  é mono se e só se  $h = \ker(\text{co } h)$ .
6.  $h$  possui uma única decomposição  $h = me$  com  $e$  epi e  $m$  mono (a menos de um isomorfismo, isto é, se  $h = m'e'$  com  $e'$  epi e  $m'$  mono, então existe um isomorfismo  $i$  tal que  $e' = ie$  e  $m = im'$ ; vide o diagrama à direita).



7. Para quaisquer duas setas  $a \xrightarrow{h} c \xleftarrow{f} b$  existe o pullback (dado pela fórmula  $a \times_c b := \text{Ker}(h\pi_a - f\pi_b)$ ).

O pullback induz o isomorfismo  $i$  entre núcleos no diagrama comutativo à esquerda. Além disso, se  $h$  é epi, então  $h'$  é epi.

8. Para quaisquer duas setas  $a \xleftarrow{h} c \xrightarrow{f} b$  existe o pushout (dado pela fórmula  $a \sqcup_c b := \text{Co}(j_a h - j_b f)$ ).

O pushout induz o isomorfismo  $j$  entre conúcleos no diagrama comutativo acima à direita. Além disso, se  $h$  é mono, então  $h'$  é mono.

**Demonstração.** 1 e 2 são triviais.  
 3. Temos o diagrama comutativo à direita com um isomorfismo  $g$ . Por 1,  $\text{Ker } h = 0$  e  $\ker h = 0$ . Portanto,  $0 \xrightarrow{0} a \xrightarrow{1_a} a$  é o diagrama de  $\text{co}(\ker h)$ . Assim, podemos supor que  $\text{Co}(\ker h) = a$  e que  $\text{co}(\ker h) = 1_a$ . De maneira semelhante,  $\text{Ker}(\text{co } h) = b$  e  $\ker(\text{co } h) = 1_b$ . Agora,  $g = h$ .

4. Se  $h = \text{co}(\ker h)$ , então  $h$  é epi. Seja  $h$  epi. Sendo  $h = (\ker(\text{co } h)) \text{co}(\ker h)$  com  $h$  epi, concluímos que  $\ker(\text{co } g)$  é epi. Mas,  $\ker(\text{co } g)$  é mono. Por 3,  $\ker(\text{co } g)$  é um isomorfismo.

- 5 é dual a 4.
- 6 agora segue de 3.

**7.** Provemos que o núcleo indicado representa o pullback. No diagrama comutativo à direita, existe um (único) morfismo  $g : d \rightarrow a \times b$  tal que  $f'' = \pi_a g$  e  $h'' = \pi_b g$ . A comutatividade do diagrama à direita é equivalente ao fato que  $rg = 0$ , onde  $r := h\pi_a - f\pi_b : a \times b \rightarrow c$ . Sendo universal, o núcleo  $k : \text{Ker } r \rightarrow a \times b$  induz um único morfismo  $\vartheta : d \rightarrow \text{Ker } r$  tal que  $k\vartheta = g$ . Como as igualdades  $f'' = \pi_a g$  e  $h'' = \pi_b g$  definem  $g$  de maneira única, então  $\vartheta$  é definido univocamente pelas igualdades  $f'' = \pi_a k\vartheta$  e  $h'' = \pi_b k\vartheta$ , isto é, pelas igualdades  $f'' = f'\vartheta$  e  $h'' = h'\vartheta$ , onde  $f' := \pi_a k$  e  $h' := \pi_b k$ . Em outras palavras,  $\text{Ker } r$  é o pullback  $a \times_c b$ .

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{h''} & b \\ \downarrow f'' & & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{h} & c \end{array}$$

Suponhamos agora que no diagrama à esquerda  $hf'' = 0$ . Então obtemos o diagrama comutativo à direita que induz um único morfismo  $g : d \rightarrow a \times_c b$  tal que  $f'g = f''$  e  $h'g = 0$ . Logo, existe um único morfismo  $j : d \rightarrow \text{Ker } h'$  tal que  $g = (\text{ker } h')j$ . Assim, temos um único  $j$  satisfazendo a igualdade  $f'(\text{ker } h')j = f''$ . Isto significa que  $f' \text{ker } h' : \text{Ker } h' \rightarrow a$  é o núcleo de  $h : a \rightarrow c$ .

Suponhamos que  $h$  seja epi. Temos  $rj_a = (h\pi_a - f\pi_b)j_a = h$ . Logo,  $r$  é epi. Por 4,  $r = \text{co } k$  na sequência  $a \times_c b \xrightarrow{k} a \times b \xrightarrow{r} c$ . Temos  $h' = \pi_b k$ . Se  $0 = gh'$  para algum  $g : b \rightarrow d$ , então  $0 = g\pi_b k$ . Sendo  $r = \text{co } k$ , existe um (único) morfismo  $\vartheta : c \rightarrow d$  tal que  $g\pi_b = \vartheta r$ . Consequentemente,  $0 = g\pi_b j_a = \vartheta r j_a = \vartheta(h\pi_a - f\pi_b)j_a = \vartheta h$ . Daí,  $\vartheta = 0$ ,  $g\pi_b = 0$  e  $g = 0$ , pois  $h$  e  $\pi_b$  são epis.

**8** é dual a **7** ■

**2.17. Definição.** Denotamos  $\text{Co}(\text{ker } h) (\simeq \text{Ker}(\text{co } h))$  por  $\text{Im } h$ , a *imagem de h*,  $\text{Im } h := \text{Co}(\text{ker } h)$ . Pela Proposição 2.16.6, todo morfismo  $h : a \rightarrow b$  se decompõe, univocamente, na composição do epimorfismo  $\pi : a \rightarrow \text{Im } h$  e do monomorfismo  $i : \text{Im } h \rightarrow b$ ,  $f = i\pi$ .

Lidando com uma categoria abeliana, usualmente fixamos os seguintes funtores e as correspondentes transformações naturais:  $\oplus_{i=1}^n, \pi_i, j_i, \text{Ker}, \text{ker}, \text{Co}, \text{co}, \text{Im}, \text{etc}$ . Claramente, podemos fazer isto de modo que  $\text{Ker}(-h) = \text{Ker } h$ ,  $\text{ker}(-h) = \text{ker } h$ ,  $\text{Co}(-h) = \text{Co } h$ ,  $\text{co}(-h) = \text{co } h$  e, portanto,  $\text{Im}(-h) = \text{Im } h$  para todo morfismo  $h$ .

**2.18. Definição.** Dizemos que a sequência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  é *semixata em b* se  $fh = 0$ . Neste caso,  $h = i\pi$ , onde  $\pi : a \rightarrow \text{Im } h$  é epi e  $i : \text{Im } h \rightarrow b$  é mono. Logo,  $fi\pi = 0$ , o que implica  $fi = 0$ . Consequentemente, obtemos  $j : \text{Im } h \rightarrow \text{Ker } f$  tal que  $i = (\text{ker } f)j$ . Assim, toda sequência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  semixata em  $b$  gera uma decomposição de  $h$  com  $j$  mono (vide o diagrama à direita). Se  $j$  é um isomorfismo, então a sequência é dita *exata em b*. Uma sequência  $\dots \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots$  é dita *(semi)exata* se ela é (semi)exata em cada um de seus termos. Obviamente,  $0 \rightarrow a \xrightarrow{h} b$  (respectivamente,  $b \xrightarrow{h} a \rightarrow 0$ ) é exata em  $a$  se e só se  $h$  é mono (respectivamente, epi). Agora é fácil ver que o fato de a sequência  $0 \rightarrow a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  ser exata é equivalente a  $h = \text{ker } f$ . Para provar o fato dual que a sequência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c \rightarrow 0$  é exata se e só se  $f = \text{co } h$ , podemos utilizar a seguinte observação.

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } h & \xrightarrow{j} & \text{Ker } f \\ \pi \uparrow & & \downarrow \text{ker } f \\ a & \xrightarrow{h} & b \end{array}$$

**2.19. Observação.** A sequência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  é exata em  $b$  se e só se existe uma decomposição de  $f$ , em epi e mono, dada por  $b \xrightarrow{\text{co } h} \text{Co } h \xrightarrow{m} c$ .

$$\begin{array}{ccccc} \text{Im } h & \xrightarrow{j} & \text{Ker } f & & \\ \pi \uparrow & & \downarrow \text{ker } f & & \\ a & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{f} & c \\ & & \downarrow \text{co } h & \searrow p & \uparrow l \\ & & \text{Co } h & \xrightarrow{\beta} & \text{Im } f \\ & & & \swarrow \alpha & \end{array}$$

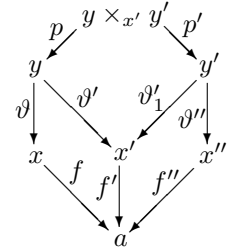
**Demonstração.** Suponhamos que a sequência seja exata. Utilizando a decomposição da Definição 2.17 para  $f$  e o diagrama da Definição 2.18 para  $h$ , obtemos o diagrama comutativo à direita, onde  $j$  é iso,  $\pi$  e  $p$  são epis e  $l$  é mono. Como  $lph = 0$  e  $l$  é mono, temos  $ph = 0$ . Logo, existe um único  $\alpha : \text{Co } h \rightarrow \text{Im } f$  tal que  $\alpha(\text{co } h) = p$ . Por outro lado,  $0 = (\text{co } h)h = (\text{co } h)(\text{ker } f)j\pi$ . Sendo  $\pi$  e  $j$  epis,  $(\text{co } h)(\text{ker } f) = 0$ . Pela Definição 2.17,  $\text{Im } f \simeq \text{Co}(\text{ker } f)$ . Daí obtemos um único  $\beta : \text{Im } f \rightarrow \text{Co } h$  tal que  $\beta p = \text{co } h$ . Agora, utilizando o fato que  $p$  e  $\text{co } h$  são epis, é fácil ver

que  $\alpha$  e  $\beta$  são inversos um do outro e, assim, estabelecem um isomorfismo  $\text{Im } f \simeq \text{Co } h$ . Resta definir  $m := \lambda\alpha$ .

Reciprocamente, se  $f$  é decomposto como  $b \xrightarrow{\text{co } h} \text{Co } h \xrightarrow{m} c$  com  $m$  mono, então a seqüência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  é exata em  $b$ , pois, sendo  $m$  mono,  $\text{Ker } f = \text{Ker } (m(\text{co } h))$  “coincide” com  $\text{Ker } (\text{co } h) = \text{Im } h$  ■

O fato obtido é dual à Definição 2.18 que, na verdade, diz que “a seqüência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  é exata em  $b$  se e só se  $h$  se decompõe como  $a \xrightarrow{e} \text{Ker } f \xrightarrow{\text{ker } f} b$  com  $e$  epi”.

**2.20. Definição.** Seja  $a \in \mathcal{C}$ . Dizemos que  $f : x \rightarrow a$  e  $f' : x' \rightarrow a$  são *equivalentes*,  $f \equiv f'$ , se existem epimorfismos  $\vartheta : y \rightarrow x$  e  $\vartheta' : y \rightarrow x'$  tais que  $f\vartheta = f'\vartheta'$ . Mostremos que  $f \equiv f'$  e  $f' \equiv f''$  implicam  $f \equiv f''$ . Realmente, temos o diagrama comutativo à direita com  $\vartheta, \vartheta', \vartheta'_1$  e  $\vartheta''$  epis. Pela Proposição 2.16.7,  $p$  e  $p'$  são epis. Agora  $f\vartheta p = f''\vartheta''p'$  com  $\vartheta p$  e  $\vartheta''p'$  epis. Assim, obtemos uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência se chama de *membro de  $a$* ,  $x \in_m a$ . Podemos falar sobre a *imagem* de um membro: Seja  $x \in_m a$ ,  $f : x \rightarrow a$ , um membro e seja  $h : a \rightarrow b$  um morfismo. Então  $hf : x \rightarrow b$  define a imagem  $hx \in_m b$ . É fácil ver que  $x \equiv x'$  implica  $hx \equiv hx'$ . Também faz sentido dizer  $-x \in_m a$  ou  $x \equiv 0$ .



Os membros substituem elementos na caça em diagramas:

**2.21. Proposição** (as regras elementares para caça em diagramas).

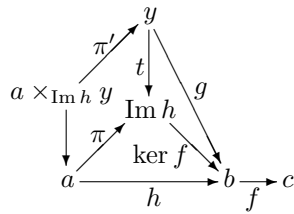
1. Um morfismo  $h : a \rightarrow b$  é nulo se e só se  $hx \equiv 0$  para todo  $x \in_m a$ .
2. Um morfismo  $h : a \rightarrow b$  é mono se e só se  $hx \equiv 0$  implica  $x \equiv 0$  para todo  $x \in_m a$  (ou, equivalentemente,  $hx \equiv hx'$  implica  $x \equiv x'$  para todos  $x, x' \in_m a$ ).
3. Um morfismo  $h : a \rightarrow b$  é epi se e só se, para todo  $y \in_m b$ , existe um  $x \in_m a$  tal que  $hx \equiv y$ .
4. Uma seqüência  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  é exata em  $b$  se e só se  $fh = 0$  e, para qualquer  $y \in_m b$  com  $fy \equiv 0$ , existe um  $x \in_m a$  tal que  $hx \equiv y$ .
- 5 (subtração). Sejam dados um morfismo  $h : a \rightarrow b$  e dois membros  $x, y \in_m a$  tais que  $hx \equiv hy$ . Então existe  $z \in_m a$  (podemos denotar  $z \equiv x - y$ ) tal que  $hz \equiv 0$  e, para qualquer morfismo  $f : a \rightarrow c$ , temos  $fx \equiv 0 \implies fz \equiv -fy$  e  $fy \equiv 0 \implies fz \equiv fx$ .

**Demonstração. 1.** Como  $1_a : a \rightarrow a$  induz  $a \in_m a$ , então  $ha \equiv 0$  implica  $h = 0$ .

**2.** Se  $h$  é mono e  $hx \equiv hx'$  para  $f : x \rightarrow a$  e  $f' : x' \rightarrow a$ , então  $hf\vartheta = hf'\vartheta'$  para epimorfismos  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  apropriados. Isto implica  $f\vartheta = f'\vartheta'$  e assim  $x \equiv x'$ . Reciprocamente, seja  $hf = 0$  para algum  $f : x \rightarrow a$ . Então  $x \equiv 0$  e existe um epimorfismo  $\vartheta : z \rightarrow x$  tal que  $f\vartheta = 0$ . Logo,  $f = 0$ . Assim concluímos que  $h$  é mono.

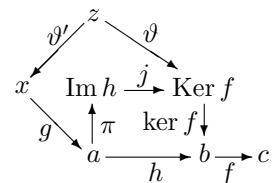
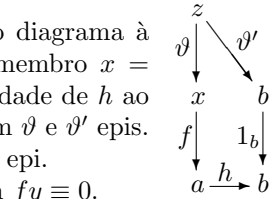
**3.** Suponhamos que  $h$  seja epi. Seja  $y \in_m b$ ,  $f : y \rightarrow b$ . No diagrama à esquerda,  $h'$  é epi pela Proposição 1.16.7. Assim obtemos um membro  $x = a \times_b y \in_m a$  tal que  $hx \equiv y$ . Reciprocamente, aplicando a propriedade de  $h$  ao membro  $y := b \in_m b$ , obtemos o diagrama comutativo à direita com  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  epis. Sendo  $h$  divisor à esquerda do epimorfismo  $\vartheta'$ , concluímos que  $h$  é epi.

**4.** Suponhamos que a seqüência seja exata em  $b$ . Seja  $y \in_m b$ ,  $g : y \rightarrow b$ , com  $fy \equiv 0$ .

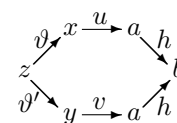


Então, para um epimorfismo  $\vartheta : z \rightarrow y$ , temos  $fg\vartheta = 0$ . Logo,  $fg = 0$  e  $g = (\text{ker } f)t$  para algum  $t : y \rightarrow \text{Ker } f = \text{Im } h$ . No diagrama à esquerda,  $h = (\text{ker } f)\pi$  com  $\pi$  epi. Pela Proposição 1.16.7,  $\pi'$  é epi e  $hx \equiv y$ , onde  $x := a \times_{\text{Im } h} y \in_m a$ .

Reciprocamente, aplicando a propriedade ao membro  $y := \text{Ker } f \in_m b$ , obtemos o diagrama à direita com  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  epis. Isto é,  $(\text{ker } f)j\pi g\vartheta' = (\text{ker } f)\vartheta$ , ou seja,  $j\pi g\vartheta' = \vartheta$ , implicando que  $j$  é epi.



5. Temos o diagrama comutativo à direita com  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  epis. Agora, o  $z \in_m a$  desejado é  $u\vartheta - v\vartheta' : z \rightarrow a$  ■



A Proposição 2.21 possibilita aplicar os argumentos usuais na caça em diagramas. A “receita” é provar primeiramente um fato com uso de elementos como na categoria **Ab** e trocar depois “elementos” por “membros”. O único lugar em que isto não funciona é na construção de morfismos. Um exemplo disto é o seguinte lema.

**2.22. Lema** (da serpente). *Dado um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 \rightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

com linhas exatas, então existe um morfismo  $\delta : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1$  tal que a sequência

$$(2.22.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } h_1 \xrightarrow{i'} \text{Ker } h_2 \xrightarrow{p'} \text{Ker } h_3 \xrightarrow{\delta} \text{Co } h_1 \xrightarrow{j'} \text{Co } h_2 \xrightarrow{\pi'} \text{Co } h_3 \rightarrow 0$$

é exata, onde os morfismos  $i', p', j'$  e  $\pi'$  são induzidos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ker } h_1 & \xrightarrow{i'} & \text{Ker } h_2 & \xrightarrow{p'} & \text{Ker } h_3 \xrightarrow{\delta} \\ \text{ker } h_1 \downarrow & & \text{ker } h_2 \downarrow & & \text{ker } h_3 \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 \rightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 \rightarrow 0 \\ \text{co } h_1 \downarrow & & \text{co } h_2 \downarrow & & \text{co } h_3 \downarrow & & \\ \delta & \rightarrow & \text{Co } h_1 & \xrightarrow{j'} & \text{Co } h_2 & \xrightarrow{\pi'} & \text{Co } h_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

**Demonstração.** Para definir  $\delta$  consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{\text{ker } q} & a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{q} & \text{Ker } h_3 \rightarrow 0 \\ & & 1_{a_1} \downarrow & & k \downarrow & & \text{ker } h_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 \rightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 \rightarrow 0 \\ \text{co } h_1 \downarrow & & c \downarrow & & 1_{b_3} \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Co } h_1 & \xrightarrow{g} & \text{Co } h_1 \sqcup_{b_1} b_2 & \xrightarrow{\text{co } g} & b_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

Sendo  $p$  epi e sendo  $j$  mono, pela Proposição 2.16.7 (e 2.16.8),  $q$  é epi,  $g$  é mono, as linhas no diagrama são exatas e o diagrama é comutativo. Consideremos o morfismo  $\delta_0 := ch_2k$ . Temos  $\delta_0(\text{ker } q) = 0$  e  $q = \text{co}(\text{ker } q)$ . Logo, existe um morfismo  $u : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1 \sqcup_{b_1} b_2$  tal que  $uq = \delta_0$ . Sendo  $0 = (\text{co } g)\delta_0 = (\text{co } g)uq$  com  $q$  epi, concluímos que  $(\text{co } g)u = 0$ . De  $g = \text{ker}(\text{co } g)$  segue que existe um morfismo  $\delta : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1$  tal que  $g\delta = u$ .

Agora descrevemos  $\delta$  usando membros. Seja  $x \in_m \text{Ker } h_3$ ,  $f : x \rightarrow \text{Ker } h_3$ . Pela Proposição 2.21.3, existe  $x_2 \in_m a_2$ ,  $f_2 : x_2 \rightarrow a_2$ , tal que  $px_2 \equiv (\text{ker } h_3)x$ . Como  $0 \equiv h_3(\text{ker } h_3)x \equiv h_3px_2 \equiv \pi h_2x_2$  e a sequência  $0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow 0$  é exata em  $b_2$ , então, pela Proposição 2.21.4, existe  $y_1 \in_m b_1$  tal que  $h_2y_1 \equiv h_2x_2$ . Fazemos  $y \equiv (\text{co } h_1)y_1$  e mostremos que  $y \equiv \delta x$ . (Pela Proposição 2.21.1, isto define  $\delta$  univocamente.) Pela Proposição 2.21.2, é suficiente demonstrar que  $gy \equiv g\delta x$ , pois  $g$  é mono. Em outras palavras, precisamos verificar que  $g(\text{co } h_1)y_1 \equiv ux$ , isto é, que  $ch_2x_2 \equiv ux$ . Se encontramos

$$(2.22.2) \quad \begin{array}{c} \ker h_3 \downarrow x \\ x_2 \xrightarrow{p} (\ker h_3)x \\ \downarrow h_2 \\ y_1 \xrightarrow{j} h_2x_2 \\ \downarrow \text{co } h_1 \\ (\text{co } h_1)y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & x & \xrightarrow{f} & \text{Ker } h_3 \\ & \vartheta \nearrow & & & \downarrow \ker h_3 \\ z & & & & a_3 \\ & \vartheta' \searrow & & & \downarrow p \\ & & x_2 & \xrightarrow{f_2} & a_2 \end{array}$$

$z \in_m a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$  tal que  $qz \equiv x$  e  $kz \equiv x_2$ , então  $ch_2x_2 \equiv ch_2kz \equiv \delta_0z \equiv uqz \equiv ux$  e tudo está feito. Para alguns epimorfismos  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  temos o diagrama comutativo à direita. Portanto, existe um morfismo  $\varepsilon : z \rightarrow a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$  tal que  $q\varepsilon = f\vartheta$  e  $k\varepsilon = f_2\vartheta'$ . Em outras palavras,  $z \in_m a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$ ,  $qz \equiv x$  e  $kz \equiv x_2$ .

