Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan′in

ICMC, USP, São Carlos

02/09/2015 – 07/10/2015

2. O lema de Yoneda, funtores representáveis, funtores adjuntos, categorias aditivas, categorias abelianas e outras bagatelas

2.1. Funtores de Yoneda. Qualquer morfismo $c \xrightarrow{f} c'$ numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$ define uma transformação natural $\mathcal{C}(f,-):\mathcal{C}(c',-) \to \mathcal{C}(c,-)$, onde, para $x \in \mathcal{C}$, a função $\mathcal{C}(f,x) : \mathcal{C}(c',x) \to \mathcal{C}(c,x)$ é definida pela regra

$$\mathcal{C}(f,x) : (c' \xrightarrow{g} x) \mapsto (c \xrightarrow{g\circ f} x).$$

Portanto, obtemos um funtor contravariante $Y : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$, chamado **funtor de Yoneda**. O funtor de Yoneda representa a categoria $\mathcal{C}$ na categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$. A dualidade produz o funtor covariante $Y' : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$, definido pelas seguintes regras:

$$Y' : \mathcal{C} \ni c \mapsto \mathcal{C}(-,c) \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$$

para objetos e

$$Y' : (c \xrightarrow{f} c') \mapsto \big(\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, c) \to \mathcal{C}(-, c')\big)$$

para morfismos, onde, para todo $x \in \mathcal{C}$, definimos

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, c) \to \mathcal{C}(x, c'), \qquad \mathcal{C}(x, f) : (x \xrightarrow{g} c) \mapsto (x \xrightarrow{f \circ g} c').$$

O funtor Y' também é dito **funtor de Yoneda**.

2.2. Composições de funtores com transformações naturais. Seja $t : F \to F'$ uma transformação natural entre funtores $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e seja $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ um funtor. Então a regra $(G \circ t)_c := Gt_c$, com $c \in \mathcal{C}$, define uma transformação natural $G \circ t : G \circ F \to G \circ F'$.
Seja $s : G \to G'$ uma transformação natural entre funtores $G, G' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ e seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor. Então a regra $(s \circ F)_c := s_{Fc}$, com $c \in \mathcal{C}$, define uma transformação natural $s \circ F : G \circ F \to G' \circ F$. Assim, nas circunstâncias descritas acima, temos as composições de funtor e transformação natural.

2.3. Lema (de Yoneda). *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ um funtor e seja $c \in \mathcal{C}$. Então a função*

$$y_{\mathcal{C},F,c} : \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})\big(\mathcal{C}(c, -), F\big) \to Fc,$$

$$y_{\mathcal{C},F,c} : \big(\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{t} F\big) \mapsto t_c 1_c \in Fc$$

é uma bijeção. A função $y_{\mathcal{C},-,-}$ é natural.

Demonstração. Sejam $F \xrightarrow{t} F'$ uma transformação natural entre funtores $F, F' : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ e $f : c \to c'$ um morfismo da categoria $\mathcal{C}$. Pelo diagrama comutativo à direita, obtemos o morfismo $\gamma := F'f \circ t_c = t_{c'} \circ Ff : Fc \to F'c'$ induzido por t e f.

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "t_c"] \arrow[d, "Ff"'] & F'c \arrow[d, "F'f"] \\ Fc' \arrow[r, "t_{c'}"] & F'c' \end{tikzcd}$$

É fácil ver que este γ atende as propriedades funtoriais, ou seja, obtemos um funtor $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, que leva o par (F, c) para Fc e o morfismo $(t, f) : (F, c) \to (F', c')$ para γ. Realmente, temos $\gamma = F'f \circ t_c$ e $\gamma' = F''f' \circ t'_{c'}$ para $(t', f') : (F', c') \to (F'', c'')$. Sendo t' uma transformação natural,

$$\gamma' \circ \gamma = F''f' \circ t'_{c'} \circ F'f \circ t_c = F''f' \circ F''f \circ t'_c \circ t_c = F''(f' \circ f) \circ (t' \circ t)_c.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\mathbf{Set})\big(\mathcal{C}(c,-),F\big) \arrow[r, "y_{\mathcal{C},F,c}"] \arrow[d, "\Gamma"'] & Fc \arrow[d, "\gamma"'] \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\mathbf{Set})\big(\mathcal{C}(c',-),F'\big) \arrow[r, "y_{\mathcal{C},F',c'}"] & F'c'
\end{tikzcd}$$

Para verificar que $y_{\mathcal{C},-,-}$ é uma transformação natural entre funtores deste tipo, basta verificar a comutatividade do diagrama à esquerda, onde Γ, induzido por t e f, é dado pela regra $\Gamma : \big(\mathcal{C}(c,-) \xrightarrow{\alpha} F\big) \mapsto t \circ \alpha \circ \mathcal{C}(f,-)$. Seja $\mathcal{C}(c,-) \xrightarrow{\alpha} F$ uma transformação natural. Então o diagrama à direita é comutativo e $\mathcal{C}(c,f) : 1_c \mapsto f$. Portanto, $Ff(\alpha_c 1_c) = \alpha_{c'} f$ e $\gamma \circ y_{\mathcal{C},F,c} : \alpha \mapsto (t_{c'} \circ Ff)(\alpha_c 1_c) = t_{c'}\big(Ff(\alpha_c 1_c)\big) = t_{c'}(\alpha_{c'} f)$. Por outro lado, $y_{\mathcal{C},F',c'} \circ \Gamma : \alpha \mapsto \big(t \circ \alpha \circ \mathcal{C}(f,-)\big)_{c'} 1_{c'} = \big(t_{c'} \circ \alpha_{c'} \circ \mathcal{C}(f,c')\big) 1_{c'} = t_{c'}\big(\alpha_{c'}(1_{c'} \circ f)\big) = t_{c'}(\alpha_{c'} f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "\mathcal{C}(c,f)"'] & Fc \arrow[d, "Ff"'] \\
\mathcal{C}(c,c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & Fc'
\end{tikzcd}$$

Se $\alpha_c 1_c$ é conhecido, então, pela comutatividade do diagrama acima, segue que, para qualquer morfismo $f : c \to c'$ em $\mathcal{C}$, é necessário definir $\alpha_{c'} f = Ff(\alpha_c 1_c)$. Em outras palavras, o valor de $\alpha_c 1_c$ define univocamente toda função $\alpha_{c'}$, com $c' \in \mathcal{C}$, e, portanto, define univocamente a transformação α. Assim, $y_{\mathcal{C},F,c}$ é injetivo. Seja $s \in Fc$. Precisamos criar uma transformação natural $\alpha : \mathcal{C}(c,-) \to F$ que, por $y_{\mathcal{C},F,c}$, vai para s.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(c,g)"'] & Fc' \arrow[d, "Fg"'] \\
\mathcal{C}(c,c'') \arrow[r, "\alpha_{c''}"] & Fc''
\end{tikzcd}$$

Para qualquer $f \in \mathcal{C}(c, c')$, façamos $\alpha_{c'} f = Ff(s) \in Fc'$. Como $\alpha_c 1_c = s$, é suficiente verificar que α é uma transformação natural, isto é, que para qualquer $g \in \mathcal{C}(c', c'')$ é válida a igualdade $\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g) = Fg \circ \alpha_{c'}$. Aplicando as partes da igualdade a um morfismo arbitrário $f : c \to c'$, temos $(Fg \circ \alpha_{c'})(f) = Fg\big(Ff(s)\big)$ e $\big(\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g)\big)(f) = \alpha_{c''}(g \circ f) =$ $= F(g \circ f)(s) = (Fg \circ Ff)(s) = Fg\big(Ff(s)\big)$ ∎

2.4. Definição. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ isomorfo a um funtor do tipo $\mathcal{C}(c, -)$, $c \in \mathcal{C}$, é dito **representável**. Um funtor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ isomorfo a um funtor do tipo $\mathcal{C}(-, c)$ também é dito **representável**. Dizemos que c **representa** F. Pelo Lema 2.3 e pelo Critério 1.8, o funtor de Yoneda Y induz uma anti-equivalência entre a categoria $\mathcal{C}$ e a categoria (completa) de todos os funtores representáveis (covariantes). O Lema 2.3 tem o seu dual (cuja prova pode ser lida num espelho), seguindo daí que o funtor de Yoneda Y' também induz a equivalência entre $\mathcal{C}$ e a categoria dos funtores representáveis (contravariantes).

Assim, sendo conhecidas, **todas as setas de c** (outra variante: para c) **definem um objeto $c \in \mathcal{C}$ univocamente a menos de isomorfismo**.

Portanto, podemos estudar objetos usando somente "interrelações" (= setas) entre si. Uma outra "consequência" do lema de Yoneda: **caso um funtor não-representável faça muito bem o papel de objeto, poderíamos estender a categoria original adicionando um objeto novo, ou seja, supondo que o funtor é representável**.

Funtores representáveis são relacionados com construções universais. Já vimos no Exemplo 1.15.6 que um objeto que representa o funtor $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ é simplesmente o produto $c \times c'$. Mais geralmente, podemos definir uma construção universal numa categoria arbitrária, usando a construção análoga à feita em **Set** (os "melhores funtores do mundo" traduzem uma para outra) e requerendo que o funtor correspondente seja representável.

Por exemplo, o limite pode ser definido como o objeto que representa um funtor apropriado. Seja $\mathcal{I}$ uma categoria (de índices) e seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária. Definamos o **funtor diagonal** $\Delta : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Para $c \in \mathcal{C}$, o funtor Δ_c é constante: $\Delta_c i = c$ e $\Delta_c f = 1_c$ para todos $i \in \mathcal{I}$ e $f \in \operatorname{Mor} \mathcal{I}$. Para um morfismo $c \xrightarrow{f} c'$ em $\mathcal{C}$, a transformação natural $\Delta f_i : \Delta_c i \to \Delta_{c'} i$ é simplesmente f para todo $i \in \mathcal{I}$.

Seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. O limite $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} Fi$ representa o funtor contravariante $c \mapsto \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_c, F)$. Em outras palavras, temos um isomorfismo natural $\mathcal{C}\big(-, \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} Fi\big) \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_-, F)$. A seta $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} Fi \to Fi$ para $i \in \mathcal{I}$ é induzida pela transformação natural $\mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_-, F) \to \mathcal{C}(-, Fi)$ dada por $(\Delta_c \xrightarrow{t} F) \mapsto (c = \Delta_c i \xrightarrow{t_i} Fi)$.

Os "melhores funtores do mundo" também traduzem estruturas definidas em **Set** para outra categoria $\mathcal{C}$. Já sabemos como definir uma estrutura de grupo para um objeto $G \in \mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{C}$.
Podemos definir um grupo de outro modo: seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos finitos, isto é, existe o produto para qualquer coleção finita de objetos de $\mathcal{C}$. Um objeto $G \in \mathcal{C}$ é um grupo em $\mathcal{C}$ se e só se toda componente $\mathcal{C}(c, G)$ do funtor $\mathcal{C}(-, G)$ for um grupo (no sentido ordinário) em **Set** e, para todo morfismo $h : c \to c'$ em $\mathcal{C}$, a função $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \to \mathcal{C}(c, G)$ for um homomorfismo de grupos. Em outras palavras, o funtor $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ passa pela categoria de grupos, ou seja, podemos decompor $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Grp} \xrightarrow{R} \mathbf{Set}$, onde E é o funtor "esquecimento", que "esquece" a estrutura de grupos em **Set**.

Verifiquemos a equivalência das definições.
Seja $G \in \mathcal{C}$ um grupo como na primeira definição. Então temos três setas $\mu : G \times G \to G$, $i : G \to G$ e $e : f \to G$, onde f é um objeto final em $\mathcal{C}$. Estas setas satisfazem as propriedades de associatividade, do inverso e da unidade, como nos diagramas acima. O morfismo $\mu : G \times G \to G$ induz uma transformação natural

$$\overline{\mu}_\bullet : \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}(*, G \times G) \to \mathcal{C}(*, G)$$

que define a operação em $\mathcal{C}(c, G)$ (de fato, pela composição com μ) para todo $c \in \mathcal{C}$. Sendo $\overline{\mu}_\bullet$ uma transformação natural, a função $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \to \mathcal{C}(c, G)$ é um homomorfismo para qualquer morfismo $h : c \to c'$ em $\mathcal{C}$. Apliquemos o funtor $\mathcal{C}(c, -)$ ao diagrama de associatividade. Observemos que a transformação

$$\mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}\big(*, (G \times G) \times G\big) \simeq$$
$$\simeq \mathcal{C}\big(*, G \times (G \times G)\big) \simeq \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G)$$

induzida por t é idêntica. Utilizando nossos isomorfismos naturais, é fácil verificar que o diagrama no próximo slide é comutativo, isto é, a operação em $\mathcal{C}(c, G)$ é associativa.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,G)\times\mathcal{C}(c,G)\times\mathcal{C}(c,G) \arrow[r, "1_{\mathcal{C}(c,G)}\times\overline{\mu}_c"] \arrow[d, "\overline{\mu}_c\times 1_{\mathcal{C}(c,G)}"'] & \mathcal{C}(c,G)\times\mathcal{C}(c,G) \arrow[d, "\overline{\mu}_c"] \\
\mathcal{C}(c,G)\times\mathcal{C}(c,G) \arrow[r, "\overline{\mu}_c"] & \mathcal{C}(c,G)
\end{tikzcd}$$

O morfismo $e : f \to G$ induz a função $\mathcal{C}(c,e) : \mathcal{C}(c,f) \to \mathcal{C}(c,G)$ que leva o único morfismo de $\mathcal{C}(c,f)$ em $u_c \in \mathcal{C}(c,G)$. Aplicando o funtor $\mathcal{C}(c,-)$ ao diagrama da unidade, é fácil observar que u_c é a unidade em $\mathcal{C}(c,G)$. Analogamente, verificamos que a função $\mathcal{C}(c,i) : \mathcal{C}(c,G) \to \mathcal{C}(c,G)$ indica o inverso em $\mathcal{C}(c,G)$.

Reciprocamente, se o funtor $\mathcal{C}(-,G)$ pas- sa pela categoria **Grp**, então, para todo morfismo $h : c \to c'$ em $\mathcal{C}$, a função $\mathcal{C}(h,G) : \mathcal{C}(c',G) \to \mathcal{C}(c,G)$ é um ho- momorfismo de grupos. Em outras palavras, o diagrama à direita é comutativo, onde μ_c denota a função $\mu_c : \mathcal{C}(c, G\times G) \to \mathcal{C}(c,G)$ induzida pela operação em $\mathcal{C}(c,G)$. Assim obtemos uma transformação natural $\mu_\bullet : \mathcal{C}(-, G\times G) \to \mathcal{C}(-,G)$ que, pelo lema de Yoneda, é induzida por uma seta $\mu : G\times G \to G$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c, G\times G) \arrow[r, "\mu_c"] & \mathcal{C}(c,G) \\
\mathcal{C}(c', G\times G) \arrow[r, "\mu_{c'}"] \arrow[u, "\mathcal{C}(h,G\times G)"'] & \mathcal{C}(c',G) \arrow[u, "\mathcal{C}(h,G)"']
\end{tikzcd}$$

Já sabemos que a associatividade da operação μ_c se expressa na forma da comutatividade do diagrama obtido pela aplicação do funtor $\mathcal{C}(c,-)$ ao diagrama de associatividade na primeira definição de grupo. Sendo a comutatividade válida para qualquer $c \in \mathcal{C}$, obtemos um análogo diagrama comutativo de transformações naturais. Pelo lema de Yoneda, daí segue que μ é associativo. Na categoria com produtos finitos $\mathcal{C}$ existe um objeto final $f \in \mathcal{C}$, produto de zero objetos. Para todo $c \in \mathcal{C}$, consideremos a função $e_c : \mathcal{C}(c,f) \to \mathcal{C}(c,G)$ que leva o único morfismo de $\mathcal{C}(c,f)$ na unidade u_c do grupo $\mathcal{C}(c,G)$. Para todo morfismo $h : c \to c'$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,f) \arrow[r, "e_c"] & \mathcal{C}(c,G) \\
\mathcal{C}(c',f) \arrow[u, "\mathcal{C}(h,f)"'] \arrow[r, "e_{c'}"] & \mathcal{C}(c',G) \arrow[u, "\mathcal{C}(h,G)"]
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois o homomorfismo $\mathcal{C}(h,G)$ leva a unidade $u_{c'}$ de $\mathcal{C}(c',G)$ na unidade u_c de $\mathcal{C}(c,G)$. Assim obtemos uma transformação natural $e_\bullet : \mathcal{C}(-,f) \to \mathcal{C}(-,G)$ que, pelo lema de Yoneda, é induzida por uma única seta $e : f \to G$. É fácil verificar que o diagrama da unidade é comutativo. De forma análoga, obtemos uma transformação natural $i_\bullet : \mathcal{C}(-,G) \to \mathcal{C}(-,G)$, definida em cada componente pela indicação do inverso. Ela é induzida por um único morfismo $i : G \to G$ que satisfaz a comutatividade do diagrama do inverso.

Para o conceito dual, se G é um cogrupo na categoria $\mathcal{C}$, então G é um grupo na categoria $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Assim, o funtor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(-,G):\mathcal{C}\to\mathbf{Grp}$ induz um funtor $\mathcal{C}(G,-):\mathcal{C}\to\mathbf{Grp}$, ou seja, para todo $c\in\mathcal{C}$, temos $\mathcal{C}(G,c)$ um grupo em **Set**. A esfera $\mathbb{S}^n$ com a comultiplicação $\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n\vee\mathbb{S}^n$ é um cogrupo na categoria $\mathbf{Homot}_*$. Portanto, se $X\in\mathbf{Homot}_*$ é um espaço topológico com um ponto $*$ distinguido, $\pi_n(X,*):=\mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^n,X)$ é um grupo em **Set**. Este grupo é dito ***n*-ésimo grupo homotópico** de X. Em particular, para $n=1$, obtemos $\pi_1(X,*):=\mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^1,X)$, o **grupo fundamental**.

Seja $L:\mathcal{S}\to\mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que, para todo $c\in\mathcal{C}$, o funtor contravariante $\mathcal{C}(L-,c):\mathcal{S}\to\mathbf{Set}$ seja representável. Então existe um $Rc\in\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{C}(L-,c)\simeq\mathcal{S}(-,Rc)$. Todo morfismo $h:c\to c'$ induz uma transformação natural $\mathcal{C}(L-,h):\mathcal{C}(L-,c)\to\mathcal{C}(L-,c')$, que é simplesmente a composição $\mathcal{C}(-,h)\circ L$ de um funtor com uma transformação natural definida anteriormente. Portanto, obtemos uma transformação natural $\mathcal{S}(-,Rc)\to\mathcal{S}(-,Rc')$. Pelo lema de Yoneda, ela é induzida por um morfismo $Rf:Rc\to Rc'$. Em outras palavras, obtemos um funtor $R:\mathcal{C}\to\mathcal{S}$ e, finalmente, um isomorfismo natural $\mathcal{C}(L-,-)\simeq\mathcal{S}(-,R-)$.

2.5. Definição. Funtores $L : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ e $R : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ são ditos **adjuntos** (L é **adjunto** a R **à esquerda** e R é **adjunto** a L **à direita**) se temos um isomorfismo natural $\mathcal{C}(L-,-) \simeq \mathcal{S}(-,R-)$. Da consideração acima, segue que o funtor adjunto à direita a um funtor L é único a menos de isomorfismo. Pela dualidade, o mesmo é válido para o funtor adjunto à esquerda.

