

Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan'in

ICMC, USP, São Carlos

17/08/2015 – 02/09/2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** \mathcal{C} consiste de:

- Um conjunto de **objetos** $\text{Ob } \mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra \mathcal{C} .
- Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\text{Mor } \mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\text{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \rightarrow c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.
- A **composição** (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$. (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo $\beta\alpha$.)
- As setas 1_c para todo $c \in \mathcal{C}$.

e satisfaz os seguintes axiomas:

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.

C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

1.2. Exemplos.

1. Set, a **categoria dos conjuntos** (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor), e funções entre si.

2. A **categoria de relações Rel**, que tem os mesmos objetos de **Set**. Por definição, $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ significa $R \subset A \times B$, isto é, R é uma relação. Para $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, a **composição** $S \circ R$ é definida pela regra $S \circ R := \{(a, c) \mid \exists b \in B (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$. Assim, **Rel** é **Set** com mais setas.

3. A categoria dos **espaços topológicos Esp**, com funções contínuas.

4. Seja \mathcal{C} uma categoria. Obtemos a categoria \mathcal{C}^{op} “anti-isomorfa” a \mathcal{C} , ou **dual** a \mathcal{C} , pela troca dos sentidos de setas (ou, melhor dizendo, pela troca da ordem da composição).

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \rightarrow b \iff a \leq b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X , podemos definir a categoria $\mathbf{Top} X := \mathcal{T}(X)^{\text{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \mathbf{Top} X$, a relação $U \rightarrow V$ significa simplesmente $U \supset V$. Denotemos por **1** a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por **2** a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.

6. A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**. Uma variante mais geral: os **objetos** têm a forma (E, S) , onde $E \in \mathbf{Esp}$ e $S \subset E$ é um subespaço; os **morfismos** $(E, S) \rightarrow (E', S')$ são as classes homotópicas de funções contínuas $E \xrightarrow{a} E'$ que preservam os subespaços, $aS \subset S'$, considerando apenas as homotopias que não alteram a restrição da função para o subespaço.

7. Seja X um espaço topológico. Denotemos por $\pi_1 X$ a **categoria fundamental** de X . Objetos de $\pi_1 X$ são pontos de X . As setas são as classes homotópicas de caminhos entre pontos (com extremos fixos).

8. Seja \mathcal{C} uma categoria. Denotemos por \mathcal{C}^2 a categoria das setas de \mathcal{C} . Os **objetos** de \mathcal{C}^2 são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em \mathcal{C} . Um

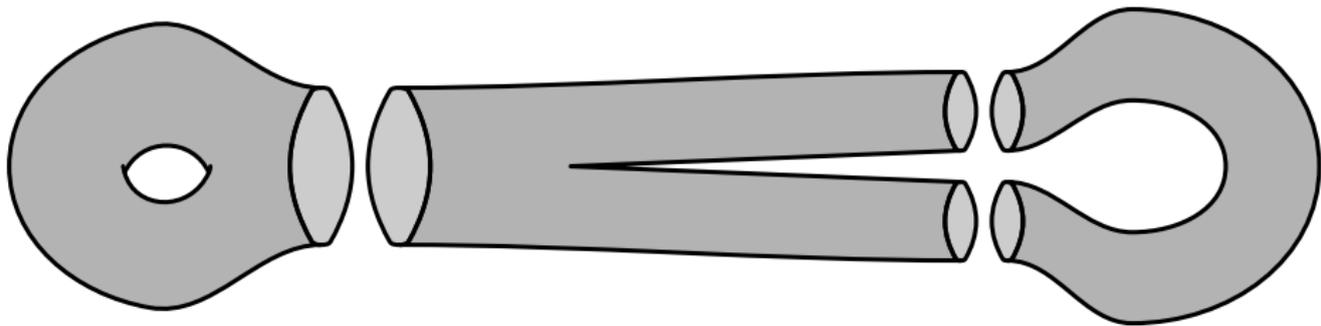
morfismo entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c'_1 \xrightarrow{\alpha'} c'_2$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c'_1$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c'_2$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} c_1 & \xrightarrow{f_1} & c'_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ c_2 & \xrightarrow{f_2} & c'_2 \end{array}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), **Lin_k** (de espaços lineares sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos), **Mod_R** (de módulos à direita sobre um anel associativo R com unidade), etc.