A exatidão da sequência (2.22.1) pode ser obtida pela caça no diagrama do lema usando a Proposição 2.21 e a “definição” (2.22.2) do morfismo  $\delta$ . Deixamos tal demonstração a cargo do leitor ■

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Ker } h'_3 & \xrightarrow{\delta'} & \\ & & & & \downarrow \delta & & \\ & & & & \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{\delta} & \\ & & & & \downarrow f'_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & a'_1 & \longrightarrow & a'_2 & \longrightarrow & a'_3 \longrightarrow 0 \\ & \nearrow f_1 & \downarrow h'_1 & \nearrow f_2 & \downarrow h'_2 & \nearrow f_3 & \downarrow h'_3 \\ 0 & \longrightarrow & a_1 & \longrightarrow & a_2 & \longrightarrow & a_3 \longrightarrow 0 \\ & \downarrow h_1 & \downarrow h_2 & \downarrow h_3 & & & \\ 0 & \longrightarrow & b'_1 & \longrightarrow & b'_2 & \longrightarrow & b'_3 \longrightarrow 0 \\ & \nearrow g_1 & \downarrow g_2 & \nearrow g_3 & & & \\ 0 & \longrightarrow & b_1 & \longrightarrow & b_2 & \longrightarrow & b_3 \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \delta' & \downarrow \delta & & & & \\ & \text{Co } h'_1 & \longrightarrow & \text{Co } h_1 & & & \\ & \downarrow g'_1 & & \downarrow g_1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f'_3x \\ \ker h'_3 \downarrow \\ f_2x_2 \longrightarrow (\ker h'_3)f'_3x \\ \downarrow h'_2 \\ g_1y_1 \longrightarrow h'_2f_2x_2 \equiv g_2h_2x_2 \\ \downarrow \text{co } h'_1 \\ (\text{co } h'_1)g_1y_1 \end{array}$$

**2.23. Observação.** A Ker-Coker-sequência é funtorial. Isto significa o seguinte. Suponhamos que  $(h_1, h_2, h_3)$  e  $(h'_1, h'_2, h'_3)$  participem nos diagramas comutativos  $D$  e  $D'$  com linhas exatas, como aquele do Lema 2.2.2, e seja  $D \rightarrow D'$  um morfismo entre os diagramas dado por morfismos  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$  (isto significa que a parte correspondente do diagrama acima à esquerda é comutativa). Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h_1 & \longrightarrow & \text{Ker } h_2 & \longrightarrow & \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{\delta} & \text{Co } h_1 & \longrightarrow & \text{Co } h_2 & \longrightarrow & \text{Co } h_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & f'_1 \downarrow & & f'_2 \downarrow & & f'_3 \downarrow & & g'_1 \downarrow & & g'_2 \downarrow & & g'_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_1 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_2 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_3 & \xrightarrow{\delta'} & \text{Co } h'_1 & \longrightarrow & \text{Co } h'_2 & \longrightarrow & \text{Co } h'_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo, onde todos os morfismos, além de  $\delta$  e  $\delta'$ , são induzidos.

**Demonstração.** Já que todos os morfismos, além de  $\delta$  e  $\delta'$ , são induzidos, resta mostrar a comutatividade do quadrado central (pois os outros quadrados são comutativos pelo fato que Ker e Co são funtores). Isto se faz pela caça no diagrama acima à esquerda utilizando a “definição” (2.22.2) de  $\delta$  e  $\delta'$  com o auxílio do diagrama acima à direita ■

Outros exemplos de aplicação de caça em diagramas são os “4-lema” e “5-lema”.

**2.24. Lema (4-lema).** Seja dado um diagrama comutativo à esquerda com a primeira linha semiexata em  $a_2$  e exata em  $a_3$  e com a segunda linha exata em  $b_2$ . Se  $h_2$  e  $h_4$  são monos e  $h_1$  é epi, então  $h_3$  é mono.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & \xrightarrow{f_1} & a_2 & \xrightarrow{f_2} & a_3 & \xrightarrow{f_3} & a_4 \\
h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow \\
b_1 & \xrightarrow{g_1} & b_2 & \xrightarrow{g_2} & b_3 & \xrightarrow{g_3} & b_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
a_1 & \xrightarrow{f_1} & a_2 & \xrightarrow{f_2} & a_3 & \xrightarrow{f_3} & a_4 & \xrightarrow{f_4} & a_5 \\
h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow & & h_5 \downarrow \\
b_1 & \xrightarrow{g_1} & b_2 & \xrightarrow{g_2} & b_3 & \xrightarrow{g_3} & b_4 & \xrightarrow{g_4} & b_5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
& & a_2 & \xrightarrow{f_2} & a_3 & \xrightarrow{f_3} & a_4 & \xrightarrow{f_4} & a_5 \\
h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow & & h_5 \downarrow & & \\
& & b_2 & \xrightarrow{g_2} & b_3 & \xrightarrow{g_3} & b_4 & \xrightarrow{g_4} & b_5
\end{array}$$

Seja dado um diagrama comutativo à direita com a primeira linha exata em  $a_4$  e com a segunda linha exata em  $b_3$  e semiexata em  $b_4$ . Se  $h_2$  e  $h_4$  são epis e  $h_5$  é mono, então  $h_3$  é epi ■

**2.25. Corolário (5-lema).** *Seja dado um diagrama comutativo acima no centro com a primeira linha semiexata em  $a_2$  e exata em  $a_3$  e  $a_4$ , com a segunda linha exata em  $b_2$  e  $b_3$  e semiexata em  $b_4$ . Se  $h_1$  é epi,  $h_5$  é mono,  $h_2$  e  $h_4$  são isomorfismos, então  $h_3$  é um isomorfismo ■*

### 3. Cohomologias

**3.1. Exemplo introdutório: homologies singulares.** Seja  $k \in \mathbb{N}$  e sejam  $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$  linearmente independentes. Um  $k$ -simplexo (padrão)  $\Delta_k$  é o envelope convexo dos  $e_0, \dots, e_k$ , isto é, o menor subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  que contém os  $e_0, \dots, e_k$ . O simplexo  $\Delta_k$  pode ser descrito usando coordenadas baricêntricas  $\Delta_k = \{\sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0\}$ . Sejam  $0 \leq i \leq k$  com  $k \geq 1$ . Denotemos por  $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$  a função da  $i$ -ésima face dada pela fórmula  $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$  em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que  $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$  se  $0 \leq i < j \leq k+1$  e  $k \geq 1$ .

Seja  $X$  um espaço topológico. Um  $k$ -simplexo singular em  $X$  é uma função contínua  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ . Denotamos por  $S_k X := \{\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z}\}$  o grupo abeliano livremente gerado por todos os  $k$ -simplexos singulares em  $X$ . Se  $f : X \rightarrow X'$  é uma seta em  $\mathbf{Esp}$ , podemos definir  $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$ , obtendo assim um funtor  $S_k : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Em seguida, frequentemente escrevemos  $f$  no lugar de  $S_k f$ . Os elementos de  $S_k X$  são ditos  $k$ -cadeias. Por definição,  $S_k := 0$  para  $k < 0$ .

A regra  $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$  define a transformação natural  $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$ , chamada *operador de bordo* (por definição,  $\partial_k := 0$  se  $k \leq 0$ ). Verifiquemos que  $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ . Seja  $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$  um  $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i
\end{aligned}$$

e, em vista de  $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ ,

$$\sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1} = - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^j,$$

mostrando que  $\partial^2 = 0$  (em seguida, frequentemente omitimos índices caso isto não cause confusões).

Temos também uma transformação natural  $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$ , chamada *grau* e dada por  $\sigma \mapsto 1$ , onde  $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  denota o funtor constante:  $\Delta_{\mathbb{Z}} X := \mathbb{Z}$  e  $\Delta_{\mathbb{Z}} f := 1_{\mathbb{Z}}$ .

**3.1.1. Lema.** *Seja  $c \in X$  um ponto num conjunto convexo  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Então existem homomorfismos  $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tais que  $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$  para todo  $0 \neq k \in \mathbb{Z}$  e  $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg} \cdot c$ . Em particular,  $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$  para todo  $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração.** Seja  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  um simplexo singular. Definamos  $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$  pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0) \sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \\ c & \text{se } x_0 = 1 \end{cases}$$

É fácil ver que  $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^{i+1} = c_{k-1} \cdot (\sigma \partial_k^i)$  se  $k > 0$  e  $0 \leq i \leq k$ , que  $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^0 = \sigma$  se  $k \geq 0$  e que  $(c_0 \cdot \sigma) \partial_1^1 = c$ , onde  $c$  denota o simplexo singular  $\Delta_0 \rightarrow X$  com a imagem  $c$ . Daí segue a primeira afirmação. A segunda é um fato geral: se  $\partial_k x = 0$ , então  $x = \partial c_k x + c_{k-1} \partial x = \partial c_k x$  ■

**3.1.2. Lema.** *Sejam  $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , transformações naturais tais que  $\deg f_0 = 0$  e  $\partial f_k = f_{k-1} \partial$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Então existem transformações naturais  $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tais que  $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração.** Para  $i < 0$ , definamos  $s_i := 0$ . Por indução sobre  $k$ , já construímos transformações naturais  $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$  tais que  $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$  para todo  $i < k$ .

Para o simplexo singular  $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$ , temos

$$\partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) = f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0$$

devido a  $\partial^2 = 0$  e pela hipótese de indução. Claro que  $\Delta_1 \times \Delta_k$  é convexo em  $\mathbb{R}^n$ .

Consideremos o caso  $k = 0$ . De  $\deg f_0 = 0$  e  $\partial c_0 = 1_{S_0 \Delta_0} - \deg \cdot c$  para qualquer  $c \in \Delta_1 \times \Delta_0 \simeq \Delta_1$  (vide o Lema 3.1.1), obtemos

$$f_0 1_{\Delta_0} - s_{-1} \partial 1_{\Delta_0} = f_0 1_{\Delta_0} = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} + \deg(f_0 1_{\Delta_0}) c = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} = \partial f_1 c_0 1_{\Delta_0}$$

e definamos  $b_0 := f_1 c_0 1_{\Delta_0} \in S_1(\Delta_1 \times \Delta_0)$ . Temos  $f_0 1_{\Delta_0} = \partial b_0 + s_{-1} \partial 1_{\Delta_0}$ .

Caso  $k \neq 0$ , pelo Lema 3.1.1, existe  $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$  tal que  $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ , ou seja,  $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$  novamente.

Definamos  $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$  pela fórmula  $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$ , onde  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  é um  $k$ -simplexo singular em  $X$ . Então, para quaisquer seta  $f : X \rightarrow X'$  em **Esp** e  $k$ -simplexo singular  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  em  $X$ , temos  $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$ , mostrando assim a naturalidade de  $s_k$ .

Finalmente, pela naturalidade de  $f_k$  e de  $s_{k-1}$ , obtemos  $f_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k$  e  $(1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} = s_{k-1} \sigma$  para qualquer função contínua  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  (que é nada mais do que um  $k$ -simplexo singular em  $X$ ). Agora,

$$\begin{aligned} f_k \sigma &= f_k \sigma 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma) (\partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) = \\ &= \partial (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k + (1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \sigma \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \partial \sigma, \end{aligned}$$

pois  $(1_{\Delta_1} \times \sigma) \partial = \partial (1_{\Delta_1} \times \sigma)$  e  $\sigma \partial = \partial \sigma$  (usamos aqui o fato que  $\partial$  é uma transformação natural) ■

Introduzimos a categoria **Esp**<sup>(2)</sup> de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de **Esp**<sup>(2)</sup> são pares  $(X, S)$ , onde  $X \in \mathbf{Esp}$  é um espaço topológico e  $S \xrightarrow{i} X$  é um subespaço em  $X$ . Uma seta  $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$  em **Esp**<sup>(2)</sup> é simplesmente uma seta  $X \xrightarrow{f} X'$  em **Esp** tal que  $fS \subset S'$ . Seja  $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ . Então temos  $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$  e definimos  $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$ . Sendo  $\partial$  uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido  $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$ . É fácil ver que tal  $\partial_k$  (que é mais geral do que o anterior: tome  $S = \emptyset$ ) é uma transformação natural entre funtores do tipo **Esp**<sup>(2)</sup>  $\rightarrow$  **Ab**.

Definamos  $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$ . É imediato que  $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$  é um funtor, chamado *k-homologia singular* de par.



**3.1.3. Proposição.** *Sejam  $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$  e seja  $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$  uma homotopia em  $\mathbf{Esp}^{(2)}$  (isto é, uma seta  $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$  em  $\mathbf{Esp}$  tal que  $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$ ). Então  $H_k h^0 = H_k h^1$ , onde  $h^t : (X, S) \rightarrow (X', S')$  é dada por  $h^t x := h(t, x)$ .*

**Demonstração.** Seja  $t \in \Delta_1$ . A função contínua  $g^t : X \rightarrow \Delta_1 \times X$ , definida pela regra  $g^t : x \mapsto (t, x)$ , é uma transformação natural em  $X$  tal que  $hg^t = h^t$ . Temos transformações naturais induzidas  $g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tais que  $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$ . Já que  $\deg g_0^t$  independe de  $t$ , definindo  $f_k := g_k^1 - g_k^0$ , obtemos transformações naturais  $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , satisfazendo  $\deg f_0 = 0$  e  $\partial f_k = f_{k-1} \partial$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais  $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tais que  $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

De  $g^t S \subset \Delta_1 \times S$  segue  $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$  para os homomorfismos  $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pela naturalidade dos  $s_k$ 's aplicada ao morfismo  $S \xrightarrow{i} X$ , concluímos que  $s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$  para os homomorfismos  $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto, temos homomorfismos induzidos  $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ ,  $f_k = g_k^1 - g_k^0$  e  $s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$  e permanece válido  $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ , isto é,  $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

O morfismo  $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$  induz os homomorfismos  $h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . De  $hg^t = h^t$  segue  $h_k g_k^t = h_k^t$ . Logo,  $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1} \partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1} \partial$ . Seja  $z \in \text{Ker } \partial_k$ . Então  $(h_k^1 - h_k^0)z = \partial h_{k+1} s_k z \in \text{Im } \partial_{k+1}$ . Isto implica  $H_k h^0 = H_k h^1$  ■

**3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Denotamos por  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , onde  $*$   $\in \{\emptyset, +, -, b\}$ , a categoria cujos objetos são os  $*$ -complexos, isto é, seqüências semiexatas em  $\mathcal{C}$

$$C^\bullet : \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- $\emptyset$  nada.
- $+$  existe um  $i_0$  tal que  $C^i = 0$  para todo  $i < i_0$ .
- $-$  existe um  $i_1$  tal que  $C^i = 0$  para todo  $i > i_1$ .
- $b$  existem  $i_0$  e  $i_1$  tais que  $C^i = 0$  se  $i < i_0$  ou  $i > i_1$ .

Os morfismos  $d_{C^\bullet}^i$ 's chamam-se *operadores de bordo* do complexo. Um morfismo  $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  entre complexos é uma coleção de setas  $h^i : C^i \rightarrow D^i$  compatíveis com os  $d_{C^\bullet}^i$ 's, isto é,  $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$  para todo  $i$ . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices:  $hd = dh$  (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  é uma **Ab**-categoria se definirmos  $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$ . Ela possui biprodutos  $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^i := C^i \oplus D^i$  com projeções e injeções óbvias. Ela tem objeto nulo  $0^i := 0$ . Possui núcleos e conúcleos: por exemplo,  $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$  com o morfismo  $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$  feito de morfismos  $\text{ker } h^i$  e com  $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$  induzido por  $d_{C^\bullet}^i$  e  $d_{D^\bullet}^i$ . Obviamente,  $h^\bullet$  é mono (epi, iso) se e só se cada um  $h^i$  é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  é uma categoria abeliana.

Seja  $C^\bullet$  um complexo. Denotemos  $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$  e  $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$ . Temos a decomposição de  $d_{C^\bullet}^{i-1}$  no diagrama à direita com  $j_{C^\bullet}^i$  mono (vide a Definição 2.18). Façamos  $H^i C^\bullet := \text{Co } j_{C^\bullet}^i$ . Em outras palavras, a seqüência

$$0 \rightarrow B^i C^\bullet \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} Z^i C^\bullet \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} H^i C^\bullet \rightarrow 0$$

é exata.

Seja  $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  um morfismo entre complexos. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\ \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & & \downarrow \text{ker } d_{C^\bullet}^i \\ C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \\
h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & & & h^i \downarrow & h^{i+1} \downarrow \\
D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} D^i \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} D^{i+1} \\
\\
C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 & & Z^i C^\bullet \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \\
h^{i-1} \downarrow & & & & h^i \downarrow & & g \downarrow & & Z^i h^\bullet \downarrow & h^i \downarrow & h^{i+1} \downarrow \\
D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 & & Z^i D^\bullet \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} D^i \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} D^{i+1}
\end{array}$$

As setas  $h^i$  e  $h^{i+1}$  induzem o morfismo  $Z^i h^\bullet : Z^i C^\bullet \rightarrow Z^i D^\bullet$  que faz o diagrama acima à direita comutativo. As setas  $h^{i-1}$  e  $h^i$  induzem o morfismo  $g : \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1}$  que faz o diagrama acima à esquerda comutativo, onde  $m_{C^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) : B^i C^\bullet = \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) \rightarrow C^i$  e  $m_{D^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) : B^i D^\bullet = \text{Im } d_{D^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) \rightarrow D^i$  são os monomorfismos participando nas decomposições dos morfismos  $d_{C^\bullet}^{i-1}$  e  $d_{D^\bullet}^{i-1}$ , respectivamente (vide a Definição 2.17). Assim, as setas  $h^i$  e

$$\begin{array}{ccccccc}
B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 & & C^{i-1} \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} B^i C^\bullet \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} C^i \\
B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow & & g \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & B^i h^\bullet \downarrow & h^i \downarrow \\
B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 & & D^{i-1} \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} B^i D^\bullet \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} D^i
\end{array}$$

$g$  induzem o morfismo  $B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$  que faz o diagrama acima à esquerda comutativo. Consequentemente, no diagrama acima à direita temos  $m_{D^\bullet}^i (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i = h^i m_{C^\bullet}^i \pi_{C^\bullet}^i = m_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^{i-1}$ . Sendo  $m_{D^\bullet}^i$  mono, concluímos que  $\pi_{D^\bullet}^i h^{i-1} = (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$ , isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo. Resumindo, obtemos o diagrama comutativo

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc}
C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \\
h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & Z^i h^\bullet \downarrow & h^i \downarrow & h^{i+1} \downarrow \\
D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} D^i \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} D^{i+1}
\end{array}$$

O quadrado central é comutativo, pois  $\ker d_{D^\bullet}^i (Z^i h^\bullet) j_{C^\bullet}^i \pi_{C^\bullet}^i = h^i (\ker d_{C^\bullet}^i) j_{C^\bullet}^i \pi_{C^\bullet}^i = (\ker d_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^{i-1} = (\ker d_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$ , com  $\pi_{C^\bullet}^i$  epi e  $\ker d_{D^\bullet}^i$  mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
B^i h^\bullet \downarrow & & & & Z^i h^\bullet \downarrow & & H^i h^\bullet \downarrow \\
0 & \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \rightarrow 0
\end{array}$$

e vemos que  $B^i$ ,  $Z^i$  e  $H^i$  são funtores. Chamaremos  $H^i$  de *i-cohomologia de complexo*.

**3.2.3. Lema.** Os funtores  $B^i$ ,  $Z^i$  e  $H^i$  são aditivos.

**Demonstração.** Sejam dados dois morfismos entre complexos  $h^\bullet, f^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ . O morfismo  $h^\bullet + f^\bullet$  determina, para todo  $i$ , o diagrama comutativo abaixo, onde  $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$  é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como

$$(h^i + f^i) \ker d_{C^\bullet}^i = h^i \ker d_{C^\bullet}^i + f^i \ker d_{C^\bullet}^i = (\ker d_{D^\bullet}^i) Z^i h^\bullet + (\ker d_{D^\bullet}^i) Z^i f^\bullet = \ker d_{D^\bullet}^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet),$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 \downarrow h^{i-1} + f^{i-1} & & \downarrow B^i(h^\bullet + f^\bullet) & & \downarrow Z^i(h^\bullet + f^\bullet) & & \downarrow h^i + f^i \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

pela unicidade, temos  $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$ . Daí,  $Z^i$  é aditivo. Analogamente,

$$\pi_{D^\bullet}^i(h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi_{D^\bullet}^i h^{i-1} + \pi_{D^\bullet}^i f^{i-1} = (B^i h^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i + (B^i f^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i = (B^i h^\bullet + B^i f^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i.$$

Logo, pela unicidade de  $B^i(h^\bullet + f^\bullet)$ , concluímos que  $B^i(h^\bullet + f^\bullet) = B^i h^\bullet + B^i f^\bullet$ . Daí,  $B^i$  é aditivo. Da unicidade do morfismo induzido entre conúcleos segue a aditividade de  $H^i$  (vide (3.2.2)) ■

**3.2.4. Lema.** *Seja  $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ . Então, para todo  $i$ , existem dois únicos morfismos  $\alpha_{C^\bullet}^i$  e  $\beta_{C^\bullet}^i$  que fazem o diagrama à direita comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é funtorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).*

**Demonstração.** Sendo  $d_{C^\bullet}^i \cdot d_{C^\bullet}^{i-1} = 0$ , obtemos  $d_{C^\bullet}^i = \beta_{C^\bullet}^i \cdot (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})$  para um único  $\beta_{C^\bullet}^i$ . De  $0 = (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(d_{C^\bullet}^{i-1}) = (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(\ker d_{C^\bullet}^i)j_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i$ , e de  $\pi_{C^\bullet}^i$  ser epi, concluímos que  $(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(\ker d_{C^\bullet}^i)j_{C^\bullet}^i = 0$ . Logo, existe um único  $\alpha_{C^\bullet}^i$  que faz o diagrama do lema comutativo. Por caça em diagrama, é fácil provar que  $\alpha_{C^\bullet}^i$  é mono e que  $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i & & \downarrow \\
 & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1} & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow h^{i-1} & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & & \downarrow H^i h^\bullet \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i & & \downarrow \text{co } d_{D^\bullet}^{i-1} \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & & \downarrow \bar{h}^i \\
 & & \downarrow \text{co } d_{D^\bullet}^{i-1} & & 
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo  $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois  $d_{C^\bullet}^{i-1}$  é epi. Utilizando as comutatividades obtidas anteriormente, constatamos que resta provar a comutatividade da face direita no diagrama acima à direita. As comutatividades das faces de cima, de baixo, frontal, do fundo e da esquerda são já conhecidas (vide a primeira parte do lema). A comutatividade da face direita segue da comutatividade das outras faces e de  $\text{co } j_{C^\bullet}^i$  ser epi ■

**3.3. Sequência longa exata.** Seja  $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$  uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de  $\delta^{i-1}$ , vemos que  $\beta_{C_1^\bullet}^i \cdot \delta^{i-1} = 0$  e  $\delta^{i-1} \cdot j_{C_3^\bullet}^{i-1} = 0$  (pois  $\pi_{C_3^\bullet}^{i-1}$  e  $p^{i-2}$  são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4,  $\alpha_{C_1^\bullet}^i = \ker \beta_{C_1^\bullet}^i$ , obtemos  $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1^\bullet}^i \cdot \Delta^{i-1}$  para algum  $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$ . Sendo  $\alpha_{C_1^\bullet}^i$  mono, concluímos que  $\Delta^{i-1} \cdot j_{C_3^\bullet}^{i-1} = 0$ . Assim, obtemos  $\delta_E^{i-1} : H^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$  tal que  $\Delta^{i-1} = \delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3^\bullet}^{i-1})$  (vide o diagrama (3.3.1) abaixo à direita; note que  $\delta_E^{i-1}$  é o único morfismo que faz este diagrama comutativo).

$$(3.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & C_2^{i-2} & \xrightarrow{p^{i-2}} & C_3^{i-2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \pi_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \pi_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\ & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & & \\ & & j_{C_2}^{i-1} \downarrow & & j_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta^{i-1}} 0 \\ & & \ker d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_3}^{i-1} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_1^{i-1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i-1}} & C_2^{i-1} & \xrightarrow{p^{i-1}} & C_3^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & d_{C_3}^{i-1} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_1^i & \xrightarrow{\varepsilon^i} & C_2^i & \xrightarrow{p^i} & C_3^i \longrightarrow 0 \\ & & \text{co } d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_3}^{i-1} \downarrow \\ \delta^{i-1} & \longrightarrow & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{p}^i} & \text{Co } d_{C_3}^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \beta_{C_1}^i \downarrow & & \beta_{C_2}^i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1^{i+1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i+1}} & C_2^{i+1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet \\ \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & \Delta^{i-1} \nearrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow \\ Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} & \\ j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & & \beta_{C_1}^i \downarrow \\ B^{i-1} C_3^\bullet & & & C_1^{i+1} \end{array}$$

Mostremos que a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} H^i C_2^\bullet \\ \text{co } j_{C_1}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow & \alpha_{C_2}^i \downarrow \\ Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2}^{i-1} \\ & & j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \\ & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{B^{i-1} p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde a seqüência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-seqüência (2.22.1) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata. Com efeito,  $(B^{i-1} p^\bullet) \pi_{C_2}^{i-1} = \pi_{C_3}^{i-1} p^{i-2}$  (vide o segundo quadrado comutativo em (3.2.1)). Sendo  $B^{i-1} p^\bullet$  divisor à esquerda de um epimorfismo, ele é epi. Por caça usual em diagrama, podemos provar que a primeira linha do diagrama é exata nos termos  $H^{i-1} C_2^\bullet$ ,  $H^{i-1} C_3^\bullet$  e  $H^i C_1^\bullet$ .

Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Consideremos a categoria  $\text{Esc } \mathcal{C}$ , cujos objetos são seqüências curtas exatas de complexos  $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$ , com  $C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ , e cujos morfismos são dados por diagramas comutativos do tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 E : & 0 & \longrightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 h \downarrow & & & h_1^\bullet \downarrow & & h_2^\bullet \downarrow & & h_3^\bullet \downarrow & & \\
 E' : & 0 & \longrightarrow & C'_1 \bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C'_2 \bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C'_3 \bullet & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Obviamente, temos três funtores  $F_k : \text{Esc } \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}^* \mathcal{C}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , onde, para  $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$ , definimos  $F_k E = C_k^\bullet$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 H^i C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^i} & H^{i+1} C_1^\bullet \\
 H^i h_3^\bullet \downarrow & & \downarrow H^{i+1} h_1^\bullet \\
 H^i C'_3 \bullet & \xrightarrow{\delta_{E'}^i} & H^{i+1} C'_1 \bullet
 \end{array} & & \begin{array}{ccccc}
 & & \text{Co } d_{C_1^\bullet}^i & \xleftarrow{\alpha_{C_1^\bullet}^{i+1}} & H^{i+1} C_1^\bullet \\
 Z^i C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^i} & \downarrow \bar{h}_1^i & \text{co } j_{C_3^\bullet}^i & \downarrow \delta_E^i & H^{i+1} h_1^\bullet \\
 & & \text{Co } d_{C_1^\bullet}^i & \xleftarrow{\alpha_{C_1^\bullet}^{i+1}} & H^{i+1} C_1^\bullet \\
 Z^i h_3^\bullet \downarrow & & \downarrow H^i h_3^\bullet & & \downarrow \delta_{E'}^i & \\
 Z^i C'_3 \bullet & \xrightarrow{\delta'^i} & \text{Co } d_{C_1^\bullet}^i & \xleftarrow{\alpha_{C_1^\bullet}^{i+1}} & H^{i+1} C'_1 \bullet \\
 & & \text{co } j_{C_3^\bullet}^i & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Vamos mostrar que o  $\delta^i$  obtido acima define uma transformação natural  $\delta^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$ . Isto é, para todo morfismo  $h : E \rightarrow E'$  em  $\text{Esc } \mathcal{C}$ , como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde  $\bar{h}_1^i$  é induzido por  $h_1^\bullet$  e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo  $\text{co } j_{C_3^\bullet}^i$  epi e sendo  $\alpha_{C_1^\bullet}^{i+1}$  mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

**3.4. Homotopias.** No exemplo introdutório 3.1, vimos como uma homotopia de funções contínuas entre espaços topológicos se transformou para uma homotopia entre os complexos  $S_\bullet$  de simplexes singulares.

**3.4.1. Definição.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana e sejam  $C^\bullet, D^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$  complexos. Dizemos que morfismos  $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  são *homotópicos* se existe uma coleção de morfismos  $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$  em  $\mathcal{C}$ , chamada *homotopia* (os morfismos  $h^i$ 's não precisam comutar com  $d$ ), tais que  $f^i - g^i = d_D^{i-1} h^i + h^{i+1} d_C^i$  para todo  $i$ . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices:  $f - g = dh + hd$  (os índices se sabem). O diagrama à direita ilustra o conceito.

$$\begin{array}{ccc}
 & C^i & \longrightarrow & C^{i+1} \\
 & \swarrow h^i & \downarrow d_C^i & \searrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{f^i - g^i} & D^i & \\
 & \downarrow d_D^{i-1} & & 
 \end{array}$$

Denotamos  $f^\bullet \sim g^\bullet$  se  $f^\bullet$  e  $g^\bullet$  forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$  um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

**3.4.2. Lema.** Se  $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  são homotópicos, então  $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$  para todo  $i$ .

**Demonstração.** Pela aditividade de  $H^i$  podemos supor que  $g = 0$ . Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo). Pela hipótese,  $f^i = h^{i+1} d_C^i + d_D^{i-1} h^i$ . Logo,  $f^i(\ker d_C^i) = h^{i+1} d_C^i(\ker d_C^i) + d_D^{i-1} h^i(\ker d_C^i) = d_D^{i-1} h^i(\ker d_C^i) = (\ker d_D^i) j_D^i \pi_D^i h^i(\ker d_C^i)$ . Sendo  $Z^i f^\bullet$  o único morfismo que faz a comutatividade  $f^i(\ker d_C^i) = (\ker d_D^i)(Z^i f^\bullet)$ , concluímos que  $Z^i f^\bullet = j_D^i \pi_D^i h^i(\ker d_C^i)$ . Obtemos o diagrama comutativo abaixo à direita, onde  $\varphi = \pi_D^i h^i(\ker d_C^i)$ . Agora,  $(H^i f^\bullet)(\text{co } j_C^i) = (\text{co } j_D^i) j_D^i \varphi = 0$ . Sendo  $\text{co } j_C^i$  epi,  $H^i f^\bullet = 0$  ■

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
\text{B}^i C^\bullet \xrightarrow{j_C^i} \text{Z}^i C^\bullet \\
\pi_C^i \uparrow \quad \downarrow \ker d_C^i \\
C^{i-1} \xrightarrow{d_C^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_C^i} C^{i+1} \\
f^{i-1} \downarrow \quad \swarrow h^i \quad \downarrow f^i \quad \swarrow h^{i+1} \quad \downarrow f^{i+1} \\
D^{i-1} \xrightarrow{d_D^{i-1}} D^i \xrightarrow{d_D^i} D^{i+1} \\
\pi_D^i \downarrow \quad \swarrow j_D^i \quad \uparrow \ker d_D^i \\
\text{B}^i D^\bullet \xrightarrow{j_D^i} \text{Z}^i D^\bullet
\end{array}
&
&
\begin{array}{c}
0 \rightarrow \text{B}^i C^\bullet \xrightarrow{j_C^i} \text{Z}^i C^\bullet \xrightarrow{\text{co } j_C^i} \text{H}^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
\text{B}^i f^\bullet \downarrow \quad \swarrow \varphi \quad \downarrow \text{Z}^i f^\bullet \quad \downarrow \text{H}^i f^\bullet \\
0 \rightarrow \text{B}^i D^\bullet \xrightarrow{j_D^i} \text{Z}^i D^\bullet \xrightarrow{\text{co } j_D^i} \text{H}^i D^\bullet \rightarrow 0
\end{array}
\end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria  $\text{K}^* \mathcal{C}$  cujos objetos são os de  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , isto é,  $\text{K}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$ . Claramente, obtemos o functor “canônico de quociente”  $\pi : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{K}^* \mathcal{C}$ . (Note que  $\text{K}^* \mathcal{C}$  é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por  $\text{Kom}_0^* \mathcal{C}$  a subcategoria completa de  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos. Assim, para qualquer  $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ , obtemos  $\text{B}^\bullet C^\bullet, \text{Z}^\bullet C^\bullet, \text{H}^\bullet C^\bullet \in \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$  e podemos considerar  $\text{B}^\bullet, \text{Z}^\bullet$  e  $\text{H}^\bullet$  como funtores,  $\text{B}^\bullet, \text{Z}^\bullet, \text{H}^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ .

**3.5. Teorema.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Então os funtores  $\text{B}^\bullet, \text{Z}^\bullet, \text{H}^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$  são aditivos e formam a seqüência exata  $0 \rightarrow \text{B}^\bullet \rightarrow \text{Z}^\bullet \rightarrow \text{H}^\bullet \rightarrow 0$ . O functor  $\text{H}^\bullet$  passa por  $\text{K}^* \mathcal{C}$ , isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde  $h$  é um functor aditivo e  $\text{I}$  é a inclusão.*

Seja  $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$  uma seqüência curta exata de complexos,  $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ . Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} \text{H}^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{\text{H}^{i-1} \varepsilon^\bullet} \text{H}^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{\text{H}^{i-1} p^\bullet} \text{H}^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} \text{H}^i C_1^\bullet \xrightarrow{\text{H}^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata, onde, para todo  $i$ ,  $\delta_E^i$  é uma transformação natural. Isto significa que, para qualquer morfismo  $h : E \rightarrow E'$  em  $\text{Esc} \mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
E : & 0 & \rightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \rightarrow & 0 \\
h \downarrow & & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\
E' : & 0 & \rightarrow & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet & \rightarrow & 0
\end{array}$$

o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} & \text{H}^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^{i-1} \varepsilon^\bullet} & \text{H}^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^{i-1} p^\bullet} & \text{H}^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & \text{H}^i C_1^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^i \varepsilon^\bullet} & \dots \\
& & \text{H}^{i-1} h_1 \downarrow & & \text{H}^{i-1} h_2 \downarrow & & \text{H}^{i-1} h_3 \downarrow & & \text{H}^i h_1 \downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-2}} & \text{H}^{i-1} C_1'^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^{i-1} \varepsilon'^\bullet} & \text{H}^{i-1} C_2'^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^{i-1} p'^\bullet} & \text{H}^{i-1} C_3'^\bullet & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-1}} & \text{H}^i C_1'^\bullet & \xrightarrow{\text{H}^i \varepsilon'^\bullet} & \dots
\end{array}$$

é comutativo ■

4. δ-funtores

Nesta seção as categorias são abelianas e os funtores são aditivos.

**4.1. Definição.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  categorias. Um funtor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é dito *exato à esquerda* (à direita) se, para toda sequência curta exata  $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$  em  $\mathcal{C}$ , a sequência  $0 \rightarrow Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3$  (respectivamente,  $Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3 \rightarrow 0$ ) é exata em  $\mathcal{C}'$ . Se  $F$  é exato à esquerda e à direita, dizemos que  $F$  é um *funtor exato*.

Para  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  contravariante as definições são induzidas, isto é, dizemos que  $F$  é um funtor exato à esquerda (à direita) se o funtor covariante  $F' : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}'$  é exato à esquerda (respectivamente, à direita). Em outras palavras, para toda sequência curta exata  $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$  em  $\mathcal{C}$ , a sequência induzida  $0 \rightarrow Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1$  (respectivamente,  $Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1 \rightarrow 0$ ) é exata em  $\mathcal{C}'$ .

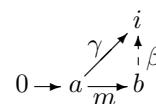
**4.2. Exemplo.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $c \in \mathcal{C}$ . Então o funtor  $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  é contravariante exato à esquerda. Realmente, seja  $0 \rightarrow c_1 \xrightarrow{h_1} c_2 \xrightarrow{h_2} c_3 \rightarrow 0$  uma sequência curta exata em  $\mathcal{C}$ . Então os morfismos

$$\mathcal{C}(h_2, c) : \mathcal{C}(c_3, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_2, c), \quad \alpha \mapsto \alpha h_2, \quad \mathcal{C}(h_1, c) : \mathcal{C}(c_2, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_1, c), \quad \beta \mapsto \beta h_1$$

induzem a sequência  $0 \rightarrow \mathcal{C}(c_3, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_2, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_1, c)$  exata em  $\mathbf{Ab}$ . Com efeito, seja  $\alpha \in \mathcal{C}(c_3, c)$  tal que  $\alpha h_2 = 0$ . Sendo  $h_2$  epi,  $\alpha = 0$ . Daí,  $\mathcal{C}(h_2, c)$  é mono. A semiexatidão no segundo termo é óbvia. Seja  $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c)$  tal que  $\beta h_1 = 0$ . Sendo  $c_3$  conúcleo de  $h_1$ , existe um único morfismo  $\alpha \in \mathcal{C}(c_3, c)$  tal que  $\alpha h_2 = \beta$ . Assim obtemos a exatidão no segundo termo.

De maneira semelhante, podemos provar que o funtor  $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  é covariante exato à esquerda.

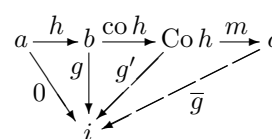
**4.3. Definição.** Dizemos que um objeto  $i \in \mathcal{C}$  é *injetivo* se o funtor  $\mathcal{C}(-, i)$  é exato. O conceito dual se chama *objeto projetivo*. Equivalentemente, um objeto  $i$  é injetivo se, para qualquer monomorfismo  $a \xrightarrow{m} b$  em  $\mathcal{C}$ , todo morfismo  $\gamma : a \rightarrow i$  se estende por  $m$  a um  $\beta : b \rightarrow i$  (não necessariamente único), tal que o diagrama à direita seja comutativo.



**4.4. Lema.** Sejam  $i_1, i_2 \in \mathcal{C}$ . Então o biproduto  $i_1 \oplus i_2$  é injetivo se e só se  $i_1$  e  $i_2$  são injetivos.

**Demonstração.** Sejam  $i_1$  e  $i_2$  injetivos e seja  $m : a \rightarrow b$  mono. Seja  $\gamma : a \rightarrow i_1 \oplus i_2$ . Então  $\pi_1 \gamma : a \rightarrow i_1$  e  $\pi_2 \gamma : a \rightarrow i_2$  se estendem por  $m$  a  $\beta_1 : b \rightarrow i_1$  e  $\beta_2 : b \rightarrow i_2$ , respectivamente. Pela propriedade do produto, obtemos  $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$  desejado (vide o diagrama à esquerda). Reciprocamente, seja  $i_1 \oplus i_2$  injetivo. Pela simetria, basta verificar que  $i_1$  é injetivo. Seja  $m : a \rightarrow b$  mono e seja  $\gamma : a \rightarrow i_1$ . Sendo  $i_1 \oplus i_2$  injetivo,  $j_1 \gamma$  se estende por  $m$  a um  $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$ . Logo,  $\pi_1 \beta m = \pi_1 j_1 \gamma = \gamma$  e, portanto,  $\gamma$  se estende por  $m$  a  $\pi_1 \beta$  (vide o diagrama à direita) ■

**4.5. Lema.** Seja  $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$  uma sequência exata e seja  $g : b \rightarrow i$  um morfismo com  $i$  injetivo tal que  $gh = 0$ . Então existe um morfismo  $\bar{g}$  tal que  $g = \bar{g}f$ .



**Demonstração.** Pela Observação 2.19 e pela propriedade de conúcleo, encontramos um morfismo  $g'$  fazendo o diagrama à esquerda comutativo, onde  $m$  é mono. Pela Definição 4.3, encontramos  $\bar{g}$  desejado ■

**4.6. Definição.** Seja  $A \in \mathcal{C}$ , seja  $I^\bullet \in \text{Kom}^+ \mathcal{C}$  com  $I^i = 0$  para todo  $i < 0$  e seja  $\varepsilon : A \rightarrow I^0$  um morfismo. Dizemos que  $I^\bullet$  é uma *resolução* de  $A$  (denotamos  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ ) se a sequência  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$  é exata. Se, além disso,  $I^i$  for injetivo para todo  $i$ , dizemos que a resolução de  $A$  é *injetiva*. (O conceito dual ao de resolução injetiva se chama *resolução projetiva* de  $A$ .)

**4.7. Lema.** Seja  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} R^\bullet$  uma resolução de  $A$  e seja  $0 \rightarrow B \xrightarrow{\eta} I^\bullet$  uma resolução injetiva de  $B$ . Então todo morfismo  $f : A \rightarrow B$  induz um morfismo entre complexos  $f^\bullet : R^\bullet \rightarrow I^\bullet$  tal que o diagrama à direita é comutativo. Mais ainda, quaisquer dois morfismos  $f^\bullet, f'^\bullet : R^\bullet \rightarrow I^\bullet$  induzidos por  $f$  são homotópicos.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & R^0 & \rightarrow & R^1 & \rightarrow & \dots \\ & & f \downarrow & & f^0 \downarrow & & f^1 \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \rightarrow & I^1 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

**Demonstração.** Construímos  $f^\bullet$  indutivamente utilizando o Lema 4.5. Partimos de  $g := \eta f$  e obtemos  $f^0 := \bar{g}$ . Para obter  $f^{n+1}$ , apliquemos o Lema 4.5 ao morfismo  $g := d_{I^\bullet}^n f^n$ .

Precisamos encontrar uma homotopia entre dois morfismos  $f^\bullet$  e  $f'^\bullet$  induzidos por  $f$ . Fazendo a diferença  $f^\bullet - f'^\bullet$ , podemos supor que  $f = 0$ . Seja  $f^\bullet : R^\bullet \rightarrow I^\bullet$  induzido por  $f = 0$ . Construímos indutivamente morfismos  $h^i : R^i \rightarrow I^{i-1}$  que fazem a homotopia  $f^\bullet \sim 0$ . Inicialmente, para  $i \leq 0$ , definimos  $h^i : R^i \rightarrow 0$  por  $h^i := 0$ .

Suponhamos que existam morfismos  $h^i : R^i \rightarrow I^{i-1}$ ,  $i \leq n$ , tais que  $f^i = h^{i+1} d_{R^\bullet}^i + d_{I^\bullet}^{i-1} h^i$  para todo  $i \leq n-1$ . Apliquemos o Lema 4.5 ao morfismo  $g := f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n$  observando que  $(f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n) d_{R^\bullet}^{n-1} = f^n d_{R^\bullet}^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-1} (f^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-2} h^{n-1}) = f^n d_{R^\bullet}^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-1} f^{n-1} = 0$ . Fazendo  $h^{n+1} := \bar{g}$ , resta observar que  $f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n = g = \bar{g} d_{R^\bullet}^n = h^{n+1} d_{R^\bullet}^n$ . ■

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{m} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \gamma \downarrow & & \alpha \downarrow & & & & \\ & & i & & r & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & x_1 & & x_3 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

**4.8. Lema.** Seja dado o diagrama à esquerda com a linha e as colunas exatas e com  $i$  injetivo. Então ele pode ser completado ao diagrama comutativo à direita com linhas e colunas exatas, onde  $j$  e  $\pi$  são a injeção e a projeção do biproduto.

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{m} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \gamma \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \alpha \downarrow & & \\ & & i & \rightarrow & i \oplus r & \rightarrow & r & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & x_1 & \rightarrow & x_2 & \rightarrow & x_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

**Demonstração.** Pela Definição 4.3, existe um  $\beta : a_2 \rightarrow i$  tal que  $\gamma = \beta m$ . Pela propriedade do produto, os morfismos  $\beta$  e  $\alpha p : a_2 \rightarrow r$  induzem o morfismo  $\varepsilon : a_2 \rightarrow i \oplus r$ . Para a projeção  $\pi' : i \oplus r \rightarrow i$ , temos  $\pi' \varepsilon m = \beta m = \gamma = \pi' j \gamma$  e  $\pi \varepsilon m = \alpha p m = 0 = \pi j \gamma$ . Pela propriedade do produto,  $\varepsilon m = j \gamma$ . Pela construção de  $\varepsilon$ , temos  $\alpha p = \pi \varepsilon$ . Fazendo  $x_2 := \text{Co } \varepsilon$  e observando que  $x_1 = \text{Co } \gamma$  e  $x_3 = \text{Co } \alpha$ , resta só aplicar o Lema 2.22 (da serpente) ■

**4.9. Observação.** No diagrama comutativo à direita a seqüência horizontal é exata se e só se as seqüências diagonais são exatas, onde os  $x^i$ 's são escolhidos para decompor as setas  $r^{i-1} \rightarrow r^i$  em  $\text{epi}$  e  $\text{mono}$ .

**Demonstração.** O fato segue da Definição 2.18 e da Observação 2.19 ■

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & x^2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ \dots & \rightarrow & r^0 & \rightarrow & r^1 & \rightarrow & r^2 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & x^0 & & x^1 & & x^3 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Isto permite pensar numa seqüência exata como sendo formada por um zig-zague de seqüências curtas exatas, como no diagrama à esquerda.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & x^2 \\ & & & & \downarrow \\ r^0 & \rightarrow & r^1 & \rightarrow & r^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & x^1 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

**Demonstração.** Para  $n \geq 0$ , definamos  $R_2^n := I_1^n \oplus R_3^n$ . Então existe uma resolução  $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$  com as componentes indicadas acima tal que o diagrama à direita é comutativo, onde os morfismos  $j^\bullet$  e  $\pi^\bullet$  são formados pelas injeções  $j^n : I_1^n \rightarrow I_1^n \oplus R_3^n$  e pelas projeções  $\pi^n : I_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$ , respectivamente.

