Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan′in

ICMC, USP, São Carlos

14/10/2015 – 11/11/2015

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k-simplexo** (**padrão**) Δ_k é o **envelope convexo** dos $e_0, \dots, e_k$, isto é, o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ que contém os $e_0, \dots, e_k$. O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{\sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1,$ $x_0, \dots, x_k \geqslant 0\}$. Sejam $0 \leqslant i \leqslant k$ com $k \geqslant 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ a função da **i-ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geqslant 1$ e $0 \leqslant i < j \leqslant k+1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k-simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \to X$. Denotamos por $S_k X := \{\sum_\sigma c_\sigma \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X),\ c_\sigma \in \mathbb{Z}\}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k-simplexos singulares em X. Se $f : X \to X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_\sigma c_\sigma \sigma) := \sum_\sigma c_\sigma f \sigma$, obtendo assim um **funtor** $\mathbf{Esp} \xrightarrow{S_k} \mathbf{Ab}$. Em seguida, frequentemente escrevemos f no lugar de $S_k f$. Os elementos de $S_k X$ são ditos **k-cadeias**. Por definição, $S_k := 0$ **para** $k < 0$.

A regra $\partial_k\sigma := \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \to S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ **se** $k \leqslant 0$). Verifiquemos que $\partial_k\partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \to X$ um $(k+1)$-simplexo singular, então

$$\partial_k\partial_{k+1}\sigma = \partial_k\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\sigma\partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant k\\ 0\leqslant j\leqslant k+1}}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^j\partial_k^i =$$

$$= \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k+1}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^j\partial_k^i + \sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant k}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^j\partial_k^i$$

e, em vista de $\partial_{k+1}^j\partial_k^i = \partial_{k+1}^i\partial_k^{j-1}$,

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k+1}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^j\partial_k^i = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k+1}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^i\partial_k^{j-1} =$$

$$= -\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k}(-1)^{i+j}\sigma\partial_{k+1}^i\partial_k^j,$$

mostrando que $\partial^2 = 0$ (em seguida, frequentemente omitimos índices caso isto não cause confusões).

Temos também uma transformação natural $\deg : S_0 \to \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \to \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}} X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}} f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \to S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1}\partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \deg_X \cdot c$. Em particular, $\operatorname{Im} \partial_{k+1} = \operatorname{Ker} \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \to X$ um simplexo singular. Definamos $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \to X$ pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0)\sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se} \quad x_0 \neq 1 \\ c & \text{se} \quad x_0 = 1 \end{cases}$$

É fácil ver que $(c_k \cdot \sigma)\partial^{i+1}_{k+1} = c_{k-1} \cdot (\sigma \partial^i_k)$ se $k > 0$ e $0 \leqslant i \leqslant k$, que $(c_k \cdot \sigma)\partial^0_{k+1} = \sigma$ se $k \geqslant 0$ e que $(c_0 \cdot \sigma)\partial^1_1 = c$, onde c denota o simplexo singular $\Delta_0 \to X$ com a imagem c. Daí segue a primeira afirmação.
A segunda é um fato geral: se $\partial_k x = 0$, então
$x = \partial c_k x + c_{k-1}\partial x = \partial c_k x$ ■

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \to S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \to S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k, já construímos transformações naturais $s_i : S_i \to S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1}\partial$ para todo $i < k$.
Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k\Delta_k$, temos

$$\partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1}\partial 1_{\Delta_k}) = f_{k-1}\partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1})\partial 1_{\Delta_k} =$$

$$= f_{k-1}\partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2}\partial)\partial 1_{\Delta_k} = 0$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em $\mathbb{R}^n$.
Consideremos o caso $k = 0$. De $\deg f_0 = 0$ e $\partial c_0 = 1_{S_0\Delta_0} - \deg \cdot c$ para qualquer $c \in \Delta_1 \times \Delta_0 \simeq \Delta_1$ (vide o Lema 3.1.1), obtemos

$$f_0 1_{\Delta_0} - s_{-1}\partial 1_{\Delta_0} = f_0 1_{\Delta_0} = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} + \deg(f_0 1_{\Delta_0})c = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} = \partial f_1 c_0 1_{\Delta_0}$$

e definamos $b_0 := f_1 c_0 1_{\Delta_0} \in S_1(\Delta_1 \times \Delta_0)$. Temos $f_0 1_{\Delta_0} = \partial b_0 + s_{-1}\partial 1_{\Delta_0}$.

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1}\partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1}\partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \to S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k\sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma)b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \to X$ é um k-simplexo singular em X. Então, para quaisquer seta $f : X \to X'$ em **Esp** e k-simplexo singular $\sigma : \Delta_k \to X$ em X, temos $(1_{\Delta_1} \times f)s_k\sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma)b_k = (1_{\Delta_1} \times f\sigma)b_k = s_k(f\sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k.