10. Seja A um anel. Consideremos a categoria **Matr A** das matrizes sobre A . Os **objetos** de **Matr A** são os números naturais, **Ob Matr A = \mathbb{N}** . Um **morfismo** $M : m \rightarrow n$ é simplesmente uma **$m \times n$ -matriz** com coeficientes em A (por convenção, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem uma única $0 \times n$ -matriz e uma única $n \times 0$ -matriz, ambas nulas).

11. Uma outra categoria \mathcal{C} com **Ob \mathcal{C} = \mathbb{N} : categoria das calças**. Os morfismos são as (classes de homeomorfismo de) superfícies cujas componentes do bordo são divididas nas duas partes: **início** e **fim**. No desenho abaixo, podemos encontrar 3 morfismos: $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 0$.



1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \rightarrow c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \rightarrow c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados **isomorfos**. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita **grupoide**.

Um grupoide de um só objeto é simplesmente um grupo. De fato, todo grupoide conexo (isto é, entre quaisquer dois objetos existe um caminho de setas) é feito de um **grupo** de **automorfismos** $\text{Aut } c$, o grupo de todos os isomorfismos entre c e c , e de uma (não única) árvore de setas. A categoria $\pi_1 X$ no Exemplo 1.2.7 é um grupoide. Caso X seja linearmente conexo, a categoria $\pi_1 X$ é conexa. Para $p \in X$, o grupo $\text{Aut } p$ é o **grupo fundamental** $\pi_1(X, p)$.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias \mathcal{C} e \mathcal{C}' é chamado **funtor (covariante)** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ de \mathcal{C} em \mathcal{C}' :

F1. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a **categoria de categorias**, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos ...

1.5. Definição. Os **melhores funtores** do mundo são os seguintes. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$. Então temos as funções

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c, c'),$$

para objetos e

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Set} (\mathcal{C}(c, c_1), \mathcal{C}(c, c_2)),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto ((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta \circ \alpha)),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um functor $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ covariante. As regras

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c', c),$$

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Set} (\mathcal{C}(c_2, c), \mathcal{C}(c_1, c)),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2) \mapsto ((c_2 \xrightarrow{\beta} c) \mapsto (\beta \circ \alpha))$$

definem um functor contravariante $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

1.6. Definição. Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ dois funtores. Uma coleção t_\bullet de morfismos $t_c : Fc \rightarrow Gc$, com c percorrendo \mathcal{C} , é dita **transformação natural** de F para G , e denotada por $t_\bullet : F \rightarrow G$, se, para todo morfismo $a \xrightarrow{\alpha} b$ em \mathcal{C} , o diagrama à direita é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{t_a} & Ga \\ F\alpha \downarrow & & G\alpha \downarrow \\ Fb & \xrightarrow{t_b} & Gb \end{array}$$

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \rightarrow G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc** . Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural t_\bullet é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

1.7. Definição. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias. Dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{C}' são **equivalentes** se existem dois funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tais que o funtor $G \circ F$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}}$ e o funtor $F \circ G$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}'}$.

Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ um subconjunto de objetos. Então \mathcal{E} munido de todas as setas de \mathcal{C} possíveis é uma categoria chamada de **subcategoria completa** de \mathcal{C} .

Vamos estabelecer um critério para verificar equivalência entre categorias.

1.8. Critério. *Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor. Denotemos por FC a subcategoria completa de \mathcal{C}' relacionada com a imagem $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$. Então $F : \mathcal{C} \rightarrow FC$ define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, a função $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.

Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que \mathcal{E} é um **esqueleto** de \mathcal{C} se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c . Afirmamos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
- Sejam \mathcal{E} e \mathcal{E}' categorias do tipo esqueleto. Então \mathcal{E} e \mathcal{E}' são equivalentes se e só se \mathcal{E} e \mathcal{E}' são isomorfas.
- Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}'$ categorias e seus esqueletos. Então \mathcal{C} é equivalente a \mathcal{C}' se e só se \mathcal{E} é isomorfo a \mathcal{E}' .

O Critério 1.8 é uma consequência imediata desta última afirmação.

Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor que faz \mathcal{C} e \mathcal{C}' equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em \mathcal{C}' se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em \mathcal{C} .