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow & & \\ & & I_1^\bullet & \xrightarrow{j^\bullet} & R_2^\bullet & \xrightarrow{\pi^\bullet} & R_3^\bullet & \rightarrow & 0 \end{array}$$

**Demonstração.** Pela Observação 4.9, podemos decompor todo  $d_{I_1^\bullet}^{n-1}$ ,  $n > 0$ , como  $I_1^{n-1} \rightarrow X_1^n \rightarrow I_1^n$ , onde  $X_1^n = \text{Im } d_{I_1^\bullet}^{n-1} = \text{Ker } d_{I_1^\bullet}^n$ . Do mesmo modo, decomposmos todo  $d_{R_3^\bullet}^{n-1}$  como  $R_3^{n-1} \rightarrow X_3^n \rightarrow R_3^n$ ,



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow & & \\
 & & I_1^0 & & R_3^0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X_1^1 & & X_3^1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow \\
 & & I_1^0 & \xrightarrow{j^0} & R_2^0 & \xrightarrow{\pi^0} & R_3^0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & k^0 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^1 & \rightarrow & X_2^1 & \rightarrow & X_3^1 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

onde  $X_3^n = \text{Im } d_{R_3}^{n-1} = \text{Ker } d_{R_3}^n$ . Aplicando o Lema 4.8 ao diagrama acima à esquerda, obtemos o diagrama acima à direita e, em particular, um objeto  $X_2^1$  e morfismos  $\varepsilon_2 : A_2 \rightarrow R_2^0$  e  $k^0 : R_2^0 \rightarrow X_2^1$ . Agora podemos aplicar o Lema 4.8 à terceira linha do diagrama acima à direita e assim por diante ... Indutivamente, aplicando o Lema 4.8 ao diagrama abaixo à esquerda, obtemos o diagrama abaixo à direita e, em particular, um objeto  $X_2^{n+1}$  e morfismos  $l^{n-1} : X_2^n \rightarrow R_2^n$  e  $k^n : R_2^n \rightarrow X_2^{n+1}$ . Fazendo  $d_{R_2}^n := l^n k^n$ , pela Observação 4.9, obtemos a resolução desejada  $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$ . As comutatividades dos diagramas obtidos implicam que  $j^\bullet$  e  $\pi^\bullet$  são morfismos induzidos por  $m$  e  $p$ , respectivamente ■

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^n & \rightarrow & X_2^n & \rightarrow & X_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & I_1^n & & R_3^n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X_1^{n+1} & & X_3^{n+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^n & \xrightarrow{l^{n-1}} & X_2^n & \xrightarrow{\pi^n} & X_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & I_1^n & \xrightarrow{j^n} & R_2^n & \xrightarrow{\pi^n} & R_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & k^n \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^{n+1} & \rightarrow & X_2^{n+1} & \rightarrow & X_3^{n+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

**4.11. Observação.** Sejam  $A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i^\bullet$ ,  $i = 1, 2, 3$ , resoluções tais que  $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$  e suponhamos que as injeções  $u^n : R_1^n \rightarrow R_1^n \oplus R_3^n$  e as projeções  $p^n : R_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$  formem morfismos  $u^\bullet : R_1^\bullet \rightarrow R_2^\bullet$  e  $p^\bullet : R_2^\bullet \rightarrow R_3^\bullet$  de modo que o diagrama à direita seja comutativo e com as linhas exatas. Utilizando a representação matricial (2.12.1) da Observação 2.12, obtemos  $u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $p^n = \begin{bmatrix} 0 & 1_{R_3^n} \end{bmatrix}$ ,  $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{bmatrix}$  e  $d_{R_2}^n = \begin{bmatrix} d_{R_1}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3}^n \end{bmatrix}$ , onde  $\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0$ ,  $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}$ ,  $\alpha u = \varepsilon_1$ ,  $d_{R_1}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_3 p = 0$  e  $d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

**Demonstração.** As igualdades  $u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $p^n = \begin{bmatrix} 0 & 1_{R_3^n} \end{bmatrix}$  são, de fato, dadas. A comutatividade  $\varepsilon_3 p = p^0 \varepsilon_2$  significa que  $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{bmatrix}$ . A comutatividade  $\varepsilon_2 u = u^0 \varepsilon_1$  implica  $\alpha u = \varepsilon_1$ . Escrevendo  $d_{R_2}^n = \begin{bmatrix} \gamma^n & \alpha^n \\ \delta^n & \beta^n \end{bmatrix}$ , com  $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}$ ,  $\beta^n : R_3^n \rightarrow R_3^{n+1}$ ,  $\gamma^n : R_1^n \rightarrow R_1^{n+1}$  e  $\delta^n : R_1^n \rightarrow R_3^{n+1}$ , da comutatividade  $d_{R_3}^n p^n = p^{n+1} d_{R_2}^n$  concluímos que  $\delta^n = 0$  e que  $\beta^n = d_{R_3}^n$ . A comutatividade  $u^{n+1} d_{R_1}^n = d_{R_2}^n u^n$  agora significa que  $\gamma^n = d_{R_1}^n$ . Finalmente, as igualdades  $d_{R_1}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_3 p = 0$  e  $d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0$  simplesmente expressam que  $d_{R_2}^0 \varepsilon_2 = 0$  e  $d_{R_2}^{n+1} d_{R_2}^n = 0$  ■

**4.12. Lema.** Sejam  $0 \rightarrow A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i^\bullet$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $0 \rightarrow B_j \xrightarrow{\eta_j} S_j^\bullet$ ,  $j = 2, 3$ , resoluções e seja  $0 \rightarrow B_1 \xrightarrow{\eta_1} I_1^\bullet$  uma resolução injetiva. Suponhamos que no diagrama abaixo as linhas em cima sejam exatas e as faces de cima, de fundos, de frente, à esquerda e à direita sejam comutativas. Suponhamos

também que  $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$  e  $S_2^n = I_1^n \oplus S_3^n$ , que os morfismos  $u^\bullet$  e  $v^\bullet$  sejam formados pelas injeções respectivas e que os morfismos  $p^\bullet$  e  $q^\bullet$  sejam formados pelas projeções respectivas. Então existe um morfismo  $f_2^\bullet : R_2^\bullet \rightarrow S_2^\bullet$  que faz todo o diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
& & \varepsilon_1 \downarrow & \searrow f_1 & \varepsilon_2 \downarrow & \searrow f_2 & \varepsilon_3 \downarrow & \searrow f_3 \\
0 & \rightarrow & R_1^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & R_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & R_3^\bullet \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\
& & 0 & \rightarrow & B_1 & \xrightarrow{v} & B_2 & \xrightarrow{q} & B_3 \rightarrow 0 \\
& & \downarrow f_1^\bullet & & \downarrow \eta_1 & \searrow f_2^\bullet & \downarrow \eta_2 & \searrow f_3^\bullet & \downarrow \eta_3 \\
& & 0 & \rightarrow & I_1^\bullet & \xrightarrow{v^\bullet} & S_2^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & S_3^\bullet \rightarrow 0
\end{array}$$

**Demonstração.** Pela Observação 4.11,  $u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v^n = \begin{bmatrix} 1_{I_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $p^n = [0 \ 1_{R_3^n}]$ ,  $q^n = [0 \ 1_{S_3^n}]$ ,  $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon_{3p} \end{bmatrix}$ ,  $\eta_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \eta_{3q} \end{bmatrix}$ ,  $d_{R_2^\bullet}^n = \begin{bmatrix} d_{R_1^\bullet}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3^\bullet}^n \end{bmatrix}$ ,  $d_{S_2^\bullet}^n = \begin{bmatrix} d_{I_1^\bullet}^n & \beta^n \\ 0 & d_{S_3^\bullet}^n \end{bmatrix}$ , onde  $\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0$ ,  $\beta : B_2 \rightarrow I_1^0$ ,  $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}$ ,  $\beta^n : S_3^n \rightarrow I_1^{n+1}$ ,  $\alpha u = \varepsilon_1$ ,  $\beta v = \eta_1$ ,  $d_{R_1^\bullet}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_{3p} = 0$ ,  $d_{I_1^\bullet}^0 \beta + \beta^0 \eta_{3q} = 0$ ,  $d_{R_1^\bullet}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n = 0$  e  $d_{I_1^\bullet}^{n+1} \beta^n + \beta^{n+1} d_{S_3^\bullet}^n = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

Vamos procurar  $f_2^\bullet$  na forma  $f_2^n := \begin{bmatrix} f_1^n & g^n \\ 0 & f_3^n \end{bmatrix}$ , onde  $g^n : R_3^n \rightarrow I_1^n$ . É imediato que  $f_2^n u^n = v^n f_1^n$  e  $f_3^n p^n = q^n f_2^n$ . Utilizando  $d_{I_1^\bullet}^n f_1^n = f_1^{n+1} d_{R_1^\bullet}^n$  e  $d_{S_3^\bullet}^n f_3^n = f_3^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n$ , vemos que as comutatividades restantes,  $\eta_2 f_2 = f_2^0 \varepsilon_2$  e  $d_{S_2^\bullet}^n f_2^n = f_2^{n+1} d_{R_2^\bullet}^n$ ,  $n \geq 0$ , têm a forma

$$\beta f_2 = f_1^0 \alpha + g^0 \varepsilon_{3p}, \quad \eta_{3q} f_2 = f_3^0 \varepsilon_{3p}, \quad d_{I_1^\bullet}^n g^n + \beta^n f_3^n = f_1^{n+1} \alpha^n + g^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n.$$

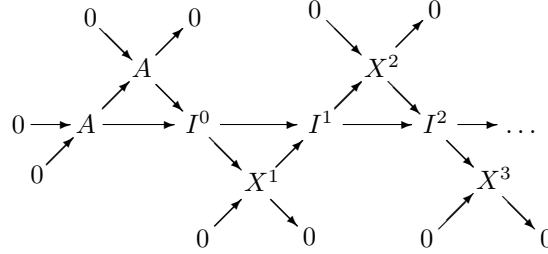
É fácil verificar a segunda igualdade. Vamos utilizar a primeira e a última para determinar os  $g^n$ 's, reescrevendo as igualdades na forma

$$g^0 \varepsilon_{3p} = \beta f_2 - f_1^0 \alpha, \quad g^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n = d_{I_1^\bullet}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n.$$

A seqüência  $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{\varepsilon_{3p}} R_3^0$  é exata, pois a seqüência  $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3$  é exata e  $\varepsilon_3$  é mono. Para  $g := \beta f_2 - f_1^0 \alpha$ , temos  $gu = \beta f_2 u - f_1^0 \alpha u = \beta v f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = \eta_1 f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = 0$ . Pelo Lema 4.5, existe um  $g^0$  tal que  $g^0 \varepsilon_{3p} = g = \beta f_2 - f_1^0 \alpha$ . A seqüência  $A_2 \xrightarrow{\varepsilon_{3p}} R_3^0 \xrightarrow{d_{R_3^\bullet}^0} R_3^1$  é exata, pois a seqüência  $A_3 \xrightarrow{\varepsilon_3} R_3^0 \xrightarrow{d_{R_3^\bullet}^0} R_3^1$  é exata e  $p$  é epi. Para  $g := d_{I_1^\bullet}^0 g^0 + \beta^0 f_3^0 - f_1^1 \alpha^0$ , temos  $g \varepsilon_{3p} = d_{I_1^\bullet}^0 g^0 \varepsilon_{3p} + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_{3p} - f_1^1 \alpha^0 \varepsilon_{3p} = d_{I_1^\bullet}^0 \beta f_2 - d_{I_1^\bullet}^0 f_1^0 \alpha + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_{3p} + f_1^1 d_{R_1^\bullet}^0 \alpha = -\beta^0 \eta_{3q} f_2 + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_{3p} = 0$ . Pelo Lema 4.5, existe um  $g^1$  tal que  $g^1 d_{R_3^\bullet}^0 = g = d_{I_1^\bullet}^0 g^0 + \beta^0 f_3^0 - f_1^1 \alpha^0$ . Vamos supor que já encontramos  $g^0, \dots, g^n$ ,  $n \geq 1$ , satisfazendo as igualdades acima. A seqüência  $R_3^{n-1} \xrightarrow{d_{R_3^\bullet}^{n-1}} R_3^n \xrightarrow{d_{R_3^\bullet}^n} R_3^{n+1}$  é exata. Para  $g := d_{I_1^\bullet}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n$ , temos  $g d_{R_3^\bullet}^{n-1} = d_{I_1^\bullet}^n (d_{I_1^\bullet}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}) + \beta^n d_{S_3^\bullet}^{n-1} f_3^{n-1} + f_1^{n+1} d_{R_1^\bullet}^n \alpha^{n-1} = 0$ , pois  $g^n d_{R_3^\bullet}^{n-1} = d_{I_1^\bullet}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}$  pela hipótese da indução. Pelo Lema 4.5, existe um  $g^{n+1} : R_3^{n+1} \rightarrow I_1^{n+1}$  tal que  $g^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n = g = d_{I_1^\bullet}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n$  ■

**4.13. Definição.** Dizemos que uma categoria  $\mathcal{C}$  tem suficientes objetos injetivos se, para todo  $A \in \mathcal{C}$ , existe um monomorfismo  $A \rightarrow I$  com  $I$  injetivo.

Neste caso, todo objeto  $A \in \mathcal{C}$  possui uma resolução injetiva. Realmente, pela hipótese, existe um  $A \rightarrow I^0$  mono com  $I^0$  injetivo. Seja  $X^1$  o conúcleo deste monomorfismo, isto é, a seqüência  $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow X^1 \rightarrow 0$  é exata. Pela hipótese, existe um  $X^1 \rightarrow I^1$  mono com  $I^1$  injetivo ... Finalmente, obtemos o diagrama comutativo abaixo, onde as setas horizontais são definidas pela composição das respectivas setas diagonais. As seqüências curtas diagonais são exatas pela construção. Pela Observação 4.9, obtemos uma resolução injetiva de  $A$ .

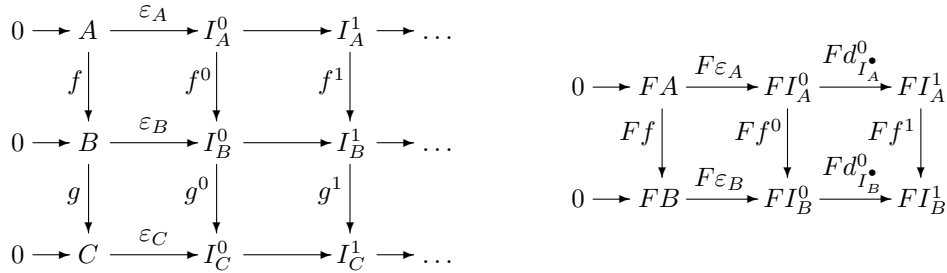


**4.14. Observação.** Sejam  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor covariante exato à esquerda e  $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \xrightarrow{f} A_3$  uma seqüência exata em  $\mathcal{C}$ . Então a seqüência  $0 \rightarrow FA_1 \rightarrow FA_2 \xrightarrow{Ff} FA_3$  é exata em  $\mathcal{C}'$ .

**Demonstração.** Temos a decomposição  $f = mp$  com as seqüências  $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \xrightarrow{p} X_3 \rightarrow 0$  e  $0 \rightarrow X_3 \xrightarrow{m} A_3$  exatas. Portanto, as seqüências  $0 \rightarrow FA_1 \rightarrow FA_2 \xrightarrow{Fp} FX_3$  e  $0 \rightarrow FX_3 \xrightarrow{Fm} FA_3$  são exatas. Agora, a exatidão em  $FA_2$  da seqüência com  $Ff$  segue da Proposição 2.21.4 ■

**4.15. Teorema.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  categorias, sendo  $\mathcal{C}$  com suficientes objetos injetivos. Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor covariante exato à esquerda. Então existem funtores aditivos  $R^n F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $n \geq 0$ , tais que  $F \simeq R^0 F$  e, para qualquer seqüência  $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$  exata em  $\mathcal{C}$ , existem morfismos  $\delta_E^n : R^n FA_3 \rightarrow R^{n+1} FA_1$  que fazem a seqüência  $\dots \rightarrow R^n FA_1 \rightarrow R^n FA_2 \rightarrow R^n FA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$  exata. Além disso, os morfismos  $\delta_E^n$  são naturais em  $E$ .

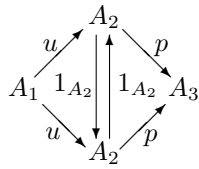
**Demonstração.** Para todo  $A \in \mathcal{C}$ , fixemos (arbitrariamente)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$ , uma resolução injetiva de  $A$ . Sendo  $F$  aditivo,  $FI_A^\bullet \in \text{Kom}^+ \mathcal{C}'$ . Definamos  $R^n FA := H^n FI_A^\bullet$ . Seja  $f : A \rightarrow B$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ . Pelo Lema 4.7, existe um morfismo induzido  $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$ , único a menos de uma homotopia. Definamos  $R^n Ff := H^n Ff^\bullet$ . Sendo  $F$  aditivo, ele preserva homotopias. Pelo Lema 3.4.2,  $H^n Ff^\bullet$  não depende da escolha de  $f^\bullet$ . Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  morfismos em  $\mathcal{C}$  e sejam  $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$  e  $g^\bullet : I_B^\bullet \rightarrow I_C^\bullet$ , respectivamente, morfismos induzidos. É fácil observar, olhando o diagrama à esquerda,



que  $g^\bullet f^\bullet$  é induzido por  $gf$ . Portanto,  $R^n F(gf) = H^n F(g^\bullet f^\bullet) = (H^n Fg^\bullet)(H^n Ff^\bullet) = (R^n Fg)(R^n Ff)$ . Claramente,  $1_{I_A^\bullet} : I_A^\bullet \rightarrow I_A^\bullet$  é induzido por  $1_A : A \rightarrow A$ . Daí,  $R^n F1 = 1$ . Assim,  $R^n F$  é um funtor. Para morfismos  $f, f' : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$  que induzem  $f^\bullet, f'^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$ , respectivamente, podemos observar que  $f^\bullet + f'^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$  é induzido por  $f + f'$ . Sendo  $F$  aditivo e sendo, pelo Lema 3.2.3,  $H^n$  aditivo, concluímos que  $R^n F(f + f') = H^n F(f^\bullet + f'^\bullet) = H^n Ff^\bullet + H^n Ff'^\bullet = R^n Ff + R^n Ff'$ . Em outras palavras,  $R^n F$  é aditivo.

Provemos que  $F \simeq R^0F$ . A seqüência  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^0 \xrightarrow{d_{I_A^0}^\bullet} I_A^1$  é exata em  $\mathcal{C}$ . Sendo  $F$  exato à esquerda (este é o único lugar onde utilizamos este fato), a seqüência  $0 \rightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon_A} FI_A^0 \xrightarrow{Fd_{I_A^0}^\bullet} FI_A^1$  é exata pela Observação 4.14. Claramente,  $B^0FI_A^\bullet = 0$ . Logo,  $\text{co}j_{FI_A^\bullet}^0 : Z^0FI_A^\bullet \rightarrow H^0FI_A^\bullet$  é um isomorfismo. Recordando que  $Z^0FI_A^\bullet = \text{Ker}Fd_{I_A^0}^\bullet$ , obtemos um isomorfismo  $i_A : FA \rightarrow H^0FI_A^\bullet = R^0FA$ . A naturalidade de  $i_\bullet$  segue da unicidade de morfismos entre núcleos: qualquer morfismo  $f : A \rightarrow B$  induz um morfismo (não único)  $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$  que, por sua vez, produz o diagrama comutativo acima à direita com linhas exatas.

Seja  $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$  uma seqüência exata em  $\mathcal{C}$ . Apliquemos o Lema 4.10, fazendo  $I_1^\bullet := I_{A_1}^\bullet$ ,  $R_3^\bullet := I_{A_3}^\bullet$ ,  $\varepsilon_i := \varepsilon_{A_i}$ ,  $i = 1, 3$ . Obtemos uma resolução  $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$ , injetiva pelo Lema 4.4, e uma seqüência exata de complexos  $0 \rightarrow I_{A_1}^\bullet \xrightarrow{j^\bullet} R_2^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} I_{A_3}^\bullet \rightarrow 0$ . Além disso, a exatidão da seqüência de complexos é uma consequência das decomposições  $R_2^\bullet = I_{A_1}^\bullet \oplus I_{A_3}^\bullet$ . Sendo  $F$  aditivo, a seqüência de complexos  $0 \rightarrow FI_{A_1}^\bullet \xrightarrow{Fj^\bullet} FR_2^\bullet \xrightarrow{F\pi^\bullet} FI_{A_3}^\bullet \rightarrow 0$  é exata. Logo, pelo Teorema 3.5, obtemos a seqüência longa exata de cohomologias  $\cdots \rightarrow R^nFA_1 \xrightarrow{H^nFj^\bullet} H^nFR_2^\bullet \xrightarrow{H^nF\pi^\bullet} R^nFA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1}FA_1 \rightarrow \cdots$ . Para definir  $\delta_E^n := \delta^n$ , é necessário verificar que  $\delta^n$  independe da escolha de  $R_2^\bullet$  (não é única a escolha de operadores de bordo em  $R_2^\bullet$ ). Seja  $S_2^\bullet$  qualquer outra resolução deste tipo. Então, utilizando o Lema 4.12 com  $B_i := A_i$ ,  $f_i := 1_{A_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $f_1^\bullet := 1$ ,  $f_3^\bullet := 1$ , aplicando ao diagrama de resoluções obtido o functor  $F$  e passando às seqüências longas de cohomologias, concluímos que  $\delta^n$  independe da escolha de  $R_2^\bullet$ .



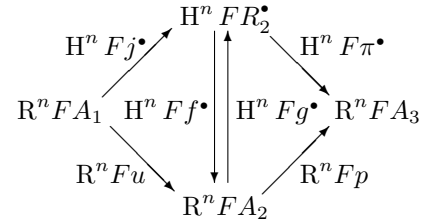
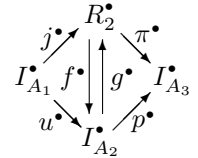
Consideremos, em  $\mathcal{C}$ , o diagrama comutativo à esquerda. Então, pelo Lema 4.7, no diagrama de resoluções injetivas à direita, temos morfismos  $j^\bullet$ ,  $\pi^\bullet$ ,  $u^\bullet$ ,  $p^\bullet$ ,  $f^\bullet$ ,  $g^\bullet$  induzidos por  $u$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $1_{A_2}$ ,  $1_{A_2}$ , respectivamente. Pelo Lema 4.7, o diagrama de resoluções é comutativo a menos de homotopias. Em particular,  $g^\bullet f^\bullet \sim 1_{R_2^\bullet}$  e  $f^\bullet g^\bullet \sim 1_{I_{A_2}^\bullet}$ . Apliquemos ao diagrama de resoluções o functor  $F$ . Sendo  $F$  aditivo, o diagrama continua sendo comutativo a menos de homotopias. Apliquemos agora o functor  $H^n$ . Pelo Lema 3.4.2, obtemos o diagrama comutativo à direita, onde  $H^nFf^\bullet$  e  $H^nFg^\bullet$  são isomorfismos (um é o inverso do outro). Assim, a seqüência longa exata

$$\cdots \rightarrow R^nFA_1 \xrightarrow{H^nFj^\bullet} H^nFR_2^\bullet \xrightarrow{H^nF\pi^\bullet} R^nFA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1}FA_1 \rightarrow \cdots$$

gera a seqüência longa exata  $\cdots \rightarrow R^nFA_1 \xrightarrow{R^nFu} R^nFA_2 \xrightarrow{R^nFp} R^nFA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1}FA_1 \rightarrow \cdots$

Resta mostrar que  $\delta_E^n$  é natural em  $E$ . Consideremos um morfismo de seqüências curtas exatas em  $\mathcal{C}$ , digamos, o que está apresentado pela face em cima do diagrama do Lema 4.12. Façamos  $R_1^\bullet := I_{A_1}^\bullet$ ,  $R_3^\bullet := I_{A_3}^\bullet$ ,  $I_1^\bullet := I_{B_1}^\bullet$ ,  $S_3^\bullet := I_{B_3}^\bullet$ . Pelo Lema 4.10, podemos encontrar  $R_2^\bullet$  e  $S_2^\bullet$  de modo que as condições do Lema 4.12 sejam satisfeitas. Pelos Lema 4.12 e Teorema 3.5, obtemos a naturalidade desejada ■

**4.16. Definição.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  categorias, sendo  $\mathcal{C}$  com suficientes objetos injetivos, e seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um functor covariante exato à esquerda. Os funtores  $R^nF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  construídos acima são chamados *funtores derivados à direita* de  $F$ . Seja  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um functor covariante exato à direita, sendo  $\mathcal{C}$  com suficientes objetos projetivos (isto significa que, para todo  $A \in \mathcal{C}$ , existe um epimorfismo  $P \rightarrow A$  com  $P$  projetivo). De forma análoga à que fizemos acima, podemos definir os *funtores derivados à esquerda* de  $G$ ,  $L_nGA := H^{-n}GP_A^\bullet$ , onde, para todo  $A \in \mathcal{C}$ , fixamos (arbitrariamente) uma resolução projetiva  $P_A^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_A} A \rightarrow 0$ .