2.6. Exemplos.

1. Consideremos uma categoria algébrica $\mathcal{A}$ cujos objetos têm por base um conjunto (tais como módulos, grupos, álgebras, espaços lineares, etc.). Ao olhar tais objetos apenas como conjuntos, estamos aplicando um funtor R que "esquece" a estrutura embutida nos objetos. Este funtor tem um adjunto L que gera livremente por um conjunto de geradores o objeto da estrutura em questão (módulo livre, grupo livre, anel de polinômios, etc.).
Caso $\mathcal{A} = \mathbf{Lin}_k$, o funtor $L : \mathbf{Set} \to \mathbf{Lin}_k$ associa a $B \in \mathbf{Set}$ o espaço k-linear kB com base B.
Caso $\mathcal{A} = \mathbf{Grp}$, obtemos grupo livre LB com geradores livres $B \in \mathbf{Set}$.
Caso $\mathcal{A} = \mathbf{CAlg}_A$ com $A \in \mathbf{CRng}$ (a categoria de A-álgebras comutativas), temos a álgebra de polinômios $LB := A[B]$ com coeficientes em A, cujas variáveis são elementos de B.

2. Podemos "esquecer" apenas uma parte da estrutura.
Para o funtor de esquecimento $R : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, o adjunto à esquerda é a abelianização de um grupo, $LG := G/[G,G]$.
Para o funtor $R : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, onde $R \in \mathbf{Rng}$ é um anel associativo, o adjunto à esquerda tem a forma $R \otimes_{\mathbb{Z}} -$.
Para o funtor $R : {}_R\mathbf{Mod}_{R'} \to {}_R\mathbf{Mod}$ (os objetos da categoria ${}_R\mathbf{Mod}_{R'}$ são (R,R')-bimódulos, onde $R, R' \in \mathbf{Rng}$), o adjunto à esquerda tem a forma $- \otimes_{\mathbb{Z}} R'$.
Para o funtor $R : \mathbf{Alg}_A \to \mathbf{Mon}$, onde $\mathbf{Mon}$ denota a categoria de monoides e $A \in \mathbf{CRng}$, o adjunto à esquerda tem a forma $LM := A[M]$.
A construção $A[G]$, chamada **A-álgebra do grupo G**, se usa com frequência para $G \in \mathbf{Grp}$.
Para o funtor $R : \mathbf{Alg}_A \to \mathbf{Mod}_A$, $A \in \mathbf{CRng}$, o adjunto à esquerda é a A-álgebra tensorial $LM := T_A M := \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}} M^{\otimes i}$, onde
$M^{\otimes i} := \underbrace{M \otimes_A \cdots \otimes_A M}_{i}$ e $M^{\otimes 0} := A$. A multiplicação em $T_A M$ é induzida pelo produto tensorial de elementos.

Denotemos por $\mathbf{Dom}_m$ a categoria de domínios comutativos cujos morfismos são homomorfismos injetores e por $R : \mathbf{Fld} \hookrightarrow \mathbf{Dom}_m$, a subcategoria completa de corpos comutativos. O funtor adjunto a R à esquerda produz o corpo de frações de um dominio, $LD := KD$.
Denotemos por **Met** a categoria de espaços métricos; os morfismos são funções que preservam a métrica. Seja $R : \mathbf{CompMet} \hookrightarrow \mathbf{Met}$ a subcategoria completa de espaços métricos completos. Então o funtor adjunto a R à esquerda elabora o completamento de um espaço métrico, $LM := \widehat{M}$.
3. Sejam $\mathcal{I}$ uma categoria (de índices), $\mathcal{C}$ uma categoria completa e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. O isomorfismo de funtores $\mathcal{C}\big(-, \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi\big) \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})(\Delta_-, F)$ é natural em F. Isto significa que o funtor $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}}$ é adjunto à direita ao funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$.

2.7. Lema. *Seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor que possui o limite $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e sejam $L : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ e $R : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ funtores adjuntos. Então $R \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi = \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} RFi$. Em palavras: qualquer funtor que possui adjunto à esquerda preserva limites.*

Demonstração. Denotemos $l := \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} Fi$ e sejam $\alpha_i : l \to Fi$, $i \in \mathcal{I}$, as correspondentes setas em $\mathcal{C}$. Consideremos um objeto $\big((\beta_i)_{i \in \mathcal{I}}, s\big)$ da categoria $\mathcal{S} \to RF$, onde $\beta_i : s \to RFi$, $i \in \mathcal{I}$, são setas em $\mathcal{S}$.
O isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{C}(L-,-) \to \mathcal{S}(-,R-)$ providencia as setas $\gamma_i : Ls \to Fi$, $i \in \mathcal{I}$, isto é, $\gamma_i = \varphi^{-1}\beta_i$. Para toda seta $f : i \to j$ em $\mathcal{I}$, temos $(RFf)\beta_i = \beta_j$. Pela naturalidade de φ^{-1}, obtemos $(Ff)\gamma_i = \gamma_j$. Em outras palavras, $\big((\gamma_i)_{i \in \mathcal{I}}, Ls\big)$ é um objeto da categoria $\mathcal{C} \to F$. Pela definição de limite, ganhamos uma única seta $g : Ls \to l$ tal que $\alpha_i g = \gamma_i$. Aplicando φ a g, obtemos a seta $h := \varphi g : s \to Rl$ que satisfaz $(R\alpha_i)h = \beta_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ pela naturalidade de φ. A unicidade de tal h se obtém por aplicar novamente o isomorfismo natural φ ■

2.8. Lema. *Sejam $L : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ e $R : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ funtores.*
Se L e R são adjuntos através de um isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{C}(L-,-) \to \mathcal{S}(-,R-)$, então temos as transformações naturais (chamadas **unidade** *e* **counidade***)*

(2.8.1) $$\eta : 1_{\mathcal{S}} \to RL, \qquad \varepsilon : LR \to 1_{\mathcal{C}}$$

definidas pelas regras $\eta_s = \varphi_{s,Ls} 1_{Ls}$ e $\varepsilon_c = \varphi^{-1}_{Rc,c} 1_{Rc}$ para $c \in \mathcal{C}$ e $s \in \mathcal{S}$.

As composições

$$\text{(2.8.2)} \qquad R \xrightarrow{\eta\circ R} RLR \xrightarrow{R\circ\varepsilon} R \qquad L \xrightarrow{L\circ\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon\circ L} L$$

são iguais a 1_R e 1_L, respectivamente.
Reciprocamente, sejam dadas transformações naturais $(2.8.1)$ tais que as composições $(2.8.2)$ são iguais a 1_R e 1_L, respectivamente. Então $\varphi_{s,c}$ definido pela regra $\varphi_{s,c}f = (Rf)\eta_s$ para $f : Ls \to c$ é um isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{C}(L-,-) \to \mathcal{S}(-,R-)$.

Demonstração. Sejam $f{:}c \to c'$ e $g : s \to s'$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente. Pela comutatividade do diagrama à direita, o elemento marcado por $*$ é igual a $(RLg)\eta_s = \eta_{s'}g$, implicando que η é natural.

$$\begin{tikzcd}
1_{Ls} \in \mathcal{C}(Ls, Ls) \arrow[r, "\varphi_{s,Ls}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(Ls,Lg)"'] & \mathcal{S}(s, RLs) \ni \eta_s \arrow[d, "\mathcal{S}(s,RLg)"] \\
Lg \in \mathcal{C}(Ls, Ls') \arrow[r, "\varphi_{s,Ls'}"] & \mathcal{S}(s, RLs') \ni * \\
1_{Ls'} \in \mathcal{C}(Ls', Ls') \arrow[r, "\varphi_{s',Ls'}"] \arrow[u, "\mathcal{C}(Lg,Ls')"] & \mathcal{S}(s', RLs') \ni \eta_{s'} \arrow[u, "\mathcal{S}(g,RLs')"']
\end{tikzcd}$$

Pela comutatividade do diagrama à direita, as $\varphi_{Rc,c'}$-imagens dos elementos $f\varepsilon_c$ e $\varepsilon_{c'}(LRf)$, marcados por $**$, são iguais. Sendo $\varphi_{Rc,c'}$ injetivo, concluímos que ε é natural.

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon_c \in \mathcal{C}(LRc, c) \arrow[r, "\varphi_{Rc,c}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(LRc, f)"'] & \mathcal{S}(Rc, Rc) \ni 1_{Rc} \arrow[d, "\mathcal{S}(Rc, Rf)"] \\
** \in \mathcal{C}(LRc, c') \arrow[r, "\varphi_{Rc,c'}"] & \mathcal{S}(Rc, Rc') \ni Rf \\
\varepsilon_{c'} \in \mathcal{C}(LRc', c') \arrow[r, "\varphi_{Rc',c'}"] \arrow[u, "\mathcal{C}(LRf, c')"] & \mathcal{S}(Rc', Rc') \ni 1_{Rc'} \arrow[u, "\mathcal{S}(Rf, Rc')"']
\end{tikzcd}$$

Para morfismos $f : Ls \to c$ e $g : s \to Rc$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente, temos os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
1_{Ls} \in \mathcal{C}(Ls, Ls) \arrow[r, "\varphi_{s,Ls}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(Ls, f)"'] & \mathcal{S}(s, RLs) \ni \eta_s \arrow[d, "\mathcal{S}(s, Rf)"] \\
f \in \mathcal{C}(Ls, c) \arrow[r, "\varphi_{s,c}"] & \mathcal{S}(s, Rc) \ni (Rf)\eta_s
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varepsilon_c(Lg) \in \mathcal{C}(Ls, c) \arrow[r, "\varphi_{s,c}"] & \mathcal{S}(s, Rc) \ni g \\
\varepsilon_c \in \mathcal{C}(LRc, c) \arrow[r, "\varphi_{Rc,c}"] \arrow[u, "\mathcal{C}(Lg, c)"] & \mathcal{S}(Rc, Rc) \ni 1_{Rc} \arrow[u, "\mathcal{S}(g, Rc)"']
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$\textbf{(2.8.3)} \qquad \varphi_{s,c} f = (Rf)\eta_s, \qquad \varphi_{s,c}\big(\varepsilon_c(Lg)\big) = g.$$

Da primeira igualdade com $s := Rc$ e $f := \varepsilon_c$, obtemos $1_{Rc} = \varphi_{Rc,c}\varepsilon_c = (R\varepsilon_c)\eta_{Rc} = (R \circ \varepsilon)_c(\eta \circ R)_c$, portanto, $1_R = (R \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ R)$. Aplicando a segunda igualdade de (2.8.3) a $c := Ls$ e $g := \eta_s$, obtemos $\varphi_{s,Ls}\big(\varepsilon_{Ls}(L\eta_s)\big) = \eta_s = \varphi_{s,Ls} 1_{Ls}$. Como $\varphi_{s,Ls}$ é injetivo, então $1_{Ls} = \varepsilon_{Ls}(L\eta_s) = (\varepsilon \circ L)_s(L \circ \eta)_s$ e, portanto, $1_L = (\varepsilon \circ L) \circ (L \circ \eta)$.