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\text{Matr } k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria \mathbf{lin}_k de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V , $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \rightarrow \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante. A transformação natural $\alpha_\bullet : \mathbf{1}_{\mathbf{Lin}_k} \rightarrow DD$ é dada pela regra $\alpha_V : V \rightarrow DDV$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$. No caso de \mathbf{lin}_k , esta transformação natural identifica V com DDV . **A naturalidade diz a que a identificação “não depende da escolha de base”**.

3. Existem dois funtores $c, f : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$, o **começo** e o **fim** da seta em $\mathbf{2}$. A própria seta define uma **transformação natural $c \rightarrow f$** . Para uma categoria arbitrária \mathcal{C} , a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ é isomorfa a \mathcal{C} e a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \mathcal{C})$ é isomorfa à categoria das setas $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$.

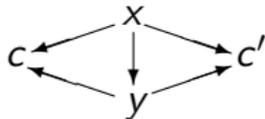
Usando os funtores c e f , obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \rightarrow f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $GL_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$ -**matrizes inversíveis** sobre A . É fácil ver que $GL_n : \mathbf{CRng} \rightarrow \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : GL_n \rightarrow GL_1$ é uma transformação natural.

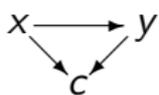
1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final (universal)** se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \rightarrow f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

1.11. Exemplos.

1. Seja \mathcal{C} uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$. Os objetos de $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ são diagramas do tipo $c \leftarrow x \rightarrow c'$, com $x \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $c \leftarrow x \rightarrow c'$ para $c \leftarrow y \rightarrow c'$ em $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ é uma seta $x \rightarrow y$ tal que o diagrama à direita seja comutativo. Um objeto final de $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ é dito **produto** de c e c' em \mathcal{C} (assim, para dizer que $x \in \mathcal{C}$ é produto de c e c' , temos que indicar as setas $c \leftarrow x \rightarrow c'$) e é denotado por $c \times c'$. O conceito dual é denominado **coproduto**, e é denotado por $c \sqcup c'$.



Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.



2. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da categoria $\mathcal{C} \rightarrow c$ de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \rightarrow c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \rightarrow c$ e $y \rightarrow c$ dois objetos de $\mathcal{C} \rightarrow c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \rightarrow y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo.

O produto de $a \rightarrow c$ e $b \rightarrow c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b , e é denotado por $a \times_c b$. Por

exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

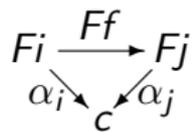
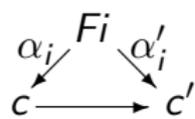
3. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$.

A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ é um **bifuntor**. Por exemplo, é fácil ver que, de fato, os melhores funtores do mundo são bifuntores do tipo $\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Podemos também dizer que o funtor $\mathcal{C}(-, -)$ é um bifuntor contravariante no primeiro argumento e covariante no segundo. Por exemplo, o Critério 1.8 trata do isomorfismo natural entre dois bifuntores $\mathcal{C}(-, -) \simeq \mathcal{C}'(F-, F-)$.

4. Seja \mathcal{C} uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \rightarrow c'$ setas em \mathcal{C} .
 Construimos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \rightarrow c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \rightarrow c$ para $y \rightarrow c$ é uma seta $x \rightarrow y$ em \mathcal{C} tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2 . O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

5. Seja \mathcal{C} uma categoria, seja \mathcal{I} uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo \mathcal{I} em \mathcal{C}). Definamos a categoria $F \rightarrow \mathcal{C}$. Um objeto de $F \rightarrow \mathcal{C}$ é um objeto $c \in \mathcal{C}$ munido de uma coleção $(\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de setas em \mathcal{C} , $\alpha_i : Fi \rightarrow c$, tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer $i \xrightarrow{f} j$ em \mathcal{I} .

Sejam $((\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}, c)$ e $((\alpha'_i)_{i \in \mathcal{I}}, c')$ dois objetos de $F \rightarrow \mathcal{C}$. Um morfismo entre si é um morfismo $c \rightarrow c'$ compatível com os α 's, isto é, tal que o diagrama à esquerda é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$. Um objeto inicial de $F \rightarrow \mathcal{C}$ é dito **limite indutivo** de F ou **limite direto** de F ou **colimite** de F , e é denotado por $\lim_{i \in \mathcal{I}} Fi$.



Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso \mathcal{I} seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso \mathcal{I} seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso \mathcal{I} seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em \mathcal{C} , mas não em \mathcal{I} ; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\lim_{i \in \mathcal{I}} F_i$.