**4.17. Definição.** Sejam  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  categorias. Um  $\delta$ -funtor covariante de  $\mathcal{C}$  para  $\mathcal{C}'$  é uma coleção de funtores covariantes  $F^\bullet = \{F^n : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \mid n \geq 0\}$  tal que, para toda sequência curta exata

$$E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$$

em  $\mathcal{C}$  e para todo  $n \geq 0$ , existem morfismos  $\delta_{F^\bullet, E}^n : F^n A_3 \rightarrow F^{n+1} A_1$  que satisfazem as condições seguintes:

- A sequência longa

$$\ell_{F^\bullet, E} : 0 \rightarrow F^0 A_1 \xrightarrow{F^0 m} F^0 A_2 \xrightarrow{F^0 p} F^0 A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^0} \dots \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^{n-1}} F^n A_1 \xrightarrow{F^n m} F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} \dots$$

é exata.

- Para todo morfismo  $h : E \rightarrow E'$  entre sequências curtas exatas em  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow h & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\ E' : & 0 & \longrightarrow & A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & A'_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \\ \downarrow F^n h_3 & & \downarrow F^{n+1} h_1 \\ F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E'}^n} & F^{n+1} A'_1 \end{array}$$

e para todo  $n \geq 0$ , o quadrado acima à direita é comutativo. Em outras palavras,  $\delta_{F^\bullet, E}^n$  é natural em  $E$ .

Um morfismo  $\alpha_\bullet : F^\bullet \rightarrow G^\bullet$  entre  $\delta$ -funtores é uma coleção de transformações naturais  $\alpha_\bullet = \{\alpha_\bullet^n : F^n \rightarrow G^n \mid n \geq 0\}$  tal que, para todo  $n \geq 0$  e para toda sequência curta exata  $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$  em  $\mathcal{C}$ , o quadrado à direita é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \\ \alpha_{A_3}^n \downarrow & & \alpha_{A_1}^{n+1} \downarrow \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1 \end{array}$$

**4.18. Definição.** Um  $\delta$ -funtor covariante  $F^\bullet : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é chamado *universal* se, para qualquer outro  $\delta$ -funtor covariante  $G^\bullet : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  e para qualquer transformação natural  $\alpha_\bullet : F^\bullet \rightarrow G^\bullet$ , existe um único morfismo  $\alpha_\bullet : F^\bullet \rightarrow G^\bullet$  com  $\alpha_\bullet^0 = \alpha_\bullet$ . É fácil construir uma categoria apropriada de  $\delta$ -funtores, onde este conceito tem seu sentido usual. Claramente, para qualquer  $\delta$ -funtor  $F^\bullet$ , o funtor  $F^0$  é exato à esquerda. Daí, em particular, concluímos que, para todo funtor  $F$  exato à esquerda, existe (a menos de um isomorfismo) no máximo um  $\delta$ -funtor universal  $F^\bullet$  tal que  $F^0 \simeq F$ . Se tal  $F^\bullet$  existe, os funtores  $F^n, n > 0$ , são chamados *funtores satélites à direita de  $F$* .

**4.19. Definição.** Um funtor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  é dito *apagador* se, para todo  $A \in \mathcal{C}$ , existe um  $m : A \rightarrow A'$  mono tal que  $Fm = 0$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & a'_3 & \xrightarrow{d'} & a'_1 \\ & f_3 \nearrow & \downarrow \alpha'_3 & \searrow f_1 & \downarrow \alpha'_1 \\ a_3 & \xrightarrow{d} & a_1 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_1 \\ b_3 & \xrightarrow{g_3} & b'_3 & \xrightarrow{\delta'} & b'_1 \\ \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_1 \\ b_3 & \xrightarrow{\delta} & b_1 & \xrightarrow{g_1} & 0 \end{array}$$

**4.20. Lema.** Suponhamos que, no cubo à esquerda,  $d$  seja epi e as faces esquerda, de cima, de baixo, de fundos e de frente sejam comutativas. Então a face direita também é comutativa.

Suponhamos que, no cubo à direita,  $g_1$  seja mono e as faces esquerda, direita, de cima, de baixo e de fundos sejam comutativas. Então a face frontal também é comutativa.

$$\begin{array}{ccccc} & & a'_3 & \xrightarrow{d'} & a'_1 \\ & f_3 \nearrow & \downarrow \alpha'_3 & \searrow f_1 & \downarrow \alpha'_1 \\ a_3 & \xrightarrow{d} & a_1 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_1 \\ b_3 & \xrightarrow{g_3} & b'_3 & \xrightarrow{\delta'} & b'_1 \\ \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_1 \\ b_3 & \xrightarrow{\delta} & b_1 & \xrightarrow{g_1} & 0 \end{array}$$

**Demonstração.** Basta observar que  $\alpha'_1 f_1 d = g_1 \alpha_1 d$  para o cubo esquerdo e que  $g_1 \alpha_1 d = g_1 \delta \alpha_3$  para o cubo direito, o que é imediato ■

**4.21. Teorema (Grothendieck).** Seja  $F^\bullet : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um  $\delta$ -funtor covariante. Se  $F^n$  é apagador para todo  $n > 0$ , então  $F^\bullet$  é universal.

**Demonstração.** Seja  $G^\bullet : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um  $\delta$ -funtor arbitrário e seja  $\alpha_\bullet : F^0 \rightarrow G^0$  uma transformação natural. Basta mostrar por indução sobre  $n$  que existem únicas transformações naturais  $\alpha^j : F^j \rightarrow G^j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , tais que  $\alpha^0 = \alpha_\bullet$ , e, para todo  $0 \leq i < n$  e qualquer seqüência curta exata em  $\mathcal{C}$ , o quadrado à direita é comutativo. A hipótese é óbvia para  $n = 0$ .

Seja  $A_1 \in \mathcal{C}$ . Para definir  $\alpha_{A_1}^{n+1}$ , encontramos um  $m : A_1 \rightarrow A_2$  mono tal que  $F^{n+1}m = 0$ . Fazendo  $p := \text{co } m$  e  $A_3 := \text{Co } m$ , obtemos uma seqüência curta exata  $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ . Sendo  $F^\bullet$  um  $\delta$ -funtor com  $F^{n+1}m = 0$ ,

obtemos uma seqüência exata  $F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} F^{n+1} A_1 \rightarrow 0$ . Pela hipótese de indução e por  $G^\bullet$  ser um  $\delta$ -funtor, o diagrama à direita é comutativo e com linhas exatas. Sendo  $\delta_{F^\bullet, E}^n = \text{co } F^n p$ , encontramos um único morfismo  $\alpha_{A_1, E}^{n+1} : F^{n+1} A_1 \rightarrow G^{n+1} A_1$  que faz o diagrama comutativo. Já temos a unicidade de  $\alpha_\bullet^{n+1}$ . Consideremos agora uma outra seqüência curta exata  $E' : 0 \rightarrow A'_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$  com  $m'$

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow & 0 \\ h \downarrow & & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\ E' : & 0 & \rightarrow & A'_1 & \xrightarrow{m'} & A'_2 & \xrightarrow{p'} & A'_3 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

“apagado” por  $F^{n+1}$ , isto é,  $F^{n+1}m' = 0$ . Seja  $h : E \rightarrow E'$  um morfismo (vide o diagrama acima à esquerda). Então, como acima, obtemos um morfismo  $\alpha_{A'_1, E'}^{n+1} : F^{n+1} A'_1 \rightarrow G^{n+1} A'_1$ . No cubo à direita,  $\delta_{F^\bullet, E}^n$  é epi, a face esquerda é comutativa por  $\alpha_\bullet^n$  ser transformação natural, as faces de cima e de baixo são comutativas por  $F^\bullet$  e  $G^\bullet$  serem  $\delta$ -funtores e as faces de fundos e de frente são comutativas pela construção. Aplicando o Lema 4.20 (cubo esquerdo), obtemos a comutatividade na face direita.

Utilizando o fato obtido, provemos que  $\alpha_{A_1, E}^{n+1}$  independe da escolha da seqüência  $E$ . Realmente, seja

$$\begin{array}{ccccccc} E'' : & 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m''} & A_2'' & \xrightarrow{p''} & A_3'' & \rightarrow & 0 \\ 1_{A_1} \downarrow & & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & & & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow & 0 & & \\ 1_{A_1} \uparrow & & & h_2 \uparrow & & h_3 \uparrow & & & & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m'} & A_2' & \xrightarrow{p'} & A_3' & \rightarrow & 0 & & \\ 1_{A_1} \uparrow & & & h_2 \uparrow & & h_3 \uparrow & & & & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m''} & A_2'' & \xrightarrow{p''} & A_3'' & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

De maneira semelhante, é fácil provar que  $\alpha_\bullet^{n+1}$  é natural: podemos completar qualquer morfismo  $h_1 : A_1 \rightarrow A'_1$  a um morfismo entre seqüências exatas curtas  $h : E \rightarrow E'$  com  $F^{n+1}m = 0$  e  $F^{n+1}m' = 0$ . Com efeito, tomemos primeiramente uma seqüência curta exata  $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$  com  $F^{n+1}m = 0$ . Como acima, partindo de  $A'_1 \xleftarrow{h_1} A_1 \xrightarrow{m} A_2$ , podemos fazer  $A'_1 \xrightarrow{h} A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \xleftarrow{h_1} A_2$ . Sendo  $m$  mono,  $h$  é mono pela Proposição 2.16.8. Existe um monomorfismo  $m'' : A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \rightarrow A'_2$  com  $F^{n+1}m'' = 0$ . Resta fazer  $m' := m''h$ ,  $h_2 := m''h_1$  e aplicar o fato obtido.

Finalmente, provemos que  $\alpha_{A_1}^{n+1} \delta_{F^\bullet, E}^n = \delta_{G^\bullet, E}^n \alpha_{A_3}^n$  para toda seqüência curta exata  $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ . Para isto, construímos uma seqüência curta exata  $E' : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccc} F^i A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^i} & F^{i+1} A_1 & \rightarrow & 0 \\ \alpha_{A_3}^i \downarrow & & \alpha_{A_1}^{i+1} \downarrow & & \\ G^i A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^i} & G^{i+1} A_1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc} F^n A_2 & \xrightarrow{F^n p} & F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 \\ \alpha_{A_2}^n \downarrow & & \alpha_{A_3}^n \downarrow & & \alpha_{A_1, E}^{n+1} \downarrow & & \\ G^n A_2 & \xrightarrow{G^n p} & G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc} & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E'}^n} & F^{n+1} A'_1 & \rightarrow & 0 \\ & F^n h_3 \nearrow & \downarrow \alpha_{A'_3}^n & & \nearrow F^{n+1} h_1 & & \\ F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 & & \\ \alpha_{A_3}^n \downarrow & & \downarrow \alpha_{A_1, E}^{n+1} & & \downarrow \alpha_{A'_1, E'}^{n+1} & & \\ & G^n h_3 \nearrow & G^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E'}^n} & G^{n+1} A'_1 & & \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1 & & & & \\ & & \downarrow \alpha_{A_1, E}^{n+1} & & \nearrow G^{n+1} h_1 & & \end{array}$$

de modo que  $\alpha_{A_1, E}^{n+1} = \alpha_{A_1, E'}^{n+1}$ .



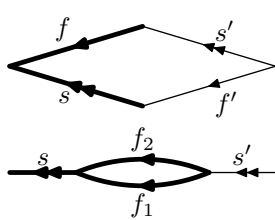
Para qualquer complexo  $C^\bullet$ , temos  $d_C^{n-1} = (\ker d_C^n)j_C^n \pi_C^n$ . (vide o início da subseção 3.2). Por definição,  $H^n C^\bullet = \text{Co} j_C^n$ . Sendo  $\pi_C^n$  epi,  $\text{Co} j_C^n \simeq \text{Co}(j_C^n \pi_C^n)$ . Assim,  $H^n C^\bullet \simeq \text{Co} h^n$ , onde  $h_C^n$  é o único morfismo tal que  $d_C^{n-1} = (\ker d_C^n)h_C^n$ . Resta observar que, para  $n > 0$ , temos a decomposição  $d_{FA}^{n-1} = (Fm^n)(Fp^{n-1})$ , onde  $Fm^n = \ker d_{FA}^n$  pela Observação 4.14 ■

### 5. Categorias derivadas

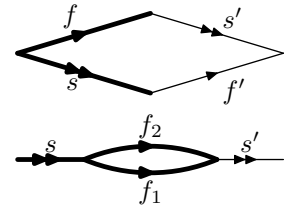
**5.1. Categoria de frações.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e seja  $S \subset \text{Mor } \mathcal{C}$  uma coleção de morfismos. Procuramos descrever explicitamente a *categoria de frações*  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ , ou seja, um funtor universal  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$  que manda todo  $s \in S$  para um isomorfismo em  $\mathcal{Q}$ . Em geral, este problema é complicado. Mas, se exigirmos algumas condições que permitam escrever qualquer coleção finita de “frações” na forma com um “denominador comum”, o problema pode ser resolvido. No que se segue, introduzimos as condições mencionadas e construímos a categoria de frações. Os resultados serão aplicados às categorias  $K^* \mathcal{C}$  e  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ .

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $S$  é fechado relativamente à composição (quando definida) e que  $1_c \in S$  para todo  $c \in \mathcal{C}$ . Para lidar com os denominadores à direita, precisamos das seguintes duas condições:

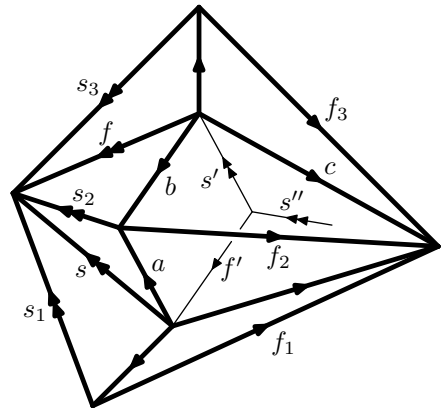
- A. Para todos  $f \in \text{Mor } \mathcal{C}$  e  $s \in S$ , existem  $f' \in \text{Mor } \mathcal{C}$  e  $s' \in S$  tais que  $fs' = sf'$ .
- B. Para todos  $f_1, f_2 \in \text{Mor } \mathcal{C}$  e  $s \in S$  tais que  $sf_1 = sf_2$ , existe  $s' \in S$  tal que  $f_1s' = f_2s'$ .



Informalmente, a condição A permite reescrever  $s^{-1}f$  na forma  $f's'^{-1}$ . Nos diagramas relacionados às categorias de frações, exibimos morfismos de  $S$  utilizando setas duplas e morfismos a ser construídos utilizando setas mais finas. Assim, os diagramas à esquerda exibem as condições A e B. Os diagramas à direita ilustram as condições A' e B', duais a A e B.

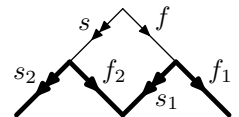


Supondo que as condições A e B são válidas, vamos construir a categoria  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Os objetos são os mesmos como em  $\mathcal{C}$ . Um morfismo  $\varphi \in \mathcal{C}[S^{-1}](c_1, c_2)$  é um par de morfismos em  $\mathcal{C}$  do tipo  $s : c \rightarrow c_1$  e  $f : c \rightarrow c_2$ , denotado por  $\varphi := fs^{-1}$  e considerado módulo a seguinte relação de equivalência. Se o primeiro diagrama à esquerda é comutativo, dizemos que  $fs^{-1}$  é equivalente a  $f_1s_1^{-1}$  e escrevemos  $f_1s_1^{-1} \sim fs^{-1}$ . A relação  $\sim$  introduzida deste modo é reflexiva, mas não é simétrica. A relação simétrica (e reflexiva)  $f_1s_1^{-1} \sim f_2s_2^{-1}$  corresponde ao segundo diagrama comutativo à esquerda.



Provemos que  $\sim$  é transitiva. A comutatividade do diagrama à direita considerado inicialmente sem setas finas significa que  $f_1s_1^{-1} \sim f_2s_2^{-1}$  e  $f_2s_2^{-1} \sim f_3s_3^{-1}$ . Pela condição A, podemos achar  $s' \in S$  e  $f'$  tais que  $fs' = sf'$ . Portanto,  $s_2(bs') = s_2(af')$ . Pela condição B, podemos encontrar  $s'' \in S$  tal que  $(bs')s'' = (af')s''$ . Denotando por  $s'$  a seta  $s's''$  e por  $f'$  a seta  $f's''$ , podemos ver que o diagrama com as setas finas é comutativo (a seta  $s''$  pode ser desconsiderada). Agora, utilizando o par de setas  $(cs')(fs')^{-1}$  (note que  $fs' \in S$ ), é fácil verificar que  $f_1s_1^{-1} \sim f_3s_3^{-1}$ .

Definimos o produto  $(f_1s_1^{-1})(f_2s_2^{-1})$  como  $(f_1f)(s_2s)^{-1}$ , onde os morfismos  $f$  e  $s \in S$  no diagrama comutativo à direita são obtidos pela condição A. Para provar que essa definição é correta, devemos verificar que o produto fica equivalente nas seguintes três circunstâncias:

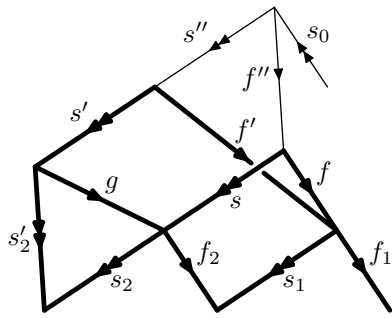
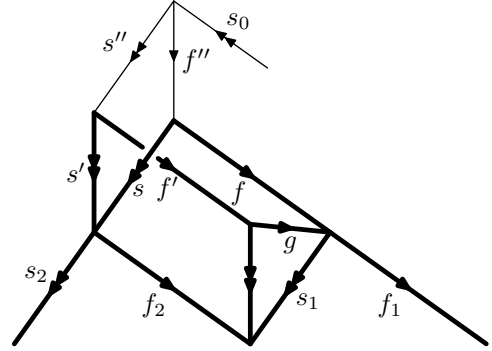




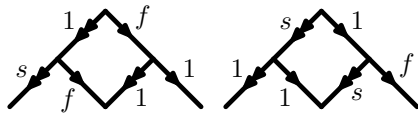
1. escolhamos outros  $f$  e  $s \in S$  quando utilizamos a condição A,
2. trocamos por equivalente o fator  $f_1 s_1^{-1}$ ,
3. trocamos por equivalente o fator  $f_2 s_2^{-1}$ .

Trocando um fator por outro equivalente, é suficiente usar a equivalência mais elementar do tipo  $f_1 s_1^{-1} \sim (f_1 g)(s_1 g)^{-1}$ , exibida no primeiro diagrama relacionado a  $\sim$ , onde  $s_1 g \in S$ .

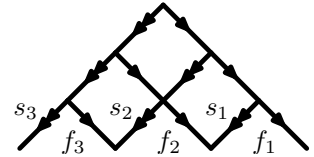
O diagrama à direita trata do caso 1 (tome  $g = 1$ ) e do caso 2. Dado este diagrama comutativo sem setas finas, construímos, pela condição A, setas  $f''$  e  $s'' \in S$  tais que  $s' s'' = s f''$ . Sendo  $s_1(f f'') = s_1(g f' s'')$ , pela condição B, construímos uma seta  $s_0 \in S$  tal que  $(f f'') s_0 = (g f' s'') s_0$ . Denotando por  $s''$  a seta  $s'' s_0$  e por  $f''$  a seta  $f'' s_0$ , obtemos o diagrama comutativo com setas finas (a seta anterior  $s_0$  está desconsiderada). Deste diagrama, é fácil ver que  $(f_1 f)(s_2 s)^{-1} \sim (f_1 g f')(s_2 s')^{-1}$ .



O diagrama à esquerda, comutativo sem setas finas, trata do caso 3. Pela condição A, construímos setas  $f''$  e  $s'' \in S$  tais que  $g s' s'' = s f''$ . Observando que  $s_1(f f'') = s_1(f' s'')$ , pela condição B, construímos uma seta  $s_0 \in S$  tal que  $(f f'') s_0 = (f' s'') s_0$ . Denotando por  $s''$  a seta  $s'' s_0$  e por  $f''$  a seta  $f'' s_0$ , obtemos o diagrama comutativo com setas finas (e com a seta  $s_0$  retirada). Agora, é fácil ver que  $(f_1 f)(s_2 s)^{-1} \sim (f_1 f')(s_2 s')^{-1}$ .

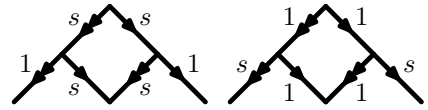
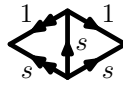


O diagrama à direita mostra que a multiplicação introduzida é associativa. Dois diagramas à esquerda mostram que os morfismos do tipo  $1_c 1_c^{-1}$  servem como unidades. Assim acabamos de



construir a categoria  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ .

O diagrama central mostra que  $ss^{-1} \sim 11^{-1}$  para todo  $s \in S$ .

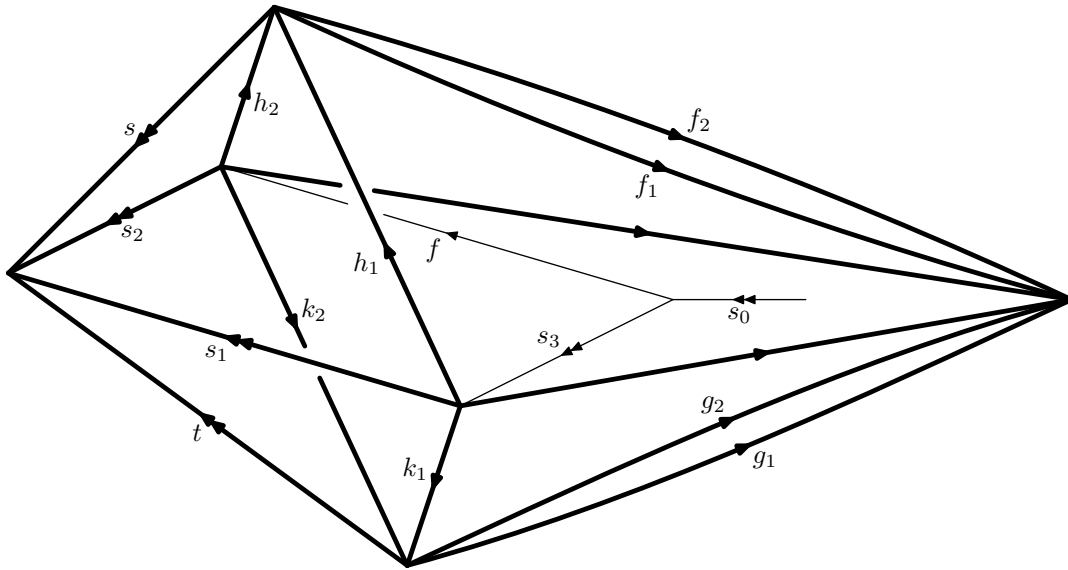


Agora dois diagramas à direita mostram que o morfismo  $1s^{-1}$  é o inverso de  $s1^{-1}$ . Definimos  $Qf := f1^{-1}$ . O diagrama à esquerda mostra que  $Q$  é um funtor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ . Já sabemos que  $Qs$  é um isomorfismo para todo  $s \in S$ .