Reciprocamente, sejam dadas transformações naturais (2.8.1) tais que as composições (2.8.2) são iguais a 1_R e 1_L, respectivamente. Primeiramente verifiquemos que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Ls,c) \arrow[r, "\varphi_{s,c}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(Lb,a)"'] & \mathcal{S}(s,Rc) \arrow[d, "\mathcal{S}(b,Ra)"] \\ \mathcal{C}(Ls',c') \arrow[r, "\varphi_{s',c'}"] & \mathcal{S}(s',Rc') \end{tikzcd}$$

φ introduzida no Lema 2.8 é uma transformação natural. Sejam $a : c \to c'$ e $b : s' \to s$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente. Então o diagrama à direita é comutativo, pois, para $f : Ls \to c$, são válidas as igualdades

$$\mathcal{S}(b,Ra)(\varphi_{s,c}f) = \mathcal{S}(b,Ra)\big((Rf)\eta_s\big) = (Ra)(Rf)\eta_s b,$$

$$\varphi_{s',c'}\big(\mathcal{C}(Lb,a)f\big) = \varphi_{s',c'}\big(af(Lb)\big) = R\big(af(Lb)\big)\eta_{s'} = (Ra)(Rf)(RLb)\eta_{s'}$$

e η é uma transformação natural: $\eta_s b = (RLb)\eta_{s'}$.

Para qualquer morfismo $g : s \to Rc$ em $\mathcal{S}$, façamos $\psi_{s,c}g := \varepsilon_c(Lg)$. Agora

$$\psi_{s,c}(\varphi_{s,c}f) = \psi_{s,c}\big((Rf)\eta_s\big) = \varepsilon_c\Big(L\big((Rf)\eta_s\big)\Big) = \varepsilon_c(LRf)(L\eta_s) =$$

$$= f\varepsilon_{Ls}(L\eta_s) = f(\varepsilon\circ L)_s(L\circ\eta)_s = f1_{Ls} = f,$$

pois ε é natural e a segunda composição em (2.8.2) é igual a 1_L.

De forma semelhante,

$$\varphi_{s,c}(\psi_{s,c}g) = \varphi_{s,c}\big(\varepsilon_c(Lg)\big) = \Big(R\big(\varepsilon_c(Lg)\big)\Big)\eta_s = (R\varepsilon_c)(RLg)\eta_s =$$

$$= (R\varepsilon_c)\eta_{Rc}g = (R\circ\varepsilon)_c(\eta\circ R)_c g = 1_{Rc}g = g,$$

pois η é natural e a primeira composição em (2.8.2) é igual a 1_R ■

2.9. Definição. Um morfismo i é dito **monomorfismo** (ou **mono**) se $ig_1 = ig_2$ implica $g_1 = g_2$. Um morfismo p é dito **epimorfismo** (ou **epi**) se $f_1p = f_2p$ implica $f_1 = f_2$.

É claro que a composição de dois monomorfimos (epimorfismos) é um monomorfismo (epimorfismo). Se fg é mono (epi), então g é mono (f é epi). Em particular, se fg é um isomorfismo, então f é epi e g é mono.

2.10. Definição. Uma categoria $\mathcal{C}$ cujos $\mathcal{C}(c,c')$ são munidos de estrutura de grupo abeliano de modo que a composição de morfismos seja biaditiva é dita **Ab-categoria**. É óbvio que a categoria dual $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a uma **Ab**-categoria $\mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria. Seja $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ um funtor entre **Ab**-categorias. O funtor F é dito **aditivo** se preserva a adição de morfismos, isto é, se $F:\mathcal{C}(c_1,c_2)\to\mathcal{C}'(Fc_1,Fc_2)$ é um homomorfismo de grupos abelianos para todos $c_1,c_2\in\mathcal{C}$.

Do mesmo jeito que uma categoria de um objeto só é um monoide, uma **Ab**-categoria de apenas um objeto é simplesmente um anel (associativo, não-comutativo e com unidade). Portanto, podemos tratar de **Ab-categorias** como sendo **"anéis" com vários objetos**. Desta maneira, os funtores aditivos são simplesmente os "homomorfismos" de "anéis".

Os funtores "melhores do mundo" relacionados com uma **Ab**-categoria $\mathcal{C}$ são obviamente aditivos, e, portanto, podemos considerar os funtores $\mathcal{C}(c,-)$ e $\mathcal{C}(-,c)$ como funtores aditivos dos tipos $\mathcal{C}(c,-):\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}$ e $\mathcal{C}(-,c):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Ab}$. Assim, se $\mathcal{C}$ possui produtos finitos, todo objeto de $\mathcal{C}$ é um grupo (e é cogrupo) abeliano em $\mathcal{C}$. (Além disso, o bifuntor $\mathcal{C}(-,-)$ é biaditivo.)

Em qualquer **Ab**-categoria, um monomorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à esquerda e um epimorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à direita.

Seja $0\in\mathcal{C}$ um objeto numa **Ab**-categoria $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}(0,0)=0$. Então 0 é final e inicial. Realmente, $h0=h0+h0$ implica $h0=0$. Pelas mesmas razões, $0h=0$. Agora $1_0=0$ e $\mathcal{C}(c,0)=\mathcal{C}(0,0)\mathcal{C}(c,0)=\{0\}$, isto é, 0 é final. De forma análoga, 0 é inicial. Obviamente, o morfismo $0:c\to c'$ é simplesmente a composição $c\to 0\to c'$.

Vamos supor que tal $0 \in \mathcal{C}$, chamado de **objeto nulo**, exista.
Sejam $a, b \in \mathcal{C}$ dois objetos. Suponhamos que existam o coproduto $a \xrightarrow{j_1} a \sqcup b \xleftarrow{j_2} b$ e o produto $a \xleftarrow{\pi_1} a \times b \xrightarrow{\pi_2} b$. Então os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & a \sqcup b \arrow[d, "p_1"] & \\
a \arrow[ur, "j_1"] \arrow[r, "1_a"'] & a & b \arrow[ul, "j_2"'] \arrow[l, "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \sqcup b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "i"] & \\
a & & b \\
 & a \times b \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \sqcup b \arrow[d, "p_2"] & \\
a \arrow[ur, "j_1"] \arrow[r, "0"'] & b & b \arrow[ul, "j_2"'] \arrow[l, "1_b"]
\end{tikzcd}$$

laterais produzem os morfismos $a \xleftarrow{p_1} a \sqcup b \xrightarrow{p_2} b$ satisfazendo as igualdades $p_1 j_1 = 1_a$, $p_1 j_2 = 0$, $p_2 j_1 = 0$, $p_2 j_2 = 1_b$. Portanto, obtemos o diagrama comutativo central com $\pi_1 i = p_1$ e $\pi_2 i = p_2$.

2.11. Definição. Se o i indicado é um isomorfismo, então dizemos que os objetos $a, b \in \mathcal{C}$ possuem **biproduto**. Neste caso, podemos supor que $i = 1$. Daí temos $p_1 = \pi_1$, $p_2 = \pi_2$ e

$$\textbf{(2.11.1)} \quad \pi_1 j_1 = 1_a,\ \pi_1 j_2 = 0,\ \pi_2 j_1 = 0,\ \pi_2 j_2 = 1_b,\ j_1 \pi_1 + j_2 \pi_2 = 1_{a \times b}.$$

A última igualdade é válida pelas propriedades do produto $a \times b$, pois $\pi_1(j_1\pi_1 + j_2\pi_2) = \pi_1 = \pi_1 1_{a\times b}$ e $\pi_2(j_1\pi_1 + j_2\pi_2) = \pi_2 = \pi_2 1_{a\times b}$. É fácil verificar que os morfismos j_1, j_2, π_1 e π_2 satisfazendo as igualdades (2.11.1) definem o biproduto.

Usando o delta de Kronecker, podemos reescrever as igualdades (2.11.1) como

(2.11.2) $$\pi_\alpha j_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \sum_\alpha j_\alpha \pi_\alpha = 1.$$

De forma semelhante, podemos definir o biproduto de qualquer coleção finita de objetos. Seja dada uma coleção finita de objetos $\{a_1, \dots, a_n\}$. Suponhamos que existam coproduto e produto destes objetos, e denotemos por j_α e π_α os respectivos morfismos de/para a_α. Então as igualdades (2.11.2) (com um isomorfismo no lugar de 1) implicam o isomorfismo $a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n \simeq a_1 \times \cdots \times a_n$. Ainda mais, as igualdades (2.11.2) implicam que os morfismos j_α's e π_α's definem coproduto e produto. Vamos denotar o **biproduto** por $\oplus$ e chamar os j**'s** e π**'s** de **injeções** e **projeções**, respectivamente. Assim, concluímos que qualquer funtor aditivo entre **Ab**-categorias preserva biprodutos. É fácil verificar que o biproduto é, num certo sentido, associativo e comutativo.