Dois exemplos ilustrativos:

Considerando uma função monótona $f : A \rightarrow B$ entre os conjuntos parcialmente ordenados A e B como um funtor entre as correspondentes categorias, temos $\lim_{\longleftarrow a \in A} f(a) = \inf_{a \in A} f(a)$ e $\lim_{\longrightarrow a \in A} f(a) = \sup_{a \in A} f(a)$.

Denotando por ω o conjunto de todos os números naturais \mathbb{N} munido da sua ordem usual, consideramos o funtor $F : \omega^{op} \rightarrow \mathbf{CRng}$ dado por $i \mapsto \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ e $(i \rightarrow j) \mapsto (\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})$ com o óbvio homomorfismo, onde p é um número primo. Então $\mathbb{Z}_p := \lim_{\longrightarrow i \in \omega^{op}} F_i$ é o anel de números **p -ádicos**.

Podemos exibir o anel \mathbb{Z}_p como o subanel em $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas seqüências $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também **(co)produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria \mathcal{C} sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os “valores” de $a \times a'$. Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos. É fácil verificar que o produto é associativo. Mais exatamente, os funtores $(- \times -) \times -$ e $- \times (- \times -)$ são isomorfos. No mesmo sentido, o produto é comutativo.

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos ■*

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções A -bilineares** $b : M_1 \times M_2 \rightarrow X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \rightarrow X$ para $b' : M_1 \times M_2 \rightarrow X'$ é um **homomorfismo** $h : X \rightarrow X'$ de A -módulos tal que $hb = b'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **produto tensorial** e é denotado por $M_1 \otimes_A M_2$. Assim, temos uma função A -bilinear $b : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_A M_2$ que denotamos por $m_1 \otimes m_2 := b(m_1, m_2)$, chamando $m_1 \otimes m_2$ **tensor simples**. Em outras palavras, o A -módulo $M_1 \otimes_A M_2$ (junto com $m_1 \otimes m_2$) é um lugar universal para valores das funções A -bilineares de $M_1 \times M_2$: qualquer outra função A -bilinear de $M_1 \times M_2$ para algum A -módulo é a composta de \otimes com um (único) homomorfismo de A -módulos.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifunctor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M, a \otimes m \mapsto am.$
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1, m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1.$
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3),$
 $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3).$
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)),$
 $i : \varphi \mapsto (m_1 \mapsto (m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)))$ com a inversa dada por
 $j : \psi \mapsto (m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)).$
- $\mathbf{Mod}_A(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)) \simeq \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)).$

Como um exemplo, demonstramos a penúltima afirmação. Sendo a expressão $\varphi(m_1 \otimes m_2)$ trilinear em m_1, m_2, φ , a função i é bem definida e é um homomorfismo de A -módulos. A expressão $\psi(m_1)(m_2)$ é trilinear em m_1, m_2, ψ , onde $\psi \in \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$. Pela propriedade universal do produto tensorial, a regra $m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ determina

univocamente um homomorfismo de A -módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \rightarrow M_3$.
 Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um
 homomorfismo de A -módulos. Com efeito, sejam

$\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3))$ e $a \in A$. Então
 $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam
 $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e
 $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a(\psi(m_1)(m_2)) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto (m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto (m_1 \mapsto (m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2))),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos
 objetos são funções A -multilineares simétricas com d argumentos em M ,
 $p : M^d \rightarrow X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **simétrico** significa
 que $p(m_1, \dots, m_d) = p(m_{\sigma 1}, \dots, m_{\sigma d})$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ e
 qualquer permutação $\sigma : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$. Um morfismo de
 $p : M^d \rightarrow X$ para $p' : M^d \rightarrow X'$ é um homomorfismo $h : X \rightarrow X'$ de
 A -módulos tal que $hp = p'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito

d -ésima potência simétrica de M e é denotado por $\text{Sym}_A^d M$. É imediato que $\text{Sym}_A^d M$ é um funtor em M . O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \rightarrow \text{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A -módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \dots + g_n A$, o A -módulo $\text{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os “monômios comutativos” de grau d em g_1, \dots, g_n . Se g_1, \dots, g_n são geradores livres de M , o A -módulo $\text{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em g_1, \dots, g_n com coeficientes em A . Assim, a soma direta $\text{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geq 0} \text{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra**

simétrica de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n .