Finalmente, pela naturalidade de f_k e de s_{k-1}, obtemos $f_k\sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma)f_k$ e $(1_{\Delta_1} \times \sigma)s_{k-1} = s_{k-1}\sigma$ para qualquer função contínua $\sigma : \Delta_k \to X$ (que é nada mais do que um k-simplexo singular em X). Agora,

$$f_k\sigma = f_k\sigma 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma)f_k 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma)(\partial b_k + s_{k-1}\partial 1_{\Delta_k}) =$$

$$= \partial(1_{\Delta_1}\times\sigma)b_k + (1_{\Delta_1}\times\sigma)s_{k-1}\partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k\sigma + s_{k-1}\sigma\partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k\sigma + s_{k-1}\partial\sigma,$$

pois $(1_{\Delta_1} \times \sigma)\partial = \partial(1_{\Delta_1} \times \sigma)$ e $\sigma\partial = \partial\sigma$ (usamos aqui o fato que ∂ é uma transformação natural) ∎

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares "espaço topológico e seu subespaço". Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X,S), onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$ é um subespaço em X. Uma seta $(X,S) \xrightarrow{f} (X',S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em $\mathbf{Esp}$ tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X,S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_kS \overset{i}{\hookrightarrow} S_kX$ e definimos $S_k(X,S) := S_kX/S_kS$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X,S) \to S_{k-1}(X,S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \varnothing$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \to \mathbf{Ab}$.

Definamos $\mathrm{H}_k(X,S;\,\mathbb{Z}) := \operatorname{Ker}\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1}$. É imediato que $\mathrm{H}_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \to \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado ***k*-homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam* $(X,S),(X',S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ *e seja* $h : \Delta_1 \times (X,S) \to (X',S')$ *uma homotopia em* $\mathbf{Esp}^{(2)}$ *(isto é, uma seta* $h : \Delta_1 \times X \to X'$ *em* $\mathbf{Esp}$ *tal que* $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$*). Então* $\mathrm{H}_k\, h^0 = \mathrm{H}_k\, h^1$*, onde* $h^t : (X,S) \to (X',S')$ *é dado por* $h^t x := h(t,x)$*.*

Demonstração. Seja $t \in \Delta_1$. A função contínua $g^t : X \to \Delta_1 \times X$, definida pela regra $g^t : x \mapsto (t,x)$, é uma transformação natural em X tal que $hg^t = h^t$. Temos transformações naturais induzidas

$g_k^t : S_k \to S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t, definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \to S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \to S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \to S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos s_k's aplicada ao morfismo $S \overset{i}{\hookrightarrow} X$, concluímos que $s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \to S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \to S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e $s_k : S_k(X, S) \to S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido $f_k = \partial s_k + s_{k-1}\partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1}\partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \to (X', S')$ induz os homomorfismos $h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \to S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $hg^t = h^t$ segue $h_k g_k^t = h_k^t$. Logo, $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1}\partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1}\partial$. Seja $z \in \operatorname{Ker}\partial_k$. Então $(h_k^1 - h_k^0)z = \partial h_{k+1} s_k z \in \operatorname{Im}\partial_{k+1}$. Isto implica $\mathrm{H}_k\, h^0 = \mathrm{H}_k\, h^1$ ■

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Denotamos por $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, onde $* \in \{\varnothing, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$-complexos**, isto é, sequências semiexatas em $\mathcal{C}$

$$C^\bullet: \quad \dots \xrightarrow{d^{i-1}_{C^\bullet}} C^i \xrightarrow{d^i_{C^\bullet}} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}_{C^\bullet}} \dots$$

com a condição:

$\varnothing$	nada.
$+$	existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
$-$	existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
b	existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d^i_{C^\bullet}$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i : C^i \to D^i$ compatíveis com os $d^\bullet_\bullet$'s, isto é, $h^{i+1}d^i_{C^\bullet} = d^i_{D^\bullet}h^i$ para todo i. Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria se definirmos $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$. Ela possui biprodutos $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^i := C^i \oplus D^i$ com projeções e injeções óbvias. Ela tem objeto nulo $0^i := 0$. Possui núcleos e conúcleos:

por exemplo, $(\operatorname{Ker} h^\bullet)^i := \operatorname{Ker} h^i$ com o morfismo $\ker h^\bullet : \operatorname{Ker} h^\bullet \to C^\bullet$ feito de morfismos $\ker h^i$ e com $d^i_{\operatorname{Ker} h^\bullet}$ induzido por $d^i_{C^\bullet}$ e $d^i_{D^\bullet}$. Obviamente, $h^\bullet$ é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\operatorname{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma categoria abeliana.