2.12. Observação. *Sejam $a = a_1 \oplus \cdots \oplus a_l$ e $a' = a'_1 \oplus \cdots \oplus a'_m$ biprodutos numa* **Ab***-categoria $\mathcal{C}$ munidos de projeções e injeções π_α, π'_β, j_α, j'_β, respectivamente. Então o grupo abeliano $\mathcal{C}(a, a')$ é a soma direta dos grupos abelianos $\mathcal{C}(a_\alpha, a'_\beta)$ e pode ser apresentado na forma de uma matriz*

$$
(\mathbf{2.12.1}) \qquad \mathcal{C}(a,a') = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(a_1,a'_1) & \dots & \mathcal{C}(a_l,a'_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}(a_1,a'_m) & \dots & \mathcal{C}(a_l,a'_m) \end{bmatrix}
$$

onde o morfismo $h \in \mathcal{C}(a,a')$ tem as componentes $h_{\beta\alpha} = \pi'_\beta h j_\alpha$ na matriz M_h. Se $a'' = a''_1 \oplus \dots \oplus a''_n$ é um terceiro biproduto, então podemos calcular a composição $h'h$ de $h \in \mathcal{C}(a,a')$ e $h' \in \mathcal{C}(a',a'')$ usando a multiplicação "usual" das matrizes correspondentes: $M_{h'h} = M_{h'}M_h$ ■

2.13. Definição. Uma **Ab**-categoria $\mathcal{C}$ é dita **aditiva** se possui um objeto nulo e biprodutos.

2.14. Definição. Seja $h : a \to b$ um morfismo numa **Ab**-categoria $\mathcal{C}$.

$$
\begin{tikzcd} n \arrow[r, "k"] & a \arrow[r, "h"] & b \\ x \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ru, "f"'] & & \end{tikzcd}
$$

Dizemos que um morfismo $k : n \to a$ é **núcleo** de h se $hk = 0$ e se, para todo morfismo $f : x \to a$ tal que $hf = 0$, existe um único morfismo $g : x \to n$ que faz o diagrama à esquerda comutativo. Em outras palavras, o núcleo é o equalizador de h e 0.

$$
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, "k'"] \arrow[rd, "f'"'] & c \arrow[d, dashed, "g'"] \\ & & y \end{tikzcd}
$$

Dizemos que um morfismo $k' : b \to c$ é **conúcleo** de h se $k'h = 0$ e se, para todo morfismo $f' : b \to y$ tal que $f'h = 0$, existe um único morfismo $g' : c \to y$ que faz o diagrama à direita é comutativo. (Assim, o conúcleo de h é o coequalizador de h e 0.)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "f'"] \\ a' \arrow[r, "h'"] & b' \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathrm{Ker}\, h \xrightarrow{\ker h} a \xrightarrow{h} b$ e $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{\mathrm{co}\, h} \mathrm{Co}\, h$ os núcleo e conúcleo de h. É fácil ver que $\ker h$ é mono e que $\mathrm{co}\, h$ é epi.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, h \arrow[r, "\ker h"] \arrow[d, "k(f,f')"'] & a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "f'"] \\ \mathrm{Ker}\, h' \arrow[r, "\ker h'"] & a' \arrow[r, "h'"] & b' \end{tikzcd}$$

Suponhamos que o núcleo de qualquer morfismo de $\mathcal{C}$ sempre exista. Neste caso, se o diagrama à esquerda é comutativo, então existe um único morfismo $k(f, f')$ tal que o diagrama à direita é comutativo. Em outras palavras, Ker é um funtor $\mathrm{Ker} : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$ e $\ker$ é uma transformação natural $\ker : \mathrm{Ker} \to c^*$, onde $c^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$ é o funtor "começo" de seta definido no Exemplo 1.9.3. O fato análogo é válido para o conúcleo.

Seja $\mathcal{C}$ uma **Ab**-categoria e seja $h : a \to b$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Consideremos o funtor contravariante $\operatorname{Ker} h- : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ definindo $(\operatorname{Ker} h)c := \operatorname{Ker} \mathcal{C}(c, h)$ para $c \in \mathcal{C}$ e determinando $(\operatorname{Ker} h)f$ no diagrama comutativo à direita para $f : c \to d$.

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{Ker} h)c \arrow[r, "\ker h_c"] & \mathcal{C}(c, a) \\
(\operatorname{Ker} h)d \arrow[u, "(\operatorname{Ker} h)f"] \arrow[r, "\ker h_d"] & \mathcal{C}(d, a) \arrow[u, "\mathcal{C}(f, a)"']
\end{tikzcd}$$

No diagrama, a transformação natural $\ker h_\bullet$ é de fato a inclusão $(\operatorname{Ker} h)c \hookrightarrow \mathcal{C}(c, a)$. Seja $n \in \mathcal{C}$ um núcleo de h. Então é fácil ver que o funtor $\operatorname{Ker} h-$ é representado em $\mathcal{C}$ por n. Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{Ker} h-$ é representável e seja $n \in \mathcal{C}$ um objeto que o representa. Então $\ker h_\bullet$ induz uma transformação natural $\mathcal{C}(-, n) \to \mathcal{C}(-, a)$ que, pelo lema de Yoneda, é induzida por um único morfismo $k : n \to a$, $k \in (\operatorname{Ker} h)n$. Usando o isomorfismo $\operatorname{Ker} h- \simeq \mathcal{C}(-, n)$, podemos verificar que n é o núcleo de h. Assim, podemos definir, de maneira equivalente, o núcleo de h pela representatividade do funtor $\operatorname{Ker} h-$. (Pode afirmar e demonstrar algo dual para conúcleos?)

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} h \arrow[r, "\ker h"] & a \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\operatorname{co}(\ker h)"'] & & b \arrow[r, "\operatorname{co} h"] & \operatorname{Co} h \\
& \operatorname{Co}(\ker h) \arrow[rru, "f"] \arrow[rr, dashed, "g"'] & & \operatorname{Ker}(\operatorname{co} h) \arrow[u, "\ker(\operatorname{co} h)"'] &
\end{tikzcd}$$

Suponhamos que numa **Ab**-categoria $\mathcal{C}$ os núcleos e conúcleos sempre existam. Seja $h : a \to b$ um morfismo de $\mathcal{C}$. Como $h \ker h = 0$, então existe um (único) morfismo $f : \operatorname{Co}(\ker h) \to b$ tal que $f \operatorname{co}(\ker h) = h$. Sendo $(\operatorname{co} h)h = 0$, concluímos daí que $(\operatorname{co} h)f \operatorname{co}(\ker h) = 0$. Sabemos que $\operatorname{co}(\ker h)$ é epi, logo, $(\operatorname{co} h)f = 0$. Agora podemos encontrar um (único) morfismo $g : \operatorname{Co}(\ker h) \to \operatorname{Ker}(\operatorname{co} h)$ tal que $\big(\ker(\operatorname{co} h)\big)g = f$. Finalmente, encontramos g tal que $h = \big(\ker(\operatorname{co} h)\big)g \operatorname{co}(\ker h)$. Este g é único, pois $\ker(\operatorname{co} f)$ é mono e $\operatorname{co}(\ker f)$ é epi. (Você pode descobrir toda essa argumentação só olhando para o diagrama, sem ler o texto. A mesma receita serve na maioria dos casos a seguir.)

2.15. Definição. Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita **abeliana** se todo morfismo h de $\mathcal{C}$ possui núcleo e conúcleo e o morfismo $g : \operatorname{Co}(\ker h) \to \operatorname{Ker}(\operatorname{co} h)$ construído acima é um isomorfismo.

Grosso modo, podemos falar que uma **categoria aditiva é abeliana se $\mathrm{Co}(\ker h) = \mathrm{Ker}(\mathrm{co}\, h)$ para todo morfismo h. Neste caso, todo morfismo h está decomposto em um epimorfismo e um monomorfismo, $h = me$.**

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{co}\, h)"] & & \\
\mathrm{Ker}\, h \arrow[r, "\ker h"] & a \arrow[ur, "\mathrm{co}(\ker h)"] \arrow[dr, "e"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{co}\, h"] & \mathrm{Co}\, h \\
 & & y \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{co}\, h)"] \arrow[dd, "f"] & & \\
\mathrm{Ker}\, h \arrow[r, "\ker h"] & a \arrow[ur, "\mathrm{co}(\ker h)"] \arrow[dr, "e"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{co}\, h"] & \mathrm{Co}\, h \\
 & & y \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que esta decomposição é única a menos de um isomorfismo. Consideremos o diagrama comutativo à esquerda com e epi, m mono e com $h = \big(\ker(\mathrm{co}\, h)\big)\, \mathrm{co}(\ker h)$. Sendo $h \ker h = 0$, concluímos que $me \ker h = 0$. Daí, $e \ker h = 0$, pois m é mono. Logo, existe um morfismo $f : x \to y$ tal que $e = f\, \mathrm{co}(\ker h)$. Agora $\big(\ker(\mathrm{co}\, h)\big)\, \mathrm{co}(\ker h) = h = me = mf\, \mathrm{co}(\ker h)$ com $\mathrm{co}(\ker h)$ epi. Portanto, $\ker(\mathrm{co}\, h) = mf$ e o diagrama à direita é comutativo. Isto implica que f é epi e mono. Resta aplicar o item 3 da

2.16. Proposição. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e seja $h : a \to b$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então são válidas as seguintes afirmações.*

1. *h é mono se e só se $\mathrm{Ker}\, h = 0$.*

2. *h é epi se e só se $\mathrm{Co}\, h = 0$.*

3. *h é um isomorfismo se e só se h é mono e epi.*

4. *h é epi se e só se $h = \mathrm{co}(\ker h)$.*

5. *h é mono se e só se $h = \ker(\mathrm{co}\, h)$.*

6. *h possui uma única decomposição $h = me$ com e epi e m mono (a menos de um isomorfismo, isto é, se $h = m'e'$ com e' epi e m' mono, então existe um isomorfismo i tal que $e' = ie$ e $m = im'$; vide o diagrama à direita).*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "i"] & \\ a \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & & b \\ & y \arrow[ur, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

7. *Para quaisquer duas setas $a \xrightarrow{h} c \xleftarrow{f} b$ existe o pullback (dado pela fórmula $a \times_c b := \mathrm{Ker}(h\pi_a - f\pi_b)$).*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, h' \arrow[r, "\ker h'"] \arrow[d, "i"'] & a \times_c b \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & b \arrow[d, "f"'] \\ \mathrm{Ker}\, h \arrow[r, "\ker h"] & a \arrow[r, "h"] & c \end{tikzcd}$$

O pullback induz o isomorfismo i entre núcleos no diagrama comutativo à esquerda. Além disso, se h é epi, então h' é epi.