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A -multilineares anti-simétricas com d argumentos em M , $p : M^d \rightarrow X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **anti-simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = 0$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ dos quais pelo menos dois são iguais. Um morfismo de $p : M^d \rightarrow X$ para $p' : M^d \rightarrow X'$ é um homomorfismo $h : X \rightarrow X'$ de A -módulos tal que $hp = p'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **d -ésima potência**

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M . O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \rightarrow \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A -módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A -módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os “monômios anti-comutativos” de grau d em g_1, \dots, g_n . Em particular, caso $n = d$, o A -módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso g_1, \dots, g_d sejam geradores livres de M , o A -módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo \bigwedge_A^d um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \rightarrow M$ de um A -módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\bigwedge^d h$ do A -módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

$\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geq 0} \bigwedge_A^d M$ é a **álgebra de Grassmann** de $M \in \mathbf{Mod}_A$.

4. Seja $h : A \rightarrow B$ uma seta em \mathbf{CRng} . Então temos os funtores $-\otimes_A B : \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_B$ e $E : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Mod}_A$. O segundo é o funtor de **esquecimento** que considera qualquer $M \in \mathbf{Mod}_B$ como A -módulo

com respeito ao homomorfismo h .

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \rightarrow X$ em \mathbf{CRng} tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X ; um morfismo de $h : A \rightarrow X$ para $h' : A \rightarrow X'$ é uma seta $\alpha : X \rightarrow X'$ em \mathbf{CRng} tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \rightarrow A[S^{-1}]$ ou por $i : A \rightarrow S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde \hat{S} denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$. Assim, obtemos o funtor de **localização** $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ e uma transformação natural $i_* : 1_{\mathbf{Mod}_A} \rightarrow E \circ S^{-1}$ dada por $M \rightarrow M \otimes_A S^{-1}A$, $m \mapsto m \otimes 1$. Abusando da notação, às vezes escreve-se a no lugar de ia e m no lugar de $i_M m$. Usando a propriedade universal da localização, é fácil provar que todo elemento de $S^{-1}M$ tem a forma ms^{-1} para alguns $m \in M$ e $s \in S \subset A$. Elementos $ms^{-1}, m's'^{-1} \in S^{-1}M$ são iguais em $S^{-1}M$ se e só se existe $s'' \in S$ tal que $(ms' - m's)s'' = 0$ em M .

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \rightarrow c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \rightarrow c$ e $x \rightarrow c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \rightarrow \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos na próxima seção, este f , através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \rightarrow c'$ que tornam f o produto.

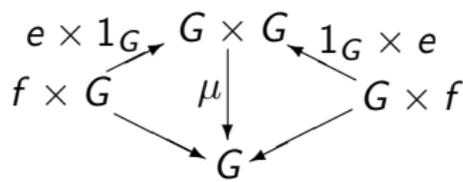
1.16. Estruturas algébricas em uma categoria dada.

Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $G \in \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, podemos

definir uma estrutura de grupo em G do modo seguinte. Sejam dadas três setas $\mu : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ e $e : f \rightarrow G$ (multiplicação, inverso e unidade, respectivamente), onde f é um objeto final em \mathcal{C} (neste caso de **Set**, qualquer conjunto de um elemento). A associatividade de μ significa a comutatividade do diagrama acima, onde $(G \times G) \times G \xrightarrow{t} G \times (G \times G)$

$$\begin{array}{ccc}
 (G \times G) \times G & \xrightarrow{t} & G \times (G \times G) \\
 \mu \times 1_G \downarrow & & \downarrow 1_G \times \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \xleftarrow{\mu} G \times G
 \end{array}$$

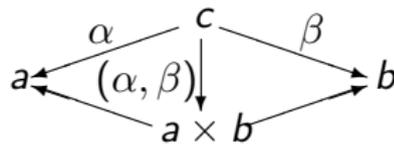
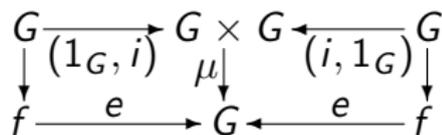
é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da



unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \rightarrow G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G , munido das setas

$f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.



Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária \mathcal{C} , obtemos o conceito de **grupo** na categoria \mathcal{C} . Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos (grupos em categoria do tipo $\mathcal{C} \rightarrow c$, onde \mathcal{C} é uma categoria de espaços topológicos e $c \in \mathcal{C}$; por exemplo, caso $\mathcal{C} = \mathbf{Esp}$, um grupo sobre $B \in \mathbf{Esp}$ é uma função contínua $G \rightarrow B$ tal que a imagem inversa de todo ponto tem estrutura de um grupo topológico e as operações são globalmente contínuas).

O conceito dual tem nome **cogruppo**. Um exemplo interessante de cogruppo: denotemos por **Homot.*** a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto \vee é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera \mathbb{S}^n temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o “equador” $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \rightarrow *$ que leva toda a esfera \mathbb{S}^n no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ que “inverte” a esfera \mathbb{S}^n em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que \mathbb{S}^n é um cogruppo.

1.17. Observação. *Seja \mathcal{C} uma categoria e seja dado um diagrama à esquerda em \mathcal{C} . Suponhamos que existam os produtos fibrados $x' \times_x t$ e $x'' \times_{x'} (x' \times_x t)$. Então $x'' \times_{x'} (x' \times_x t) = x'' \times_{x'} (x' \times_x t) \rightarrow x' \times_x t \rightarrow t$ com respeito ao diagrama comutativo à direita ■*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & t & \\
 & & & \downarrow & \\
 x'' & \longrightarrow & x' & \longrightarrow & x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x'' \times_{x'} (x' \times_x t) & \longrightarrow & x' \times_x t & \longrightarrow & t & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 x'' & \longrightarrow & x' & \longrightarrow & x & &
 \end{array}$$

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.
2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\text{Centre } G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G . Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \text{Centre } G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$.
3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C . Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?
4. Encontre dois funtores $F_1, F_2 : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ tais que $F_i G = G$ para todos $i = 1, 2$ e $G \in \mathbf{Grp}$.
5. Seja $S \in \mathbf{Set}$. Definamos $\text{ev}_X : \mathbf{Set}(S, X) \times S \rightarrow X$ pela regra $(f, s) \mapsto f(s)$. Prove que ev_\bullet é uma transformação natural.
6. Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ funtores. Mostre que uma transformação natural $t_\bullet : F \rightarrow G$ é nada mais do que um funtor $t : \mathcal{C} \times \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C}'$ tal que $t(-, 0) = F$ e $t(-, 1) = G$, onde $\mathbf{2}$ é a categoria com 2 objetos $0, 1$ e uma única seta não-trivial $0 \rightarrow 1$.

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \rightarrow (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfismos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\text{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{C}'^{\text{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{C}')$.

9. Denotemos por \mathcal{D} a categoria com 3 objetos e apenas duas setas não-triviais $\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot$. Seja \mathcal{C} uma categoria, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor, $c \in \mathcal{C}$ e $\Delta_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um **funtor constante** relacionado com c (isto significa que Δ_c manda todos os objetos para c e todos os morfismos para 1_c).

Descreva de um modo simples todas as transformações naturais do tipo $\Delta_c \rightarrow F$. (Será que já encontramos este animal?)

10. Uma categoria \mathcal{C} é **pré-ordem** se, para todos $c, c' \in \mathcal{C}$, existe no máximo um morfismo $c \rightarrow c'$. Denotemos por **Preord** a subcategoria completa de **Cat** formada por todos as pré-ordens. Mostre que **Preord** é fechada relativamente a produtos.

11. Descreva os (co)produtos nas categorias Matr_k e **Preord**.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \rightarrow B$ setas em \mathbf{CRng} . Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.
13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\text{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.
14. Sejam $G, G' \in \mathcal{C}$ grupos em \mathcal{C} . Defina um homomorfismo $G \rightarrow G'$.
15. Um **monoide** é um conjunto M munido de uma operação binária \cdot associativa que possui unidade. Dizemos que um monoide M **age** sobre um conjunto S quando é dada uma operação binária $M \times S \xrightarrow{\circ} S$ tal que $1 \circ s = s$ e $m_1 \circ (m_2 \circ s) = (m_1 \cdot m_2) \circ s$ para todos $m_1, m_2 \in M$ e $s \in S$. Seja \mathcal{C} uma categoria. Defina monoide em \mathcal{C} . Defina ação de monoide em \mathcal{C} sobre um objeto de \mathcal{C} .
16. Seja \mathcal{C} uma categoria. Defina uma categoria em \mathcal{C} .