Para concluir que a categoria  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  é a desejada, basta observar que, após aplicar qualquer funtor que manda todo  $s \in S$  para um isomorfismo, a equivalência se torna a igualdade e o produto definido acima se transforma no produto usual.

Utilizando a condição A e a definição da equivalência, é fácil ver que qualquer coleção finita de morfismos em  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  com a mesma origem pode ser escrita com um denominador comum, isto é, para quaisquer morfismos  $f_j s_j^{-1} : c \rightarrow c_j$  em  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , existem morfismos  $g_j$ 's e  $s \in S$  em  $\mathcal{C}$  tais que  $f_j s_j^{-1} = g_j s^{-1}$  em  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  para todo  $j$ .

Suponhamos que  $\mathcal{C}$  é uma **Ab**-categoria. Sejam  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}[S^{-1}](c, c')$ . Escrevemos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  com um denominador comum,  $\varphi_j = f_j s^{-1}$ ,  $s \in S$ , e definimos  $\varphi_1 + \varphi_2 := (f_1 + f_2) s^{-1}$ . Vamos verificar que essa definição independe da escolha de denominador comum. Suponhamos que  $f_j s^{-1} \sim g_j t^{-1}$  para  $t \in S$  e todo  $j = 1, 2$ . Então temos um diagrama comutativo sem setas finas, onde as setas  $f_1$  e  $g_1$  participam nas



faces frontais e as setas  $f_2$  e  $g_2$  participam nas faces de fundos. Pela condição A, encontramos setas  $f$  e  $s_3 \in S$  tais que  $s_1 s_3 = s_2 f$ . Temos  $s(h_1 s_3) = s(h_2 f)$  e  $t(k_1 s_3) = t(k_2 f)$ . Utilizando duas vezes a condição B, podemos supor que o diagrama com setas finas (e sem a seta  $s_0$ ) é essencialmente comutativo. Daí segue que  $(f_1 + f_2)s^{-1} \sim (g_1 + g_2)t^{-1}$ . Claro que, nesta situação, o funtor  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  é aditivo.

Sejam dadas uma categoria  $\mathcal{C}$  e uma coleção de morfismos  $S \subset \text{Mor } \mathcal{C}$  que satisfaz as condições A e B. Seja  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  uma subcategoria completa tal que a coleção de morfismos  $S_0 = S \cap \text{Mor } \mathcal{C}_0$  também satisfaz as condições A e B. Adicionalmente, suponhamos que vale a condição

**C.** Para todo morfismo  $s : c \rightarrow c_0$  em  $S$  com  $c_0 \in \mathcal{C}_0$ , existe um morfismo  $g : c'_0 \rightarrow c$  em  $\mathcal{C}$  com  $c'_0 \in \mathcal{C}_0$  tal que  $sg \in S$ .

O diagrama à esquerda exibe a condição C. O diagrama à direita trata da condição C', dual a C. Nesta situação, obtemos um funtor  $I : \mathcal{C}_0[S_0^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  no diagrama comutativo abaixo à esquerda pela universalidade de  $\mathcal{C}_0[S_0^{-1}]$ .

Provaremos que  $I$  é uma equivalência com sua imagem, ou seja, que a categoria  $\mathcal{C}_0[S_0^{-1}]$  é de fato uma subcategoria completa em  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Pelo Critério 1.8, basta mostrar que, para quaisquer  $c_0, c'_0 \in \mathcal{C}_0$ , a função  $I : \mathcal{C}_0[S_0^{-1}](c_0, c'_0) \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}](c_0, c'_0)$  é bijetora. Pela condição C, para todo morfismo  $fs^{-1} \in \mathcal{C}[S^{-1}](c_0, c'_0)$ , onde  $s : c \rightarrow c_0$  pertence a  $S$ , podemos encontrar um morfismo  $g : c'_0 \rightarrow c$  em  $\mathcal{C}$  com  $c'_0 \in \mathcal{C}_0$  tal que  $sg \in S_0$ . Logo,  $fs^{-1} \sim (fg)(sg)^{-1}$ . Concluímos que  $I$  é sobrejetivo no nível de morfismos. Sejam dados morfismos  $f'_0 s'_0{}^{-1}, f''_0 s''_0{}^{-1} \in \mathcal{C}_0[S_0^{-1}](c_0, c'_0)$  equivalentes em  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ,  $f'_0 s'_0{}^{-1} \sim f''_0 s''_0{}^{-1}$ . Isto significa que o diagrama acima à direita sem seta fina é comutativo. Pela condição C, encontramos uma seta  $g \in \text{Mor } \mathcal{C}$  tal que  $sg \in S_0$ . O resto segue do diagrama ■

**5.2. Cone e cilindro.** Agora estudaremos em detalhes as categorias  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  e  $K^* \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria abeliana. Definamos o funtor de *shift* por  $n \in \mathbb{Z}$ . Seja  $K^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ . Façamos  $K[n]^i := K^{n+i}$  e  $d_{K[n]}^i := (-1)^n d_{K^\bullet}^{n+i}$ . Para um morfismo  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , façamos  $f[n]^i := f^{n+i}$ . É imediato que  $[n]$  é um funtor e que morfismos homotópicos  $f^\bullet \sim g^\bullet$  geram morfismos homotópicos  $f[n]^\bullet \sim g[n]^\bullet$ .

**5.2.1. Observação.** Pela convenção presente logo após a Definição 2.17,  $\text{Ker}(-h) = \text{Ker } h$ ,  $\text{ker}(-h) = \text{ker } h$ ,  $\text{Co}(-h) = \text{Co } h$ ,  $\text{co}(-h) = \text{co } h$  e  $\text{Im}(-h) = \text{Im } h$  para todo morfismo  $h$  em  $\mathcal{C}$ . Daí segue

(vide o Lema 3.2.4 e as definições dos funtores  $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet$  e das correspondentes transformações naturais  $j_{K^\bullet}, \alpha_{K^\bullet}, \beta_{K^\bullet}$ ) que  $B^i K[n]^\bullet = B^{n+i} K^\bullet, Z^i K[n]^\bullet = Z^{n+i} K^\bullet, H^i K[n]^\bullet = H^{n+i} K^\bullet, \text{Co } d_{K[n]^\bullet}^i = \text{Co } d_{K^\bullet}^{n+i}, j_{K[n]^\bullet}^i = (-1)^n j_{K^\bullet}^{n+i}, \alpha_{K[n]^\bullet}^i = \alpha_{K^\bullet}^{n+i}, \beta_{K[n]^\bullet}^i = (-1)^n \beta_{K^\bullet}^{n+i}$ , o morfismo  $K[n]^{i-1} \rightarrow B^i K[n]^\bullet$  coincide com o morfismo  $K^{n+i-1} \rightarrow B^{n+i} K^\bullet$ ; o morfismo  $Z^i K[n]^\bullet \rightarrow H^i K[n]^\bullet$  coincide com o morfismo  $Z^{n+i} K^\bullet \rightarrow H^{n+i} K^\bullet$  e o morfismo  $K[n]^i \rightarrow \text{Co } d_{K[n]^\bullet}^{i-1}$  coincide com o morfismo  $K^{n+i} \rightarrow \text{Co } d_{K^\bullet}^{n+i-1}$ . ■

A qualquer morfismo  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  associamos o cone  $Cf^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$  de  $f^\bullet$  e o cilindro  $\text{Cyl } f^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$  de  $f^\bullet$ :

$$Cf^\bullet := \begin{array}{c} K[1]^\bullet \\ \oplus \\ L^i \end{array}, \quad d_{Cf^\bullet}^\bullet := \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix}, \quad \text{Cyl } f^\bullet := \begin{array}{c} K^i \\ \oplus \\ Cf^\bullet \\ \oplus \\ L^i \end{array}, \quad d_{\text{Cyl } f^\bullet}^\bullet := \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix}.$$

O fato que  $Cf^\bullet, \text{Cyl } f^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$  segue de  $f[1]^{i+1} d_{K[1]^\bullet}^i + d_{L^\bullet}^{i+1} f[1]^i = -f^{i+2} d_{K^\bullet}^{i+1} + d_{L^\bullet}^{i+1} f^{i+1} = 0$  e de  $-d_{K^\bullet}^{i+1} - d_{K[1]^\bullet}^i = 0$ . É fácil ver que as setas nas linhas do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & K[1]^\bullet & \xleftarrow{\delta_{f^\bullet}^\bullet := [1 \ 0]} & Cf^\bullet & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & L^\bullet & \leftarrow & 0 \\ & & & & \downarrow 1_{Cf^\bullet} & & \downarrow \alpha_{f^\bullet}^\bullet := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ & & 0 & \leftarrow & Cf^\bullet & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & \text{Cyl } f^\bullet & \leftarrow & K^\bullet & \leftarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \beta_{f^\bullet}^\bullet := [f^\bullet \ 0 \ 1] & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow 1_{K^\bullet} \\ & & & & & & L^\bullet & \xleftarrow{f^\bullet} & K^\bullet \end{array}$$

chamado C-Cyl-diagrama, são morfismos de complexos. Obviamente, estas linhas são exatas. As setas  $\alpha_{f^\bullet}^\bullet$  e  $\beta_{f^\bullet}^\bullet$  no diagrama comutativo também são morfismos de complexos, pois

$$[f^\bullet \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = [f^\bullet d_{K^\bullet}^\bullet, -f[1]^\bullet + f[1]^\bullet d_{L^\bullet}^\bullet] = d_{L^\bullet}^\bullet [f^\bullet \ 0 \ 1].$$

O cone e o cilindro são funtores e o C-Cyl-diagrama é functorial em  $f$ . Realmente, seja  $m := (k^\bullet, l^\bullet)$  um morfismo entre as setas  $f_1^\bullet : K_1^\bullet \rightarrow L_1^\bullet$  e  $f_2^\bullet : K_2^\bullet \rightarrow L_2^\bullet$ . Definamos  $Cm := \begin{bmatrix} k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & l^\bullet \end{bmatrix}$  e  $\text{Cyl } m := \begin{bmatrix} k^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & 0 & l^\bullet \end{bmatrix}$ . Os fatos seguem por uma verificação direta.

Obviamente,  $\beta_{f^\bullet}^\bullet \alpha_{f^\bullet}^\bullet = 1_{L^\bullet}$ . Para a homotopia  $h^\bullet$  dada por  $h^\bullet := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , temos

$$1_{\text{Cyl } f^\bullet} + d_{\text{Cyl } f^\bullet}^\bullet h^\bullet + h^\bullet d_{\text{Cyl } f^\bullet}^\bullet = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -d_{K^\bullet}^\bullet & 0 & 0 \\ f^\bullet & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_{f^\bullet}^\bullet \beta_{f^\bullet}^\bullet.$$

Vamos verificar que o morfismo composto  $Cf^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet \xrightarrow{f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$  é homotópico a 0 com a homotopia  $h_1$  de  $Cf^\bullet$  para  $L[1]^\bullet$  dada por  $h_1^\bullet = [0 \ 1]$ . Realmente,  $d_{L[1]^\bullet}^\bullet h_1^\bullet + h_1^\bullet d_{Cf^\bullet}^\bullet = [f[1]^\bullet - d_{L[1]^\bullet}^\bullet + d_{L[1]^\bullet}^\bullet] = [f[1]^\bullet \ 0]$  é igual ao morfismo composto em questão.

Resumindo, chegamos ao

**5.2.2. Lema.**  $C$  e  $\text{Cyl}$  são funtores. O  $C$ - $\text{Cyl}$ -diagrama é comutativo, functorial em  $f^\bullet$  e com linhas exatas. Além disso,  $\beta_{f^\bullet}^\bullet \alpha_{f^\bullet}^\bullet = 1_{L^\bullet}$ ,  $\alpha_{f^\bullet}^\bullet \beta_{f^\bullet}^\bullet \sim 1_{\text{Cyl} f^\bullet}$  e a composta  $C f^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet \xrightarrow{f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$  é homotópica a 0 ■

Seja  $h^\bullet : f^\bullet \rightarrow g^\bullet$  uma homotopia entre os morfismos  $f^\bullet, g^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ , isto é,  $f^\bullet = g^\bullet + d_{L^\bullet}^\bullet h^\bullet + h^\bullet d_{K^\bullet}^\bullet$ . Definamos  $Ch^\bullet := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{bmatrix}$  e  $\text{Cyl} h^\bullet := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix}$ .

**5.2.3. Lema.** Sejam  $f^\bullet, g^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  morfismos e seja  $h^\bullet : f^\bullet \rightarrow g^\bullet$  uma homotopia. Então  $Ch^\bullet$  e  $\text{Cyl} h^\bullet$  são morfismos e os diagramas

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow K[1]^\bullet \leftarrow C f^\bullet \leftarrow L^\bullet \leftarrow 0 & & 0 \leftarrow C f^\bullet \leftarrow \text{Cyl} f^\bullet \leftarrow K^\bullet \leftarrow 0 \\ 1_{K[1]^\bullet} \downarrow & Ch^\bullet \downarrow & 1_{L^\bullet} \downarrow & & Ch^\bullet \downarrow & \text{Cyl} h^\bullet \downarrow & 1_{K^\bullet} \downarrow \\ 0 \leftarrow K[1]^\bullet \leftarrow C g^\bullet \leftarrow L^\bullet \leftarrow 0 & & 0 \leftarrow C g^\bullet \leftarrow \text{Cyl} g^\bullet \leftarrow K^\bullet \leftarrow 0 \end{array}$$

são comutativos.

**Demonstração.** De  $d_{K[1]^\bullet}^\bullet = -d_{K^\bullet}^\bullet$  segue a igualdade  $g[1]^\bullet + d_{L^\bullet}^\bullet h^\bullet = h^\bullet d_{K[1]^\bullet}^\bullet + f[1]^\bullet$ . Portanto,

$$\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ g[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ g[1]^\bullet + d_{L^\bullet}^\bullet h^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ h^\bullet d_{K[1]^\bullet}^\bullet + f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & g[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & g[1]^\bullet + d_{L^\bullet}^\bullet h^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & h^\bullet d_{K[1]^\bullet}^\bullet + f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^\bullet & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix}.$$

Além disso,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix}$  ■

**5.2.4. Lema.** Seja  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  um morfismo. Então o morfismo  $H^i C f^\bullet \rightarrow H^{i+1} K^\bullet$  induzido pela seqüência curta exata  $0 \rightarrow K^\bullet \rightarrow \text{Cyl} f^\bullet \rightarrow C f^\bullet \rightarrow 0$  coincide com  $-H^i \delta_{f^\bullet}^\bullet : H^i C f^\bullet \rightarrow H^i K[1]^\bullet$ .

**Demonstração.** Por (3.3.1), o morfismo  $H^i C f^\bullet \rightarrow H^{i+1} K^\bullet$  é o único morfismo que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^i C f^\bullet & \longrightarrow & H^{i+1} K^\bullet \\ \uparrow & & \downarrow \alpha_{K^\bullet}^{i+1} \\ Z^i C f^\bullet & \xrightarrow{\delta} & \text{Co} d_{K^\bullet}^i \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & & & Z^i C f^\bullet \\ & & & & \downarrow \ker d_{C f^\bullet}^i \\ 0 & \longrightarrow & K^i & \longrightarrow & \text{Cyl} f^i \xleftarrow{\gamma} C f^i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_{K^\bullet}^i & & \downarrow d_{\text{Cyl} f^\bullet}^i & \downarrow d_{C f^\bullet}^i \\ 0 & \longrightarrow & K^{i+1} & \xleftarrow{[1 \ 0 \ 0]} & \text{Cyl} f^{i+1} \longrightarrow C f^{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{co} d_{K^\bullet}^i & & \\ & & \text{Co} d_{K^\bullet}^i & & \end{array}$$

à esquerda comutativo, onde o morfismo  $\delta$  do Lema 2.22 (da serpente) é dado pela regra (2.22.2). Utilizando o diagrama acima à direita, onde as setas pontilhadas são respectivamente a injeção  $\gamma := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e a projeção  $[1 \ 0 \ 0]$  dos biprodutos, podemos calcular

$$\delta = \text{co} d_{K^\bullet}^i \cdot [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^i & -1 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^i & 0 \\ 0 & g[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ker d_{C f^\bullet}^i = \text{co} d_{K^\bullet}^i \cdot [-1 \ 0] \ker d_{C f^\bullet}^i = \text{co} d_{K^\bullet}^i \cdot (-\delta_{f^\bullet}^\bullet) \ker d_{C f^\bullet}^i.$$

Portanto, pela Observação 5.2.1, o morfismo  $H^i C f^\bullet \rightarrow H^{i+1} K^\bullet = H^i K[1]^\bullet$  em questão é o único no dia-

$$\begin{array}{ccc}
 H^i C f^\bullet & \rightarrow & H^i K[1]^\bullet \\
 \uparrow & & \downarrow \alpha_{K[1]}^i \\
 Z^i C f^\bullet & & \text{Co } d_{K[1]}^{i-1} \\
 \ker d_{C f^\bullet}^i \downarrow & & \uparrow \text{co } d_{K[1]}^{i-1} \\
 C f^i & \xrightarrow{-\delta_{f^\bullet}^i} & K[1]^i
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & Z^i K[1]^\bullet & \xrightarrow{\quad} & H^i K[1]^\bullet & \\
 & \uparrow Z^i(-\delta_{f^\bullet}^i) & & \uparrow H^i(-\delta_{f^\bullet}^i) & \\
 & \ker d_{K[1]}^i & & & \downarrow \alpha_{K[1]}^i \\
 Z^i C f^\bullet & \xrightarrow{\quad} & H^i C f^\bullet & & \\
 \downarrow \ker d_{C f^\bullet}^i & & \downarrow \text{co } d_{K[1]}^{i-1} & & \\
 & K[1]^i & \xrightarrow{\quad} & \text{Co } d_{K[1]}^{i-1} & \\
 & \uparrow -\delta_{f^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C f^\bullet}^i & \\
 C f^i & \xrightarrow{\quad} & \text{Co } d_{C f^\bullet}^{i-1} & & \\
 & \text{co } d_{C f^\bullet}^{i-1} & & & 
 \end{array}$$

grama comutativo à esquerda que, por sua vez, faz parte do diagrama comutativo à direita. Este último expressa uma parte da naturalidade do diagrama do Lema 3.2.4 em relação ao morfismo  $-\delta_{f^\bullet}^i$ . ■

**5.3. Triângulos em  $K^* \mathcal{C}$ .** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Do ponto de vista cohomológico, o conceito de sequência curta exata em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  não parece muito adequado (em  $K^* \mathcal{C}$  este não faz muito sentido). Por exemplo, os morfismos  $\delta_E^i$  na sequência longa exata são definidos de maneira sofisticada, o que dificulta o cálculo de cohomologias e de morfismos entre si. Um outro defeito é que não podemos incluir um morfismo arbitrário entre complexos numa sequência curta exata. Um conceito mais simétrico, e portanto mais adequado, é o de triângulo.

**5.3.1. Definição.** Um morfismo  $f^\bullet$  na categoria  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  ou  $K^* \mathcal{C}$  se chama *quase isomorfismo* se  $H^i f^\bullet$  é isomorfismo para todo  $i$ .

**5.3.2. Definição.** Seja  $\mathcal{K}$  uma categoria munida de um automorfismo  $[1] : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ . Um diagrama do tipo

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$$

se chama *triângulo* em  $\mathcal{K}$ . O diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] \\
 \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow k[1] \\
 K_1 & \xrightarrow{f_1} & L_1 & \xrightarrow{g_1} & M_1 & \xrightarrow{h_1} & K_1[1]
 \end{array}$$

descreve um *morfismo* entre triângulos. Claro que este é um isomorfismo se e só se  $k, l, m$  são isomorfismos.

**5.3.3. Definição.** Pela Observação 5.2.1, a cada triângulo  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$  na categoria  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  ou  $K^* \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria abeliana, podemos associar a  $H^\bullet$ -sequência

$$\dots \xrightarrow{H^{i-1} h^\bullet} H^i K^\bullet \xrightarrow{H^i f^\bullet} H^i L^\bullet \xrightarrow{H^i g^\bullet} H^i M^\bullet \xrightarrow{H^i h^\bullet} H^{i+1} K^\bullet \xrightarrow{H^{i+1} f^\bullet} H^{i+1} L^\bullet \xrightarrow{H^{i+1} g^\bullet} \dots$$

Claro que todo morfismo entre triângulos induz um morfismo entre as correspondentes  $H^\bullet$ -sequências. Qualquer triângulo em  $K^* \mathcal{C}$  isomorfo ao triângulo  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \rightarrow C f^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$  é dito *distinguido*.

**5.3.4. Observação.** Pelo Lema 5.2.2, qualquer triângulo distinguido em  $K^* \mathcal{C}$  é isomorfo em  $K^* \mathcal{C}$  ao triângulo do tipo  $K^\bullet \rightarrow \text{Cyl } f^\bullet \rightarrow C f^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$ , distinguido em  $K^* \mathcal{C}$ , pois o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \xrightarrow{\quad} & C f^\bullet & \rightarrow & K[1]^\bullet \\
 1_{K^\bullet} \downarrow & & \beta_{f^\bullet} \uparrow \left( \begin{array}{c} \text{K}^* \\ \downarrow \end{array} \right) \alpha_{f^\bullet} & & \downarrow 1_{C f^\bullet} & & \downarrow 1_{K[1]^\bullet} \\
 K^\bullet & \rightarrow & \text{Cyl } f^\bullet & \rightarrow & C f^\bullet & \rightarrow & K[1]^\bullet
 \end{array}$$

é comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , com a única exceção em que  $\alpha_{f^\bullet}, \beta_{f^\bullet}$  é apenas homotópico a 1. Assim, a  $H^\bullet$ -seqüência de um triângulo distinguido em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  ou  $K^* \mathcal{C}$  é exata pelos Lemas 5.2.2 e 5.2.4. Em particular,  $f^\bullet$  é um quase isomorfismo se e só se  $C f^\bullet$  é acíclico, isto é, se  $H^\bullet C f^\bullet = 0$  ■

**5.3.5. Observação.** Seja  $0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \rightarrow 0$  uma seqüência exata em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ . Então no

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^\bullet & \longrightarrow & \text{Cyl } f^\bullet & \longrightarrow & C f^\bullet \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{K^\bullet} & & \downarrow \beta_{f^\bullet} & & \downarrow [0 \ g^\bullet] \\ 0 & \rightarrow & K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & M^\bullet \rightarrow 0 \end{array}$$

diagrama comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , as setas verticais são quase isomorfismos.