8. *Para quaisquer duas setas* $a \xleftarrow{h} c \xrightarrow{f} b$ *existe o pushout* (*dado pela fórmula* $a \sqcup_c b := \mathrm{Co}(j_a h - j_b f)$). *O pushout induz o isomorfismo* j *entre conúcleos no diagrama comutativo à direita. Além disso, se* h *é mono, então* h' *é mono.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Co}\,h' & a \sqcup_c b \arrow[l, "\mathrm{co}\,h'"'] & b \arrow[l, "h'"'] \\
\mathrm{Co}\,h \arrow[u, "j"] & a \arrow[l, "\mathrm{co}\,h"'] \arrow[u, "f'"] & c \arrow[l, "h"'] \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

Demonstração. **1** e **2** são triviais.

3. Temos o diagrama comutativo à direita com um isomorfismo g. Por **1**, $\mathrm{Ker}\,h = 0$ e $\ker h = 0$. Portanto, $0 \xrightarrow{0} a \xrightarrow{1_a} a$ é o diagrama de $\mathrm{co}(\ker h)$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{co}(\ker h)"'] & b \\
\mathrm{Co}(\ker h) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Ker}(\mathrm{co}\,h) \arrow[u, "\ker(\mathrm{co}\,h)"']
\end{tikzcd}$$

Assim, podemos supor que $\mathrm{Co}(\ker h) = a$ e que $\mathrm{co}(\ker h) = 1_a$. De maneira semelhante, $\mathrm{Ker}(\mathrm{co}\,h) = b$ e $\ker(\mathrm{co}\,h) = 1_b$. Agora, $g = h$.

4. Se $h = \mathrm{co}(\ker h)$, então h é epi. Seja h epi. Sendo $h = \big(\ker(\mathrm{co}\,h)\big)\,\mathrm{co}(\ker h)$ com h epi, concluímos que $\ker(\mathrm{co}\,g)$ é epi. Mas, $\ker(\mathrm{co}\,g)$ é mono. Por **3**, $\ker(\mathrm{co}\,g)$ é um isomorfismo.

5 é dual a **4**.

6 agora segue de **3**.

7. Provemos que o núcleo indicado representa o pullback. No diagrama comutativo à direita, existe um (único) morfismo $g : d \to a \times b$ tal que $f'' = \pi_a g$ e $h'' = \pi_b g$. A comutatividade do diagrama à direita é equivalente ao fato que $rg = 0$, onde $r := h\pi_a - f\pi_b a \times b \to c$. Sendo universal, o núcleo $k : \operatorname{Ker} r \to a \times b$ induz um único morfismo $\vartheta : d \to \operatorname{Ker} r$ tal que $k\vartheta = g$. Como as igualdades $f'' = \pi_a g$ e $h'' = \pi_b g$ definem g de maneira única, então ϑ é definido univocamente pelas igualdades $f'' = \pi_a k\vartheta$ e $h'' = \pi_b k\vartheta$, isto é, pelas igualdades $f'' = f'\vartheta$ e $h'' = h'\vartheta$, onde $f' := \pi_a k$ e $h' := \pi_b k$. Em outras palavras, $\operatorname{Ker} r$ é o pullback $a \times_c b$.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "h''"] \arrow[d, "f''"'] & b \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "h"] & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} h' \arrow[r, "\ker h'"] & a \times_c b \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & b \arrow[d, "f"'] \\ \operatorname{Ker} h \arrow[r, "\ker h"] & a \arrow[r, "h"] & c \end{tikzcd}$$

Suponhamos agora que no diagrama à esquerda $hf'' = 0$. Então obtemos o diagrama comutativo à direita que induz um único morfismo $g : d \to a \times_c b$ tal que $f'g = f''$ e $h'g = 0$. Logo, existe um único morfismo $j : d \to \operatorname{Ker} h'$ tal que $g = (\ker h')j$. Assim, temos um único j satisfazendo a igualdade $f'(\ker h')j = f''$. Isto significa que $f' \ker h' : \operatorname{Ker} h' \to a$ é o núcleo de $h : a \to c$.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f''"'] & b \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "h"] & c \end{tikzcd}$$

Suponhamos que h seja epi. Temos $rj_a = \big(h\pi_a - f\pi_b\big)j_a = h$. Logo, r é epi. Por **4**, $r = \operatorname{co} k$ na sequência $a \times_c b \xrightarrow{k} a \times b \xrightarrow{r} c$. Temos $h' = \pi_b k$. Se $0 = gh'$ para algum $g : b \to d$, então $0 = g\pi_b k$. Sendo $r = \operatorname{co} k$, existe um (único) morfismo $\vartheta : c \to d$ tal que $g\pi_b = \vartheta r$. Consequentemente, $0 = g\pi_b j_a = \vartheta r j_a = \vartheta(h\pi_a - f\pi_b)j_a = \vartheta h$. Daí, $\vartheta = 0$, $g\pi_b = 0$ e $g = 0$, pois h e π_b são epis.
8 é dual a **7** ∎

2.17. Definição. Denotamos $\mathrm{Co}(\ker h)\big(\simeq \mathrm{Ker}(\operatorname{co} h)\big)$ por $\mathrm{Im}\, h$, a **imagem de** h, $\mathrm{Im}\, h := \mathrm{Co}(\ker h)$. Pela Proposição 2.16.6, todo morfismo $h : a \to b$ se decompõe, univocamente, na composição do epimorfismo $\pi : a \to \mathrm{Im}\, h$ e do monomorfismo $i : \mathrm{Im}\, h \to b$, $f = i\pi$.

Lidando com uma categoria abeliana, usualmente fixamos os seguintes funtores e as correspondentes transformações naturais: $\oplus_{i=1}^n$, π_i, j_i, Ker, $\ker$, Co, co, Im, etc. Claramente, podemos fazer isto de modo que $\mathrm{Ker}(-h) = \mathrm{Ker}\, h$, $\ker(-h) = \ker h$, $\mathrm{Co}(-h) = \mathrm{Co}\, h$, $\operatorname{co}(-h) = \operatorname{co} h$ e, portanto, $\mathrm{Im}(-h) = \mathrm{Im}\, h$ para todo morfismo h.

2.18. Definição. Dizemos que a sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é **semiexata** em b se $fh = 0$. Neste caso, $h = i\pi$, onde $\pi : a \to \mathrm{Im}\, h$ é epi e $i : \mathrm{Im}\, h \to b$ é mono. Logo, $fi\pi = 0$, o que implica $fi = 0$. Consequentemente, obtemos $j : \mathrm{Im}\, h \to \mathrm{Ker}\, f$ tal que $i = (\ker f)j$. Assim, toda sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ semiexata em b gera uma decomposição de h com j mono (vide o diagrama à direita). Se j é um isomorfismo, então a sequência é dita **exata** em b. Uma sequência $\cdots \to a \to b \to c \to \dots$ é dita (**semi**)**exata** se ela é (semi) exata em cada um de seus termos. Obviamente, $0 \to a \xrightarrow{h} b$ (respectivamente, $b \xrightarrow{h} a \to 0$) é exata em a se e só se h é mono (respectivamente, epi). Agora é facil ver que o fato de a sequência $0 \to a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ ser exata é equivalente a $h = \ker f$. Para provar o fato dual que a sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c \to 0$ é exata se e só se $f = \mathrm{co}\, h$, podemos utilizar a seguinte observação.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}\, h \arrow[r, "j"] & \mathrm{Ker}\, f \arrow[d, "\ker f"] \\ a \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "h"] & b \end{tikzcd}$$

2.19. Observação. *A sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b se e só se existe uma decomposição de f, em epi e mono, dada por*
$b \xrightarrow{\mathrm{co}\, h} \mathrm{Co}\, h \xrightarrow{m} c$.

Demonstração. Suponhamos que a sequência seja exata. Utilizando a decomposição da Definição 2.17 para f e o diagrama da Definição 2.18 para h, obtemos o diagrama comutativo à direita, onde j é iso, π e p são epis e l é mono. Como $lph = 0$ e l é mono, temos $ph = 0$. Logo, existe um único $\alpha : \operatorname{Co} h \to \operatorname{Im} f$ tal que $\alpha(\operatorname{co} h) = p$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} h \arrow[r, "j"] & \operatorname{Ker} f \arrow[d, "\ker f"'] & \\
a \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{co} h"'] \arrow[dr, "p"] & c \\
& \operatorname{Co} h \arrow[r, dashed, shift right, "\alpha"'] & \operatorname{Im} f \arrow[l, dashed, shift right, "\beta"'] \arrow[u, "l"]
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, $0 = (\operatorname{co} h)h = (\operatorname{co} h)(\ker f)j\pi$. Sendo π e j epis, $(\operatorname{co} h)(\ker f) = 0$. Pela Definição 2.17, $\operatorname{Im} f \simeq \operatorname{Co}(\ker f)$. Daí obtemos um único $\beta : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Co} h$ tal que $\beta p = \operatorname{co} h$. Agora, utilizando o fato que p e $\operatorname{co} h$ são epis, é fácil ver que α e β são inversos um do outro e, assim, estabelecem um isomorfismo $\operatorname{Im} f \simeq \operatorname{Co} h$. Resta definir $m := l\alpha$.

Reciprocamente, se f é decomposto como $b \xrightarrow{\operatorname{co} h} \operatorname{Co} h \xrightarrow{m} c$ com m mono, então a sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b, pois, sendo m mono, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}\big(m(\operatorname{co} h)\big)$ "coincide" com $\operatorname{Ker}(\operatorname{co} h) = \operatorname{Im} h$ ∎

O fato obtido é dual à Definição 2.18 que, na verdade, diz que **a sequência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b se e só se h se decompõe como $a \xrightarrow{e} \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} b$ com e epi**.

2.20. Definição. Seja $a \in \mathcal{C}$. Dizemos que $f : x \to a$ e $f' : x' \to a$ são **equivalentes**, $f \equiv f'$, se existem epimorfismos $\vartheta : y \to x$ e $\vartheta' : y \to x'$ tais que $f\vartheta = f'\vartheta'$. Mostremos que $f \equiv f'$ e $f' \equiv f''$ implicam $f \equiv f''$. Realmente, temos o diagrama comutativo à direita com ϑ, ϑ', ϑ'_1 e ϑ'' epis. Pela Proposição 2.16.7, p e p' são epis. Agora $f\vartheta p = f''\vartheta'' p'$ com ϑp e $\vartheta'' p'$ epis. Assim, obtemos uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência se chama de **membro** de a, $x \in_m a$. Podemos falar sobre a **imagem** de um membro: Seja $x \in_m a$, $f : x \to a$, um membro e seja $h : a \to b$ um morfismo. Então $hf : x \to b$ define a imagem $hx \in_m b$. É fácil ver que $x \equiv x'$ implica $hx \equiv hx'$. Também faz sentido dizer $-x \in_m a$ ou $x \equiv 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & & y \times_{x'} y' \arrow[dll, "p"'] \arrow[drr, "p'"] & & \\
y \arrow[d, "\vartheta"'] \arrow[drr, "\vartheta'"] & & & & y' \arrow[dll, "\vartheta'_1"'] \arrow[d, "\vartheta''"] \\
x \arrow[drr, "f"] & & x' \arrow[d, "f'"] & & x'' \arrow[dll, "f''"'] \\
 & & a & &
\end{tikzcd}$$

Os membros substituem elementos na caça em diagramas:

2.21. Proposição (as regras elementares para caça em diagramas).

1. *Um morfismo* $h : a \to b$ *é nulo se e só se* $hx \equiv 0$ *para todo* $x \in_m a$.
2. *Um morfismo* $h : a \to b$ *é mono se e só se* $hx \equiv 0$ *implica* $x \equiv 0$ *para todo* $x \in_m a$ *(ou, equivalentemente,* $hx \equiv hx'$ *implica* $x \equiv x'$ *para todos* $x, x' \in_m a$*).*
3. *Um morfismo* $h : a \to b$ *é epi se e só se, para todo* $y \in_m b$*, existe um* $x \in_m a$ *tal que* $hx \equiv y$*.*
4. *Uma sequência* $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ *é exata em* b *se e só se* $fh = 0$ *e, para qualquer* $y \in_m b$ *com* $fy \equiv 0$*, existe um* $x \in_m a$ *tal que* $hx \equiv y$*.*
5 (subtração). *Sejam dados um morfismo* $h : a \to b$ *e dois membros* $x, y \in_m a$ *tais que* $hx \equiv hy$*. Então existe* $z \in_m a$ *(podemos denotar* $z \equiv x - y$*) tal que* $hz \equiv 0$ *e, para qualquer morfismo* $f : a \to c$*, temos* $fx \equiv 0 \Longrightarrow fz \equiv -fy$ *e* $fy \equiv 0 \Longrightarrow fz \equiv fx$*.*

Demonstração. **1.** Como $1_a : a \to a$ induz $a \in_m a$, então $ha \equiv 0$ implica $h = 0$.
2. Se h é mono e $hx \equiv hx'$ para $f : x \to a$ e $f' : x' \to a$, então $hf\vartheta = hf'\vartheta'$ para epimorfismos ϑ e ϑ' apropriados. Isto implica $f\vartheta = f'\vartheta'$ e assim $x \equiv x'$.

Reciprocamente, seja $hf = 0$ para algum $f : x \to a$. Então $x \equiv 0$ e existe um epimorfismo $\vartheta : z \to x$ tal que $f\vartheta = 0$. Logo, $f = 0$. Assim concluímos que h é mono.

$$\begin{tikzcd} a \times_b y \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & y \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

3. Suponhamos que h seja epi. Seja $y \in_m b$, $f : y \to b$. No diagrama à esquerda, h' é epi pela Proposição 1.16.7. Assim obtemos um membro $x = a \times_b y \in_m a$ tal que $hx \equiv y$. Reciprocamente, aplicando a propriedade de h ao membro $y := b \in_m b$, obtemos o diagrama comutativo à direita com ϑ e ϑ' epis. Sendo h divisor à esquerda do epimorfismo ϑ', concluímos que h é epi.

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d, "\vartheta"'] \arrow[dr, "\vartheta'"] & \\ x \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \\ a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

4. Suponhamos que a sequência seja exata em b. Seja $y \in_m b$, $g : y \to b$, com $fy \equiv 0$.

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[d, "t"] \arrow[ddr, "g"] & & \\ a \times_{\mathrm{Im}\,h} y \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[d] & \mathrm{Im}\,h \arrow[dr, "\ker f"] & & \\ a \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "h"'] & & b \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Então, para um epimorfismo $\vartheta : z \to y$, temos $fg\vartheta = 0$. Logo, $fg = 0$ e $g = (\ker f)t$ para algum $t : y \to \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, h$. No diagrama à esquerda, $h = (\ker f)\pi$ com π epi. Pela Proposição 1.16.7, π' é epi e $hx \equiv y$, onde $x := a \times_{\mathrm{Im}\,h} y \in_m a$.

Reciprocamente, aplicando a propriedade ao membro $y := \operatorname{Ker} f \in_m b$, obtemos o diagrama à direita com ϑ e ϑ' epis. Isto é, $(\ker f)j\pi g\vartheta' = (\ker f)\vartheta$, ou seja, $j\pi g\vartheta' = \vartheta$, implicando que j é epi.

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, "\vartheta'"'] \arrow[dr, "\vartheta"] & & \\ x \arrow[dr, "g"'] & \operatorname{Im} h \arrow[r, "j"] & \operatorname{Ker} f \arrow[d, "\ker f"'] & \\ & a \arrow[u, "\pi"'] \arrow[r, "h"'] & b \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

5. Temos o diagrama comutativo à direita abaixo com ϑ e ϑ' epis. Agora, $z \in_m a$ desejado é $u\vartheta - v\vartheta' : z \to a$ ■

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, "u"] & a \arrow[dr, "h"] & \\ z \arrow[ur, "\vartheta"] \arrow[dr, "\vartheta'"'] & & & b \\ & y \arrow[r, "v"] & a \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

A Proposição 2.21 possibilita aplicar os argumentos usuais na caça em diagramas. A “receita” é provar primeiramente um fato com uso de elementos como na categoria **Ab** e trocar depois “elementos” por “membros”. O único lugar em que isto não funciona é na construção de morfismos. Um exemplo disto é o seguinte lema.

2.22. Lema (da serpente). *Dado um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_1"'] & a_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & b_1 \arrow[r, "j"] & b_2 \arrow[r, "\pi"] & b_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com linhas exatas, então existe um morfismo $\delta : \operatorname{Ker} h_3 \to \operatorname{Co} h_1$ tal que a *sequência*

(2.22.1)

$$0 \to \mathrm{Ker}\, h_1 \xrightarrow{i'} \mathrm{Ker}\, h_2 \xrightarrow{p'} \mathrm{Ker}\, h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Co}\, h_1 \xrightarrow{j'} \mathrm{Co}\, h_2 \xrightarrow{\pi'} \mathrm{Co}\, h_3 \to 0$$

é exata, onde os morfismos i', p', j' e π' são induzidos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, h_1 \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\ker h_1"'] & \mathrm{Ker}\, h_2 \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\ker h_2"'] & \mathrm{Ker}\, h_3 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\ker h_3"'] & {} \\
0 \arrow[r] & a_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_1"'] & a_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & b_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathrm{co}\, h_1"'] & b_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{co}\, h_2"'] & b_3 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{co}\, h_3"'] & 0 \\
{} \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Co}\, h_1 \arrow[r, "j'"] & \mathrm{Co}\, h_2 \arrow[r, "\pi'"] & \mathrm{Co}\, h_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Para definir δ consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & a_1 \arrow[r, "\ker q"] \arrow[d, "1_{a_1}"'] & a_2 \times_{a_3} \mathrm{Ker}\, h_3 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{Ker}\, h_3 \arrow[r] \arrow[d, "\ker h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & a_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_1"'] & a_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & b_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathrm{co}\, h_1"'] & b_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "c"'] & b_3 \arrow[r] \arrow[d, "1_{b_3}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Co}\, h_1 \arrow[r, "g"] & \mathrm{Co}\, h_1 \sqcup_{b_1} b_2 \arrow[r, "\mathrm{co}\, g"] & b_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sendo p epi e sendo j mono, pela Proposição 2.16.7 (e 2.16.8), q é epi, g é mono, as linhas no diagrama são exatas e o diagrama é comutativo. Consideremos o morfismo $\delta_0 := ch_2 k$. Temos $\delta_0(\ker q) = 0$ e $q = \mathrm{co}(\ker q)$. Logo, existe um morfismo $u : \mathrm{Ker}\, h_3 \to \mathrm{Co}\, h_1 \sqcup_{b_1} b_2$ tal que $uq = \delta_0$. Sendo $0 = (\mathrm{co}\, g)\delta_0 = (\mathrm{co}\, g)uq$ com q epi, concluímos que $(\mathrm{co}\, g)u = 0$. De $g = \ker(\mathrm{co}\, g)$ segue que existe um morfismo $\delta : \mathrm{Ker}\, h_3 \to \mathrm{Co}\, h_1$ tal que $g\delta = u$.