**Demonstração.** Temos  $[0 \ g^\bullet] d_{C f^\bullet}^\bullet = [0 \ g^\bullet] \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ f_{[1]^\bullet}^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} = [0 \ g^\bullet d_{L^\bullet}^\bullet] = d_{M^\bullet}^\bullet [0 \ g^\bullet]$ , pois  $g^\bullet f^\bullet = 0$ . Logo,  $[0 \ g^\bullet]$  é um morfismo. Pelo Lema 5.2.2 e devido a  $g^\bullet \beta_{f^\bullet}^\bullet = g^\bullet [f^\bullet \ 0 \ 1] = [0 \ g^\bullet] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , o diagrama é comutativo, com linhas exatas e  $1_{K^\bullet}, \beta_{f^\bullet}^\bullet$  são quase isomorfismos. Pelo Corolário 2.25 (5-lema),  $[0 \ g^\bullet]$  é um quase isomorfismo ■

**5.4. Categoria derivada.** Dada uma categoria abeliana  $\mathcal{C}$ , a categoria derivada  $D^* \mathcal{C}$  é a categoria de frações  $\text{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$ , onde  $S$  é a coleção de todos os quase isomorfismos em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ . Já que o funtor  $Q : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$  manda morfismos homotópicos para iguais (vide o Lema 5.4.2),  $D^* \mathcal{C}$  coincide com a categoria de frações  $K^* \mathcal{C}[S^{-1}]$ . Essa última pode ser construída pela subseção 5.1.

**5.4.1. Proposição.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. A coleção de todos os quase isomorfismos em  $K^* \mathcal{C}$  satisfaz as condições A, A', B e B'. A condição C vale para as subcategorias completas  $K^- \mathcal{C} \subset K \mathcal{C}$  e  $K^b \mathcal{C} \subset K^+ \mathcal{C}$ . A condição C' vale para as subcategorias completas  $K^+ \mathcal{C} \subset K \mathcal{C}$  e  $K^b \mathcal{C} \subset K^- \mathcal{C}$ .

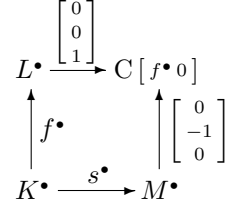
**Demonstração. A.** Seja  $s^\bullet$  um quase isomorfismo no diagrama  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} M^\bullet$ . Temos  $\begin{bmatrix} 0 \\ f^\bullet \end{bmatrix}$ , o morfismo composto  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} C s^\bullet$ . Pela Observação 5.3.4, a  $H^\bullet$ -seqüência do triângulo distinguido  $K^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ f^\bullet \end{bmatrix}} C s^\bullet \rightarrow C \begin{bmatrix} 0 \\ f^\bullet \end{bmatrix} \xrightarrow{[1 \ 0 \ 0]} K[1]^\bullet$  é exata e  $H^\bullet C s^\bullet = 0$ . Logo,  $[1 \ 0 \ 0]$  é um quase isomorfismo.

O operador de bordo do complexo  $C \begin{bmatrix} 0 \\ f^\bullet \end{bmatrix}$  tem a forma  $\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M[1]^\bullet} & 0 \\ f_{[1]^\bullet} & s_{[1]^\bullet} & d_{L^\bullet} \end{bmatrix}$ . Portanto,  $\begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M^\bullet} & 0 \\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet} \end{bmatrix}$  é o operador de bordo do complexo  $C \begin{bmatrix} 0 \\ f^\bullet \end{bmatrix} [-1]$ . De  $[0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M^\bullet} & 0 \\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet} \end{bmatrix} = d_{M^\bullet} [0 \ -1 \ 0]$  segue que  $[0 \ -1 \ 0]$  é um morfismo

no diagrama à esquerda. De  $[f^\bullet \ s^\bullet \ 0] = d_{L^\bullet} [0 \ 0 \ -1] + [0 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M^\bullet} & 0 \\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet} \end{bmatrix}$  segue que este diagrama é comutativo em  $K^* \mathcal{C}$ , pois  $[0 \ 0 \ -1]$  é uma homotopia.

**A'.** Seja  $s^\bullet$  um quase isomorfismo no diagrama  $L^\bullet \xleftarrow{f^\bullet} K^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} M^\bullet$ . O morfismo composto  $C s^\bullet [-1] \xrightarrow{[1 \ 0]}$   $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet$  gera o triângulo distinguido  $C s^\bullet [-1] \xrightarrow{[f^\bullet \ 0]} L^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} C [f^\bullet \ 0] \rightarrow C s^\bullet$ . Pela Observação 5.3.4,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  é um quase isomorfismo.

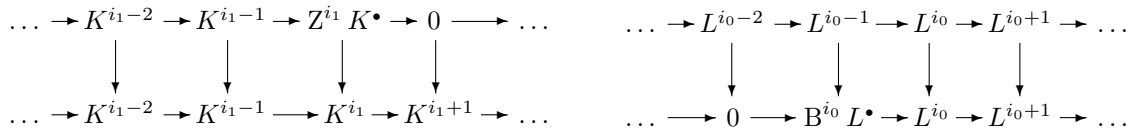
O operador de bordo do complexo  $C[f^\bullet 0]$  tem a forma  $\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_M^\bullet & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_L^\bullet \end{bmatrix}$ . Resta observar que  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  é um morfismo no diagrama à direita, comutativo em  $K^* \mathcal{C}$  por meio da homotopia  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_M^\bullet & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_L^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} d_M^\bullet$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ s[1]^\bullet \\ f[1]^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_M^\bullet & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_L^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_{K^\bullet}$ .



**B.** Seja  $s^\bullet$  um quase isomorfismo no diagrama  $M^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{f^\bullet} K^\bullet$  tal que  $s^\bullet f^\bullet = d_M^\bullet h^\bullet + h^\bullet d_{K^\bullet}$  para alguma homotopia  $h^\bullet$ . Então  $C s^\bullet[-1] \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} K^\bullet$  é um morfismo, pois  $\begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} d_{K^\bullet} = \begin{bmatrix} d_L^\bullet f^\bullet \\ d_M^\bullet h^\bullet - s^\bullet f^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_L^\bullet & 0 \\ -s^\bullet & d_{M[-1]^\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} d_L^\bullet & 0 \\ -s^\bullet & d_{M[-1]^\bullet} \end{bmatrix}$  é o operador de bordo do complexo  $C s^\bullet[-1]$ . O morfismo composto  $C s^\bullet[-1] \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} K^\bullet \leftarrow C \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} [-1]$  é homotópico a 0 pelo Lema 5.2.2. Pela Obsevação 5.3.4,  $K^\bullet \leftarrow C \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} [-1]$  é um quase isomorfismo. Resta observar que  $f^\bullet$  é o morfismo composto  $L^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} C s^\bullet[-1] \begin{bmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{bmatrix} K^\bullet$ .

**B'.** Seja  $s^\bullet$  um quase isomorfismo no diagrama  $M^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet$  tal que  $f^\bullet s^\bullet = d_L^\bullet h^\bullet + h^\bullet d_{M^\bullet}$  para alguma homotopia  $h^\bullet$ . Então  $C s^\bullet \begin{bmatrix} h^\bullet f^\bullet \end{bmatrix} L^\bullet$  é um morfismo, pois  $d_L^\bullet [h^\bullet f^\bullet] = [f^\bullet s^\bullet - h^\bullet d_{M^\bullet} \cdot f^\bullet d_{K^\bullet}] = [h^\bullet f^\bullet] \begin{bmatrix} d_{M[1]^\bullet} & 0 \\ s[1]^\bullet & d_{K^\bullet} \end{bmatrix}$ . O morfismo composto  $C s^\bullet \begin{bmatrix} h^\bullet f^\bullet \end{bmatrix} L^\bullet \rightarrow C [h^\bullet f^\bullet]$  é homotópico a 0 pelo Lema 5.2.2. Pela Obsevação 5.3.4,  $L^\bullet \rightarrow C [h^\bullet f^\bullet]$  é um quase isomorfismo. Resta observar que  $f^\bullet$  é o morfismo composto  $K^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} C s^\bullet \begin{bmatrix} h^\bullet f^\bullet \end{bmatrix} L^\bullet$ .

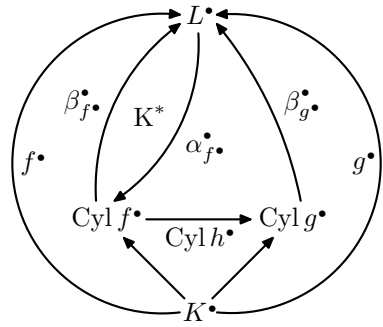
**C.** Seja  $L_0^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} K^\bullet$  um quase isomorfismo em  $K\mathcal{C}$  (ou em  $K^+ \mathcal{C}$ ) com  $L_0^\bullet \in K^- \mathcal{C}$  (ou  $L_0^\bullet \in K^b \mathcal{C}$ ). Então existe um índice  $i_1$  tal que  $L_0^i = 0$  para todo  $i > i_1$ . O quase isomorfismo  $g^\bullet : K_0^\bullet \rightarrow K^\bullet$  é dado pelo diagrama abaixo à esquerda, onde  $K_0^\bullet \in K^- \mathcal{C}$  (ou  $K_0^\bullet \in K^b \mathcal{C}$ ).



**C'.** Seja  $K_0^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} L^\bullet$  um quase isomorfismo em  $K\mathcal{C}$  (ou em  $K^- \mathcal{C}$ ) com  $K_0^\bullet \in K^+ \mathcal{C}$  (ou  $K_0^\bullet \in K^b \mathcal{C}$ ). Então existe um índice  $i_0$  tal que  $K_0^i = 0$  para todo  $i < i_0$ . O quase isomorfismo  $g^\bullet : L^\bullet \rightarrow L_0^\bullet$  é dado pelo diagrama acima à direita, onde  $L_0^\bullet \in K^+ \mathcal{C}$  (ou  $L_0^\bullet \in K^b \mathcal{C}$ ) ■

**5.4.2. Lema.** *Seja  $Q : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$  um funtor que manda todos os quase isomorfismos para isomorfismos e seja  $h^\bullet : f^\bullet \rightarrow g^\bullet$  uma homotopia. Então  $Qf^\bullet = Qg^\bullet$ .*

**Demonstração.** No diagrama à direita, temos  $\beta_g^\bullet \cdot \text{Cyl } h^\bullet \cdot \alpha_f^\bullet = [g^\bullet 0 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ . Portanto, pelos Lema 5.2.2 e 5.2.3, este diagrama é comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , com a única exceção em que  $\alpha_f^\bullet \cdot \beta_g^\bullet$  é apenas homotópico a 1. Após aplicar o funtor  $Q$ , o diagrama fica comutativo implicando o resultado ■



**5.4.3. Definição.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Denotamos por  $S$  a coleção de todos os quase isomorfismos em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ . A categoria  $\text{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$  é a *categoria derivada* de  $\mathcal{C}$ , denotada por  $D^* \mathcal{C}$ .

Do Lema 5.4.2 e da Proposição 5.4.1 segue que a categoria de frações de  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  por quase isomorfismos é uma subcategoria completa de  $D^* \mathcal{C}$ . Pela universalidade do funtor  $Q : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow D^* \mathcal{C}$ , obtemos o funtor  $H^\bullet : D^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ . A mesma universalidade induz o funtor  $[1]$ , um automorfismo da categoria  $D^* \mathcal{C}$ . Claro que  $H^i K[n]^\bullet = H^{i+n} K^\bullet$  para todo  $K^\bullet \in D^* \mathcal{C}$ .

**5.5. Funtores Ext.** Dizemos que  $K^\bullet \in D\mathcal{C}$  é um  $H^0$ -objeto se  $H^i K^\bullet = 0$  para todo  $i \neq 0$ . Para qualquer  $C \in \mathcal{C}$ , denotamos por  $C[0] \in \text{Kom}^b \mathcal{C}$  o complexo dado pela regra  $C[0]^0 := C$  e  $C[0]^i := 0$  para todo  $i \neq 0$ . Definimos o funtor  $Q[0] : \mathcal{C} \rightarrow D\mathcal{C}$  como  $C \mapsto QC[0]$ . Combinando este funtor com o funtor de shift (não importa em qual das categorias  $\text{Kom} \mathcal{C}$  ou  $D\mathcal{C}$ ), obtemos o funtor  $Q[n] : \mathcal{C} \rightarrow D\mathcal{C}$  que produz o complexo concentrado na  $(-n)$ -ésima posição. Definimos o bifuntor  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i$  como  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) := D\mathcal{C}(QC_1, QC_2[i])$  para todos  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ . O funtor de shift induz a identificação  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) = D\mathcal{C}(QC_1[n], QC_2[n+i])$ . Temos o produto biaditivo

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^j(C_2, C_3) \times \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+j}(C_1, C_3),$$

chamado *produto de Yoneda*, induzido pela composição

$$D\mathcal{C}(QC_2[n+i], QC_3[n+i+j]) \times D\mathcal{C}(QC_1[n], QC_2[n+i]) \rightarrow D\mathcal{C}(QC_1[n], QC_3[n+i+j]).$$

Note que esta definição independe da escolha de  $n$ . Daí segue que o produto de Yoneda é associativo.

Seja  $i > 0$ , sejam  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  e seja  $K^\bullet \in \text{Kom}^b \mathcal{C}$  um complexo acíclico. Suponhamos que  $K^j = 0$  para todo  $j > 1$  ou  $j < -i$  e que  $K^{-i} = C_2$  e  $K^{-1} = C_1$ . Neste caso, chamamos  $K^\bullet$  de  *$i$ -ésima extensão* de  $C_2$  por meio de  $C_1$ . Assim, uma  $i$ -ésima extensão de  $C_2$  por meio de  $C_1$  é nada mais do que uma seqüência exata

$$0 \leftarrow C_1 \leftarrow K^0 \leftarrow \dots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow C_2 \leftarrow 0$$

Definamos o complexo  $\tilde{K}^\bullet$  fazendo  $\tilde{K}^j := K^j$  para  $0 \geq j > -i$ ,  $\tilde{K}^{-i} := C_2$  e  $\tilde{K}^{-j} := 0$  para outros  $j$  com um óbvio operador de bordo. Os morfismos  $C_1 \leftarrow K^0$  e  $1_{C_2}$  definem as setas  $C_1[0] \xleftarrow{s^\bullet} \tilde{K}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} C_2[i]$ . É fácil ver que  $s^\bullet$  é um quase isomorfismo. Logo, obtemos  $y(K^\bullet) = f^\bullet s^{\bullet-1} \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2)$ .

Seja  $j > 0$  e seja  $L^\bullet \in \text{Kom}^b \mathcal{C}$  uma  $j$ -ésima extensão de  $C_3$  por meio de  $C_2$ ,

$$0 \leftarrow C_2 \leftarrow L^0 \leftarrow \dots \leftarrow L^{-j+1} \leftarrow C_3 \leftarrow 0$$

Então é fácil ver que a seqüência

$$0 \leftarrow C_1 \leftarrow K^0 \leftarrow \dots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow L^0 \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}} \dots \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j+1}} L^{-j+1} \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}} C_3 \leftarrow 0$$

onde o morfismo  $K^{-i+1} \leftarrow L^0$  é o composto  $K^{-i+1} \leftarrow C_2 \leftarrow L^0$ , é exata e, portanto, define uma  $(i+j)$ -ésima extensão de  $C_3$  por meio de  $C_1$ , denotada por  $L^\bullet \circ K^\bullet$ .

**5.5.1. Proposição.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana e sejam  $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$ . Então*

1.  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) = 0$  para todo  $i < 0$ ;
2. o funtor  $Q[0] : \mathcal{C} \rightarrow D\mathcal{C}$  é uma equivalência entre  $\mathcal{C}$  e a subcategoria completa de todos os  $H^0$ -objetos em  $D\mathcal{C}$ ; em particular,  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^0(C_1, C_2) = \mathcal{C}(C_1, C_2)$ ;
3. para todo  $i > 0$ , qualquer elemento em  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2)$  tem a forma  $y(K^\bullet)$ , onde  $K^\bullet$  é uma  $i$ -ésima extensão de  $C_2$  por meio de  $C_1$ ;
4. para  $i, j > 0$ , temos  $y(L^\bullet \circ K^\bullet) = y(L^\bullet)y(K^\bullet)$ , onde  $K^\bullet$  é uma  $i$ -ésima extensão de  $C_2$  por meio de  $C_1$ , isto é,  $y(K^\bullet) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2)$ , e  $L^\bullet$  é uma  $j$ -ésima extensão de  $C_3$  por meio de  $C_2$ , isto é,  $y(L^\bullet) \in \text{Ext}_{\mathcal{C}}^j(C_2, C_3)$ .



**Demonstração. 1.** Seja  $i < 0$  e seja  $f^\bullet s^{\bullet-1} : C_1[0] \rightarrow C_2[i]$  um morfismo em  $\mathcal{DC}$ , onde  $s^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_1[0]$  é um quase isomorfismo e  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_2[i]$  é um morfismo. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & K^{-2} & \rightarrow & K^{-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & K^{-i-2} & \rightarrow & Z^{-i-1} K^\bullet & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & K^{-2} & \rightarrow & K^{-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & K^{-i-2} & \rightarrow & K^{-i-1} & \rightarrow & K^{-i} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

define um quase isomorfismo  $s_0^\bullet : L^\bullet \rightarrow K^\bullet$  tal que  $f^\bullet s_0^\bullet = 0$ .

**2.** Utilizando o funtor  $H^0$ , é fácil ver que a função  $\mathcal{C}(C_1, C_2) \rightarrow \mathcal{DC}(QC_1[0], QC_2[0])$  é injetora. Para provar que ela é sobrejetora, tomemos qualquer morfismo  $f^\bullet s^{\bullet-1} : C_1[0] \rightarrow C_2[0]$  em  $\mathcal{DC}$ , onde  $s^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_1[0]$  é um quase isomorfismo e  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_2[0]$  é um morfismo. O diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & K^{-2} & \rightarrow & K^{-1} & \rightarrow & Z^0 K^\bullet & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & K^{-2} & \rightarrow & K^{-1} & \rightarrow & K^0 & \rightarrow & K^1 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

define um quase isomorfismo  $s_0^\bullet : L^\bullet \rightarrow K^\bullet$ . Existe um único morfismo  $g$  tal que o morfismo composto  $Z^0 K^\bullet \xrightarrow{s_0^\bullet} C_1 \xrightarrow{g} C_2$  coincide com  $Z^0 K^\bullet \xrightarrow{f_0^\bullet s_0^\bullet} C_2$ . Claramente,  $f^\bullet s^{\bullet-1} \sim (f^\bullet s_0^\bullet)(s^\bullet s_0^\bullet)^{-1} \sim Qg[0]$ .

Seja  $K^\bullet \in \mathcal{DC}$  um  $H^0$ -objeto. Então o diagrama acima define um quase isomorfismo  $L^\bullet \rightarrow K^\bullet$  e o morfismo  $Z^0 K^\bullet \rightarrow H^0 K^\bullet$  induz um quase isomorfismo  $L^\bullet \rightarrow H^0 K^\bullet[0]$ .

**3.** Seja  $i > 0$  e seja  $f^\bullet s^{\bullet-1} : C_1[0] \rightarrow C_2[i]$  um morfismo em  $\mathcal{DC}$ , onde  $s^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_1[0]$  é um quase isomorfismo e  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow C_2[i]$  é um morfismo. O diagrama acima define um quase isomorfismo  $s_0^\bullet : L^\bullet \rightarrow K^\bullet$ . Assim podemos supor que  $K^j = 0$  para todo  $j > 0$ . O diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & K^{-i-1} & \rightarrow & K^{-i} & \rightarrow & K^{-i+1} & \rightarrow & K^{-i+2} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & B^{-i+1} K^\bullet & \rightarrow & K^{-i+1} & \rightarrow & K^{-i+2} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

define um quase isomorfismo  $s_0^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ . O morfismo  $L^0 = K^0 \xrightarrow{s_0^\bullet} C_1$  define um quase isomorfismo  $s_1^\bullet : L^\bullet \rightarrow C_1[0]$  tal que  $s_1^\bullet s_0^\bullet = s^\bullet$ . De  $H^{-i} K^\bullet = 0$  segue que o morfismo  $K^{-i} \xrightarrow{f^{-i}} C_2$  se fatora por algum morfismo  $L^{-i} = B^{-i+1} K^\bullet \rightarrow C_2$ . Em outras palavras, existe um morfismo  $f_0^\bullet : L^\bullet \rightarrow C_2[i]$  tal que  $f_0^\bullet s_0^\bullet = f^\bullet$ . Assim podemos supor que  $K^j = 0$  para todo  $j < -i$  e todo  $j > 0$ .

Consideramos os morfismos de complexos  $M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{s_0^\bullet} K^\bullet$  dados pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \leftarrow & 0 & \leftarrow & K^{-i} & \leftarrow & K^{-i} & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^{-i} \\ -f^{-i} \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \\ 0 & \leftarrow & K^0 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & K^{-i+2} & \leftarrow & K^{-i+1} & \leftarrow & K^{-i} & \leftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^{-i+1} & 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} d_{K^\bullet}^{-i} & 0 \\ -f^{-i} & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ f^{-i} \end{bmatrix} & & \\ 0 & \leftarrow & K^0 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & K^{-i+2} & \leftarrow & K^{-i+1} & \leftarrow & K^{-i} & \leftarrow & 0 \end{array}$$

Definimos o morfismo  $f_1^\bullet : L^\bullet \rightarrow C_2[i]$  através do morfismo  $L^{-i} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} C_2$ . Definimos o morfismo  $s_1^\bullet : L^\bullet \rightarrow C_1[0]$  fazendo  $s_1^0 = s^0$  caso  $i > 1$  e  $s_1^0 = \begin{bmatrix} s^0 & 0 \end{bmatrix}$  caso  $i = 1$ . Uma verificação direta mostra que  $f_1^\bullet s_0^\bullet = f^\bullet$ , que  $s_1^\bullet s_0^\bullet = s^\bullet$ , que  $s_1^\bullet$  é um quase isomorfismo, que  $M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} L^\bullet$  é mono com  $M^\bullet$  acíclico, que  $f_1^\bullet g^\bullet = 0$  e que  $s_1^\bullet g^\bullet = 0$ .