Agora descrevemos δ usando membros. Seja $x \in_m \operatorname{Ker} h_3$, $f : x \to \operatorname{Ker} h_3$. Pela Proposição 2.21.3, existe $x_2 \in_m a_2$, $f_2 : x_2 \to a_2$, tal que $px_2 \equiv (\ker h_3)x$. Como $0 \equiv h_3(\ker h_3)x \equiv h_3 p x_2 \equiv \pi h_2 x_2$ e a sequência $0 \to b_1 \to b_2 \to b_3 \to 0$ é exata em b_2, então, pela Proposição 2.21.4, existe $y_1 \in_m b_1$ tal que $jy_1 \equiv h_2x_2$. Façamos $y \equiv (\operatorname{co} h_1)y_1$ e mostremos que $y \equiv \delta x$. (Pela Proposição 2.21.1, isto define δ univocamente.) Pela Proposição 2.21.2, é suficiente demonstrar que $gy \equiv g\delta x$, pois g é mono. Em outras palavras, precisamos verificar que $g(\operatorname{co} h_1)y_1 \equiv ux$, isto é, que $ch_2x_2 \equiv ux$. Se encontramos $z \in_m a_2 \times_{a_3} \operatorname{Ker} h_3$ tal que $qz \equiv x$ e $kz \equiv x_2$,

(2.22.2)

$$\begin{tikzcd}
 & & & x \arrow[d, "\ker h_3"'] \\
 & & x_2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h_2"'] & (\ker h_3)x \\
 & y_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\operatorname{co} h_1"'] & h_2x_2 & \\
 & (\operatorname{co} h_1)y_1 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, "f"] & \operatorname{Ker} h_3 \arrow[dr, "\ker h_3"'] & \\
z \arrow[ur, "\vartheta"] \arrow[dr, "\vartheta'"'] & & & a_3 \\
 & x_2 \arrow[r, "f_2"] & a_2 \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

então $ch_2x_2 \equiv ch_2kz \equiv \delta_0 z \equiv uqz \equiv ux$ e tudo está feito. Para alguns epimorfismos ϑ e ϑ' temos o diagrama comutativo à direita.

Portanto, existe um morfismo $\varepsilon : z \to a_2 \times_{a_3} \operatorname{Ker} h_3$ tal que $q\varepsilon = f\vartheta$ e $k\varepsilon = f_2\vartheta'$. Em outras palavras, $z \in_m a_2 \times_{a_3} \operatorname{Ker} h_3$, $qz \equiv x$ e $kz \equiv x_2$. A exatidão da sequência (2.22.1) pode ser obtida pela caça no diagrama do lema usando a Proposição 2.21 e a "definição" (2.22.2) do morfismo δ. Deixamos tal demonstração a cargo do leitor ■

2.23. Observação. *A* Ker-Coker-*sequência é funtorial. Isto significa o seguinte. Suponhamos que* (h_1, h_2, h_3) *e* (h'_1, h'_2, h'_3) *participem nos diagramas comutativos* D *e* D' *com linhas exatas, como aquele do Lema* 2.2.2, *e seja* $D \to D'$ *um morfismo entre os diagramas dado por morfismos* $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ (*isto significa que a parte correspondente do diagrama no próximo slide é comutativa*). *Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h_1 \arrow[r] \arrow[d, "f'_1"'] & \operatorname{Ker} h_2 \arrow[r] \arrow[d, "f'_2"'] & \operatorname{Ker} h_3 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f'_3"'] & \operatorname{Co} h_1 \arrow[r] \arrow[d, "g'_1"'] & \operatorname{Co} h_2 \arrow[r] \arrow[d, "g'_2"'] & \operatorname{Co} h_3 \arrow[r] \arrow[d, "g'_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h'_1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h'_2 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h'_3 \arrow[r, "\delta'"] & \operatorname{Co} h'_1 \arrow[r] & \operatorname{Co} h'_2 \arrow[r] & \operatorname{Co} h'_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde todos os morfismos, além de δ *e* δ', *são induzidos.*

Demonstração. Já que todos os morfismos, além de δ e δ', são induzidos, resta mostrar a comutatividade do quadrado central (pois os outros quadrados são comutativos pelo fato que Ker e Co são funtores). Isto se faz pela caça no diagrama abaixo utilizando a "definição" (2.22.2) de δ e δ'

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & & \mathrm{Ker}\, h_3' \arrow[r, "\delta'"] \arrow[dd] & {} \\
 & & & & & & \mathrm{Ker}\, h_3 \arrow[r, "\delta"] \arrow[urr, "f_3'"] \arrow[dd] & {} & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & a_1' \arrow[rr] \arrow[dd, "h_1'"] & & a_2' \arrow[rrr] \arrow[dd, "h_2'"] & & & a_3' \arrow[r] \arrow[dd, "h_3'"] & 0 \\
 0 \arrow[rr] & & a_1 \arrow[rr] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dd, "h_1"] & & a_2 \arrow[rr] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dd, "h_2"] & & a_3 \arrow[r] \arrow[urr, "f_3"] \arrow[dd, "h_3"] & 0 & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & b_1' \arrow[rr] \arrow[dd] & & b_2' \arrow[rrr] & & & b_3' \arrow[r] & 0 \\
 0 \arrow[rr] & & b_1 \arrow[rr] \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dd] & & b_2 \arrow[rr] \arrow[ur, "g_2"] & & b_3 \arrow[r] \arrow[urr, "g_3"] & 0 & & \\
 & {} \arrow[rr, "\delta'"] & & \mathrm{Co}\, h_1' & & & & & & \\
 {} \arrow[rr, "\delta"] & & \mathrm{Co}\, h_1 \arrow[ur, "g_1'"] & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

∎

Outros exemplos de aplicação de caça em diagramas são os “4-lema” e “5-lema”.

2.24. Lema (4-lema). *Seja dado um diagrama comutativo à esquerda com a primeira linha semiexata em a_2 e exata em a_3 e com a segunda linha exata em b_2. Se h_2 e h_4 são monos e h_1 é epi, então h_3 é mono.*

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & a_4 \arrow[d, "h_4"'] \\ b_1 \arrow[r, "g_1"] & b_2 \arrow[r, "g_2"] & b_3 \arrow[r, "g_3"] & b_4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & a_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & a_5 \arrow[d, "h_5"'] \\ b_2 \arrow[r, "g_2"] & b_3 \arrow[r, "g_3"] & b_4 \arrow[r, "g_4"] & b_5 \end{tikzcd}$$

Seja dado um diagrama comutativo à direita com a primeira linha exata em a_4 e com a segunda linha exata em b_3 e semiexata em b_4. Se h_2 e h_4 são epis e h_5 é mono, então h_3 é epi ∎

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & a_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & a_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & a_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & a_5 \arrow[d, "h_5"'] \\ b_1 \arrow[r, "g_1"] & b_2 \arrow[r, "g_2"] & b_3 \arrow[r, "g_3"] & b_4 \arrow[r, "g_4"] & b_5 \end{tikzcd}$$

2.25. Corolário (5-lema). *Seja dado um diagrama comutativo acima com a primeira linha semiexata em a_2 e exata em a_3 e a_4, com a segunda linha exata em b_2 e b_3 e semiexata em b_4. Se h_1 é epi, h_5 é mono, h_2 e h_4 são isomorfismos, então h_3 é um isomorfismo* ∎

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Prove a seguinte versão do lema de Yoneda.

Denotamos por $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ a categoria seguinte:

• Um objeto de $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ tem a forma $(\mathcal{C}, F, c)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria arbitrária (isto é, $\mathcal{C} = *$), $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é um funtor e $c \in \mathcal{C}$.

• Um morfismo em $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times *$ entre $(\mathcal{C}, F, c)$ e $(\mathcal{C}', F', c')$ tem a forma (G, t, f), onde $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor, $t : F \to F' \circ G$ é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ e $f : Gc \to c'$ é um morfismo em $\mathcal{C}'$.

• A composição entre $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \to (\mathcal{C}', F', c')$ e $(G', t', f') : (\mathcal{C}', F', c') \to (\mathcal{C}'', F'', c'')$ é definida pela regra $(G', t', f') \circ (G, t, f) := \big(G' \circ G, (t' \circ G) \circ t, f' \circ G'f\big)$.

O funtor $-_2 -_3 : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \to \mathbf{Set}$ é definido como $-_2 -_3 (\mathcal{C}, F, c) := Fc$ para um objeto $(\mathcal{C}, F, c)$ e $-_2 -_3 (G, t, f) := (F'f) \circ t_c : Fc \to F'c'$ para um morfismo $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \to (\mathcal{C}', F', c')$.

O funtor
$T := \mathbf{Cat}(-_1, \mathbf{Set})\big(\ -_1\ (-_3, -_4), -_2\ -_4\ \big) : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \to \mathbf{Set}$, onde $-_1 \in \mathbf{Cat}$, $-_2 \in \mathbf{Cat}(-_1, \mathbf{Set})$, $-_3, -_4 \in -_1$, é definido de maneira seguinte. Para um objeto $(\mathcal{C}, F, c)$, façamos
$T(\mathcal{C}, F, c) := \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})\big(\mathcal{C}(c, -), F\big)$. Para um morfismo $(G, t, f) : (\mathcal{C}, F, c) \to (\mathcal{C}', F', c')$, façamos
$T(G, t, f) : \big(\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F\big) \mapsto \big(\mathcal{C}'(c', -) \xrightarrow{\alpha'} F'\big)$, onde
$\alpha'_{x'} : (c' \xrightarrow{g} x') \mapsto \big((F'g) \circ (F'f) \circ t_c \circ \alpha_c\big)1_c$.
A transformação natural $y : \mathbf{Cat}(-_1, \mathbf{Set})\big(\ -_1\ (-_3, -_4), -_2\ -_4\ \big) \to -_2 -_3$ de fato mencionada no lema de Yoneda se aplica para os funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Set}) \times * \to \mathbf{Set}$.

3. Se ainda está vivo/viva, imagine que, talvez, a naturalidade do exercício anterior pode ser estendida para funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \dagger) \times * \to \dagger$, onde $\dagger$ denota uma categoria arbitrária $\mathcal{S}$ que possui produtos finitos (e objeto final), usando o conceito de categoria $\mathcal{S}$ no lugar de $\mathbf{Set}$: para "$c, c' \in \mathcal{C}$", temos "$\mathcal{C}(c, c') \in \mathcal{S}$" ... Assim, como resultado, obtemos somente uma forma: só **Cat** faz sentido ...

4. Responda à pergunta da nota de rodapé 7 na página 17 das notas de aula.

5. Encontre uma demonstração envolvendo uso de membros para a primeira parte do Lema 2.24. Tente adotá-la para a segunda parte.