Logo,  $s_0^\bullet$  é um quase isomorfismo e  $f^\bullet s^{\bullet-1} \sim f_1^\bullet s_1^{\bullet-1}$ . De  $M^\bullet$  ser acíclico segue que  $L^\bullet \xrightarrow{co\ g^\bullet} Co\ g^\bullet$  é um quase isomorfismo. Assim,  $f_2^\bullet co\ g^\bullet = f_1^\bullet$  e  $s_2^\bullet co\ g^\bullet = s_1^\bullet$  para morfismos apropriados  $Co\ g^\bullet \xrightarrow{f_2^\bullet} C_2[i]$

e  $\text{Co } g^\bullet \xrightarrow{s_2^\bullet} C_1[0]$ . Portanto,  $s_2^\bullet$  é um quase isomorfismo e  $f_1^\bullet s_1^{\bullet-1} \sim f_2^\bullet s_2^{\bullet-1}$ . Concluimos que  $f^\bullet s^{\bullet-1} \sim y(0 \leftarrow C_1 \xleftarrow{s_2^\bullet} \text{Co } g^\bullet)$ , pois  $f_2^{-i}$  é um isomorfismo, o qual podemos considerar igual a  $1_{C_2}$ .

4. Os diagramas

$$C_1[0] \xleftarrow{s_1^\bullet} \widetilde{K}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} C_2[i], \quad C_1[0] \xleftarrow{s_2^\bullet} \widetilde{L^\bullet \circ K^\bullet} \xrightarrow{f_2^\bullet} C_3[i+j], \quad C_2[i] \xleftarrow{s^\bullet} \widetilde{L}[i]^\bullet \xrightarrow{f_1^\bullet} C_3[i+j]$$

que correspondem a  $y(K^\bullet)$ ,  $y(L^\bullet \circ K^\bullet)$ ,  $y(L^\bullet)[i]$  podem ser exibidos pelos diagramas à esquerda

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow K^0 \leftarrow \dots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow K^{-i} \leftarrow 0 & & & & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow 1 & & \\ C_1 & & & & C_2 & & \\ 0 \leftarrow K^0 \leftarrow \dots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow L^0 \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}} \dots \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}} L^{-j} \leftarrow 0 & & & & & & \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ C_1 & & K^{-i} = C_2 & & C_3 & & C_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ & & 0 \leftarrow L^0 \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}} \dots \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}} L^{-j} \leftarrow 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ & & C_2 & & C_3 & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \widetilde{K}^\bullet \xleftarrow{s'^\bullet} \widetilde{L^\bullet \circ K^\bullet} \\ \downarrow f^\bullet \quad \downarrow f'^\bullet \\ C_2[i] \xleftarrow{s^\bullet} \widetilde{L}[i]^\bullet \end{array}$$

É fácil visualizar os morfismos  $s'^\bullet$  e  $f'^\bullet$  no diagrama comutativo à direita e ver que  $s_1^\bullet s'^\bullet = s_2^\bullet$  e  $f_1^\bullet f'^\bullet = f_2^\bullet$ . Daí concluimos que  $s'^\bullet$  é um quase isomorfismo ■

## 5.6. Categorias pré-trianguladas.

**5.6.1. Definição.** Seja  $\mathcal{D}$  uma **Ab**-categoria com objeto 0 munida de um automorfismo aditivo  $[1] : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  e seja dada uma família de triângulos em  $\mathcal{D}$ , chamados *distinguidos*, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Todo triângulo isomorfo a um distinguido é distinguido.
2. Para todo  $K \in \mathcal{D}$ , o triângulo  $K \xrightarrow{1_K} K \rightarrow 0 \rightarrow K[1]$  é distinguido.
3. Todo morfismo  $K \xrightarrow{f} L$  em  $\mathcal{D}$  está incluído em um triângulo distinguido  $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ .
4. O triângulo  $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$  é distinguido se e só se o triângulo  $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1] \xrightarrow{-f[1]} L[1]$  é distinguido.
5. Sejam  $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$  e  $K_1 \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \xrightarrow{h_1} K_1[1]$  triângulos distinguidos e sejam  $k, l$  dois morfismos tais que o primeiro quadrado no diagrama à direita é comutativo. Então existe um morfismo  $m$  que faz todo diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] \\ \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow k[1] \\ K_1 & \xrightarrow{f_1} & L_1 & \xrightarrow{g_1} & M_1 & \xrightarrow{h_1} & K_1[1] \end{array}$$

Neste caso, a categoria  $\mathcal{D}$  se chama *pré-triangulada*.<sup>8</sup>

**5.6.2. Proposição.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Então  $K^* \mathcal{C}$  é uma categoria pré-triangulada.*

**Demonstração. 1 e 3.** Por definição.

2. Pelo diagrama à direita, basta mostrar que  $1_{C_1 K^\bullet} \sim 0$ . O operador de bordo de  $C_1 K^\bullet$  tem a forma  $\begin{bmatrix} d_{K[1]}^\bullet & 0 \\ 1 & d_K^\bullet \end{bmatrix}$ . Para a homotopia  $h^\bullet = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , temos  $\begin{bmatrix} d_{K[1]}^\bullet & 0 \\ 1 & d_K^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{K[1]}^\bullet & 0 \\ 1 & d_K^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} K^\bullet \xrightarrow{1_{K^\bullet}} K^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K[1]^\bullet \\ \downarrow 1_{K^\bullet} & & \downarrow 1_{K^\bullet} & & \downarrow 1_{K[1]^\bullet} \\ K^\bullet \xrightarrow{1_{K^\bullet}} K^\bullet & \longrightarrow & C_1 K^\bullet & \longrightarrow & K[1]^\bullet \end{array}$$

4. No diagrama abaixo as setas  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  são morfismos, pois  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{L[1]}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & d_{K[1]}^\bullet & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d_L^\bullet \end{bmatrix} =$

<sup>8</sup>Não exigimos o axioma de octaedro, única parte faltando para definir de categoria triangulada.

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & C f^\bullet & \xrightarrow{[1 \ 0]} & K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet \\
 & & \downarrow 1_{L^\bullet} & & \downarrow 1_{C f^\bullet} & & \downarrow [0 \ 1 \ 0] \uparrow \left[ \begin{array}{c} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \\
 & & L^\bullet & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & C f^\bullet & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}} & C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\bullet \xrightarrow{[1 \ 0 \ 0]} L[1]^\bullet \\
 & & & & & & \downarrow 1_{L[1]^\bullet}
 \end{array}$$

$d_{K[1]^\bullet}^\bullet [0 \ 1 \ 0]$  e  $\begin{bmatrix} d_{L[1]^\bullet}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d_{K[1]^\bullet}^\bullet$ , onde  $\begin{bmatrix} d_{L[1]^\bullet}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix}$  é o operador de bordo de  $C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Claramente,  $[0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ . O diagrama é comutativo, com a única exceção em que o morfismo  $\begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0]$  é homotópico a 1 através de  $h^\bullet := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Realmente,

$$\begin{bmatrix} d_{L[1]^\bullet}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{L[1]^\bullet}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & d_{K[1]^\bullet}^\bullet & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d_{L^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim demonstramos que o triângulo  $L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$  é distinguido se o triângulo  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$  é distinguido.

Suponhamos que o triângulo  $L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$  é distinguido. Pelo fato que acabamos de mostrar, aplicado duas vezes, o triângulo  $K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet \xrightarrow{-g[1]^\bullet} M[1]^\bullet \xrightarrow{-h[1]^\bullet} K[2]^\bullet$  é distinguido, ou seja, temos o diagrama comutativo à esquerda, onde as setas verticais são isomorfismos. Logo, o dia-

$$\begin{array}{ccccccc}
 K[1]^\bullet & \xrightarrow{-f[1]^\bullet} & L[1]^\bullet & \xrightarrow{-g[1]^\bullet} & M[1]^\bullet & \xrightarrow{-h[1]^\bullet} & K[2]^\bullet \\
 \downarrow k[1]^\bullet & & \downarrow l[1]^\bullet & & \downarrow m[1]^\bullet & & \downarrow k[2]^\bullet \\
 K_1^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & L_1^\bullet & \longrightarrow & C f_1^\bullet & \longrightarrow & K_1[1]^\bullet
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & M^\bullet & \xrightarrow{h^\bullet} & K[1]^\bullet \\
 \downarrow k^\bullet & & \downarrow l^\bullet & & \downarrow -m^\bullet & & \downarrow k[1]^\bullet \\
 K_1[-1]^\bullet & \xrightarrow{-f_1[-1]^\bullet} & L_1[-1]^\bullet & \rightarrow & (C f_1^\bullet)[-1] & \rightarrow & K_1^\bullet
 \end{array}$$

grama à direita é comutativo e as setas verticais são isomorfismos. Resta observar que  $C(-f_1[-1]^\bullet) = (C f_1^\bullet)[-1]$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \rightarrow & C f^\bullet & \rightarrow & K[1]^\bullet \\
 \downarrow k^\bullet & & \downarrow l^\bullet & & \downarrow k[1]^\bullet & & \\
 K_1^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & L_1^\bullet & \rightarrow & C f_1^\bullet & \rightarrow & K_1[1]^\bullet
 \end{array}$$

5. Basta considerar o diagrama à esquerda com o primeiro quadrado comutativo em  $K^* \mathcal{C}$ . Os Lemas 5.2.2 e 5.2.3 implicam que o diagrama à direita é comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  com a única exceção em que um quadrado é comutativo somente em  $K^* \mathcal{C}$ , pois temos uma homotopia  $h^\bullet : l^\bullet f^\bullet \rightarrow f_1^\bullet k^\bullet$  ■

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \rightarrow & C f^\bullet & \rightarrow & K[1]^\bullet \\
 \downarrow 1_{K^\bullet} & & \downarrow l^\bullet & & \downarrow & & \downarrow 1_{K[1]^\bullet} \\
 K^\bullet & \xrightarrow{l^\bullet f^\bullet} & L_1^\bullet & \rightarrow & C(l^\bullet f^\bullet) & \rightarrow & K[1]^\bullet \\
 \downarrow 1_{K^\bullet} & & \downarrow 1_{L_1^\bullet} & & \downarrow C h^\bullet & & \downarrow 1_{K[1]^\bullet} \\
 K^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet k^\bullet} & L_1^\bullet & \rightarrow & C(f_1^\bullet k^\bullet) & \rightarrow & K[1]^\bullet \\
 \downarrow k^\bullet & & \downarrow 1_{L_1^\bullet} & & \downarrow & & \downarrow k[1]^\bullet \\
 K_1^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & L_1^\bullet & \rightarrow & C f_1^\bullet & \rightarrow & K_1[1]^\bullet
 \end{array}$$

Seja  $\mathcal{K}$  uma categoria pré-triangulada e seja  $S$  uma coleção de morfismos, fechada relativamente à composição, que satisfaz as condições A e B (ou A' e B'). Dizemos que  $S$  é *compatível* com a triangulação se são válidas as condições seguintes:

D.  $S[1] = S$ .

**E.** Suponhamos que, no diagrama do axioma 5 na Definição 5.6.1, as linhas são triângulos distinguidos e os morfismos  $k, l \in S$  fazem o primeiro quadrado comutativo. Então existe  $m \in S$  que faz todo o diagrama comutativo.

Pelas condições D e universalidade do funtor  $Q : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}[S^{-1}]$ , obtemos o automorfismo induzido  $[1] : \mathcal{K}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{K}[S^{-1}]$ . É claro que  $(fs^{-1})[1] = f[1](s[1])^{-1}$  para  $s \in S$ . Escrevendo morfismos em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  com um denominador comum, podemos ver que  $[1]$  é aditivo em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ . Um triângulo  $\Delta'$  em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  é *distinguido* se ele é isomorfo a  $Q\Delta$ , onde  $\Delta$  é um triângulo distinguido em  $\mathcal{K}$ .

Pela Proposição 5.6.2, pela Observação 5.3.4 e pelo Corolário 2.25 (5-lema), as condições D e E são válidas para  $\mathcal{K} = K^*\mathcal{C}$  e para a coleção  $S$  de todos os quase isomorfismos, onde  $\mathcal{C}$  é uma categoria abeliana.

**5.6.3. Lema.** *Seja  $\mathcal{K}$  uma categoria pré-triangulada e seja  $S$  uma coleção de morfismos compatível com a triangulação. Então  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  é uma categoria pré-triangulada.*

**Demonstração.** **1, 2 e 4.** Por definição.

**3.** Sejam  $s : K \rightarrow K_1$  e  $f : K \rightarrow K_2$  morfismos em  $\mathcal{K}$  e  $s \in S$ , isto é,  $fs^{-1} : K_1 \rightarrow K_2$  é um morfismo em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ . Existe um triângulo  $K \xrightarrow{f} K_2 \rightarrow L \xrightarrow{g} K[1]$  distinguido em  $\mathcal{K}$ . No diagrama à direita, temos o isomorfismo de triângulos em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ .

**5.** Basta considerar os triângulos  $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$  e  $K_1 \xrightarrow{f_1} K' \xrightarrow{f'} L' \xrightarrow{g'} M' \xrightarrow{h'} K'[1]$  distinguidos em  $\mathcal{K}$ . Seja dado um quadrado comutativo em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  exibido no diagrama à esquerda, onde  $s, s_0 \in S$ . Pela condição A, podemos encontrar  $s' \in S$  e  $f'$  tais que  $(fs_0)s' = sf'$ . Denotando por  $s_0$  a seta  $s_0s'$  e por  $k$  a seta  $ks'$ , obtemos o diagrama à direita com o quadrado em cima comutativo em  $\mathcal{K}$  e o quadrado abaixo comutativo em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ . Neste diagrama as setas verticais continuam a exibir os mesmos morfismos em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ .

A comutatividade em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  do quadrado abaixo significa que  $f_1ks'' = lf's''$  para algum  $s'' \in S$  apropriado. Denotando por  $s_0$  a seta  $s_0s''$ , por  $f'$  a seta  $f's''$  e por  $k$  a seta  $ks''$ , chegamos ao diagrama à direita comutativo em  $\mathcal{K}$  com as setas verticais continuando a exibir os mesmos morfismos em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$ . Incluímos o morfismo  $f'$  em um triângulo distinguido  $K' \xrightarrow{f'} L' \xrightarrow{g'} M' \xrightarrow{h'} K'[1]$ . Pela condição E e pelo axioma 5 na Definição 5.6.1, podemos encontrar  $S \ni s_1 : M' \rightarrow M$  e  $m : M' \rightarrow M_1$  que fazem o diagrama à esquerda comutativo. Assim obtemos o morfismo desejado  $ms_1^{-1}$  em  $\mathcal{K}[S^{-1}]$  ■

**5.6.4. Teorema.** *Seja  $\mathcal{D}$  uma categoria pré-triangulada, seja  $C \in \mathcal{D}$  e seja  $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$  um triângulo distinguido. Então as seqüências*

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{\mathcal{D}(C, h[i-1])} \mathcal{D}(C, K[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, f[i])} \mathcal{D}(C, L[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, g[i])} \mathcal{D}(C, M[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, h[i])} \mathcal{D}(C, K[i+1]) \dots \\ \dots & \mathcal{D}(K[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(f[i], C)} \mathcal{D}(L[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(g[i], C)} \mathcal{D}(M[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(h[i], C)} \mathcal{D}(K[i+1], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(f[i+1], C)} \dots \end{aligned}$$

são exatas.

**Demonstração.** Consideramos apenas a primeira seqüência. (A segunda pode ser tratada analogamente.) Pelo axioma 4 da Definição 5.6.1, é suficiente mostrar a exatidão em  $\mathcal{D}(C, L)$ . Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, temos o diagrama comutativo à direita. Portanto,  $gf = 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{1_K} & K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K[1] \\ & & \downarrow 1_K & & \downarrow f & & \downarrow 1_{K[1]} \\ K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} C & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C[1] & \xrightarrow{-1_{C[1]}} & C[1] \\ \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \psi[1] & & \downarrow \varphi[1] \\ L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] & \xrightarrow{-f[1]} & L[1] \end{array}$$

Seja dado um morfismo  $\varphi : C \rightarrow L$  tal que  $g\varphi = 0$ . O triângulo  $C \rightarrow 0 \rightarrow C[1] \xrightarrow{-1_{C[1]}} C[1]$  é distinguido pelos axiomas 2 e 4 da Definição 5.6.1. Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, encontramos um morfismo  $\psi : C \rightarrow K$  tal que o diagrama à esquerda é comutativo. Logo,  $f\psi = \varphi$  ■

**5.6.5. Corolário.** *Suponhamos que as linhas no diagrama comutativo à direita são triângulos distinguidos. Então  $m$  é um isomorfismo se  $k$  e  $l$  são isomorfismos. Em particular, o triângulo distinguido que inclui um morfismo dado, como no axioma 3 da Definição 5.6.1, é único a menos de isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] \\ \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow k[1] \\ K_1 & \xrightarrow{f_1} & L_1 & \xrightarrow{g_1} & M_1 & \xrightarrow{h_1} & K_1[1] \end{array}$$

**Demonstração.** Pelos Teorema 5.6.4 e Corolário 2.25 (5-lema),  $\mathcal{D}(A, m) : \mathcal{D}(A, M) \rightarrow \mathcal{D}(A, M_1)$  e  $\mathcal{D}(m, B) : \mathcal{D}(M_1, B) \rightarrow \mathcal{D}(M, B)$  são isomorfismos para quaisquer  $A, B \in \mathcal{D}$ . Fazendo  $A := M_1$  e  $B := M$ , encontramos morfismos  $\varphi : M_1 \rightarrow M$  e  $\psi : M_1 \rightarrow M$  tais que  $\mathcal{D}(M_1, m)\varphi = 1_{M_1}$  e  $\mathcal{D}(m, M)\psi = 1_M$ . Em outras palavras,  $m\varphi = 1_{M_1}$  e  $\psi m = 1_M$  ■

**5.6.6. Corolário.** *Suponhamos que as linhas no diagrama à direita são triângulos distinguidos. Para existir um morfismo entre triângulos que estende este diagrama é necessário e suficiente que  $g_1 l f = 0$ . Caso  $\mathcal{D}(K, M_1[-1]) = 0$ , tal morfismo é único.*

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & K[1] \\ & & & & \downarrow l & & \\ K_1 & \xrightarrow{f_1} & L_1 & \xrightarrow{g_1} & M_1 & \xrightarrow{h_1} & K_1[1] \end{array}$$

**Demonstração.** A necessidade segue da igualdade  $g f = 0$  mostrada na demonstração do Teorema 5.6.4.

Suponhamos que  $g_1 l f = 0$ . Pelo Teorema 5.6.4, as seqüências

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}(K, M_1[-1]) & \rightarrow & \mathcal{D}(K, K_1) & \xrightarrow{\mathcal{D}(K, f_1)} & \mathcal{D}(K, L_1) & \xrightarrow{\mathcal{D}(K, g_1)} & \mathcal{D}(K, M_1) \\ & & & & \mathcal{D}(L, M_1) & \xleftarrow{\mathcal{D}(g, M_1)} & \mathcal{D}(M, M_1) & \leftarrow & \mathcal{D}(K[1], M_1) \end{array}$$

são exatas. Utilizando a primeira, vemos que  $\mathcal{D}(K, g_1) l f = 0$  implica a existência de um  $k : K \rightarrow K_1$  tal que  $\mathcal{D}(K, f_1) k = l f$ , isto é,  $f_1 k = l f$ . Tal  $k$  é único caso  $\mathcal{D}(K, M_1[-1]) = 0$ . Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, podemos achar um morfismo  $m : M \rightarrow M_1$  que juntamente com  $k$  e  $l$  providencia um morfismo entre os triângulos. Analogamente, utilizando a segunda seqüência e  $\mathcal{D}(g, M_1) m = g_1 l$ , concluímos que  $m$  é único caso  $\mathcal{D}(K[1], M_1) = 0$  (equivalente a  $\mathcal{D}(K, M_1[-1]) = 0$ ) ■

Pelas Observações 5.3.5 e 5.3.4, qualquer seqüência exata  $0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \rightarrow 0$  em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$  se completa a um triângulo distinguido em  $D^* \mathcal{C}$  e todo triângulo distinguido em  $D^* \mathcal{C}$  é isomorfo a um destes.

**5.6.7. Corolário.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana, seja  $E : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3 \rightarrow 0$  uma seqüência exata em  $\mathcal{C}$  e seja  $C \in \mathcal{C}$ . Então temos as seqüências longas exatas*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{C,E}^{i-1}} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, C_1) & \xrightarrow{\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, f)} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, C_2) & \xrightarrow{\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, g)} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C, C_3) & \xrightarrow{\delta_{C,E}^i} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(C, C_1) & \rightarrow & \dots \\ \dots & \leftarrow & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+1}(C_3, C) & \xleftarrow{\delta_{E,C}^i} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C) & \xleftarrow{\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(f, C)} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_2, C) & \xleftarrow{\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(g, C)} & \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_3, C) & \xleftarrow{\delta_{E,C}^{i-1}} & \dots \end{array}$$

onde os homomorfismos  $\delta_{C,E}^i$  e  $\delta_{E,C}^i$  são naturais em  $E$  e  $C$ .

**Demonstração.** Pela Observação 5.3.5, qualquer seqüência  $E : 0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \rightarrow 0$ , exata em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , gera em  $D^* \mathcal{C}$  o triângulo distinguido  $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$ ; onde o morfismo  $h := [1 \ 0] [0 \ g^\bullet]^{-1}$  em  $D^* \mathcal{C}$  é dado por  $M^\bullet \xleftarrow{[0 \ g^\bullet]} C f^\bullet \xrightarrow{[1 \ 0]} K[1]^\bullet$  (pela Observação 5.3.5,  $[0 \ g^\bullet]$  é um quase

isomorfismo). Este triângulo é funtorial em  $E$ , pois um morfismo  $E \rightarrow E_1$  como no diagrama à esquerda,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & K^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & L^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet} & M^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & k^\bullet \downarrow & & l^\bullet \downarrow & & m^\bullet \downarrow \\
 0 & \rightarrow & K_1^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & L_1^\bullet & \xrightarrow{g_1^\bullet} & M_1^\bullet \rightarrow 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 M^\bullet & \xleftarrow{[0 \ g^\bullet]} & C & \xrightarrow{f^\bullet} & K[1]^\bullet \\
 \downarrow m^\bullet & & \downarrow \begin{bmatrix} k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & l^\bullet \end{bmatrix} & & \downarrow k[1]^\bullet \\
 M_1^\bullet & \xleftarrow{[0 \ g_1^\bullet]} & C & \xrightarrow{f_1^\bullet} & K_1[1]^\bullet
 \end{array}$$

comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ , gera o diagrama à direita, comutativo em  $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ . Pelo Teorema 5.6.4, para qualquer complexo  $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ , obtemos duas seqüências longas exatas (na segunda usamos o índice  $-i$  no lugar de  $i$ ). Resta pôr  $C^\bullet := C[0]$ ,  $K^\bullet := C_1[0]$ ,  $L^\bullet := C_2[0]$ ,  $M^\bullet := C_3[0]$  e denotar  $\delta_{C,E}^i := D^* \mathcal{C}(C^\bullet, h[i])$ ,  $\delta_{E,C}^i := D^* \mathcal{C}(h[-i-1], C^\bullet)$  ■