Seja $C^\bullet$ um complexo. Denotemos $\mathrm{B}^i\, C^\bullet := \operatorname{Im} d^{i-1}_{C^\bullet}$ e $\mathrm{Z}^i\, C^\bullet := \operatorname{Ker} d^i_{C^\bullet}$. Temos a decomposição de $d^{i-1}_{C^\bullet}$ no diagrama à direita com $j^i_{C^\bullet}$ mono (vide a Definição 2.18). Façamos $\mathrm{H}^i\, C^\bullet := \operatorname{Co} j^i_{C^\bullet}$. Em outras palavras, a sequência

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[d, "\ker d^i_{C^\bullet}"] \\ C^{i-1} \arrow[u, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[r, "d^{i-1}_{C^\bullet}"] & C^i \end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathrm{B}^i\, C^\bullet \xrightarrow{j^i_{C^\bullet}} \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \xrightarrow{\operatorname{co} j^i_{C^\bullet}} \mathrm{H}^i\, C^\bullet \to 0$$

é exata.

Seja $h^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ um morfismo entre complexos. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} C^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-2}"'] & C^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{C^\bullet}"] & C^i \arrow[r, "d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "h^{i+1}"'] \\ D^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{D^\bullet}"] & D^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, D^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "d^i_{D^\bullet}"] & D^{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "m^i_{C^\bullet}"] & C^i \arrow[r, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
D^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "m^i_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{D^\bullet}"] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{D^\bullet} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

As setas h^i e h^{i+1} induzem o morfismo $\mathrm{Z}^i\, h^\bullet : \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \to Z^i D^\bullet$ que faz o diagrama à direita comutativo. As setas h^{i-1} e h^i induzem o morfismo $g : \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C^\bullet} \to \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{D^\bullet}$ que faz o diagrama acima comutativo, onde

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^i\, h^\bullet"'] & C^i \arrow[r, "d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "h^{i+1}"'] \\
\mathrm{Z}^i\, D^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "d^i_{D^\bullet}"] & D^{i+1}
\end{tikzcd}$$

$m^i_{C^\bullet} = \ker(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet}) : \mathrm{B}^i\, C^\bullet = \mathrm{Im}\, d^{i-1}_{C^\bullet} = \mathrm{Ker}(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet}) \to C^i$ e
$m^i_{D^\bullet} = \ker(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{D^\bullet}) : \mathrm{B}^i\, D^\bullet = \mathrm{Im}\, d^{i-1}_{D^\bullet} = \mathrm{Ker}(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{D^\bullet}) \to D^i$ são os monomorfismos participando nas decomposições dos morfismos $d^{i-1}_{C^\bullet}$ e $d^{i-1}_{D^\bullet}$ (vide a Definição 2.17). Assim, as setas h^i e g induzem o morfismo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "m^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i\, h^\bullet"'] & C^i \arrow[r, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
\mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "m^i_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{D^\bullet}"] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{D^\bullet} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{B}^i\, h^\bullet : \mathrm{B}^i\, C^\bullet \to \mathrm{B}^i\, D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

Consequentemente, no diagrama à direita temos $m^i_{D^\bullet}(\mathrm{B}^i\, h^\bullet)\pi^i_{C^\bullet} = h^i m^i_{C^\bullet}\pi^i_{C^\bullet} = m^i_{D^\bullet}\pi^i_{D^\bullet}h^{i-1}$. Sendo $m^i_{D^\bullet}$ mono, concluímos que $\pi^i_{D^\bullet}h^{i-1} = (\mathrm{B}^i\, h^\bullet)\pi^i_{C^\bullet}$, isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo. Resumindo, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} C^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "m^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i\, h^\bullet"'] & C^i \arrow[d, "h^i"'] \\ D^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "m^i_{D^\bullet}"] & D^i \end{tikzcd}$$

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd} C^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-2}"'] & C^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i\, h^\bullet"'] & \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^i\, h^\bullet"'] & C^i \arrow[r, "d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "h^{i+1}"'] \\ D^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{D^\bullet}"] & D^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, D^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "d^i_{D^\bullet}"] & D^{i+1} \end{tikzcd}$$

O quadrado central é comutativo, pois $\ker d^i_{D^\bullet}(\mathrm{Z}^i\, h^\bullet)j^i_{C^\bullet}\pi^i_{C^\bullet} =$
$= h^i(\ker d^i_{C^\bullet})j^i_{C^\bullet}\pi^i_{C^\bullet} = (\ker d^i_{D^\bullet})j^i_{D^\bullet}\pi^i_{D^\bullet}h^{i-1} = (\ker d^i_{D^\bullet})j^i_{D^\bullet}(\mathrm{B}^i\, h^\bullet)\pi^i_{C^\bullet}$ com

(3.2.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i\, h^\bullet"'] & \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[r, "\mathrm{co}\, j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^i\, h^\bullet"'] & \mathrm{H}^i\, C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i\, h^\bullet"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, D^\bullet \arrow[r, "\mathrm{co}\, j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{H}^i\, D^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\pi^i_{C^\bullet}$ epi e $\ker d^i_{D^\bullet}$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i, Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i, Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}+f^{i-1}"'] & \mathrm{B}^i\, C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i(h^\bullet+f^\bullet)"'] & \mathrm{Z}^i\, C^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^i(h^\bullet+f^\bullet)"'] & C^i \arrow[d, "h^i+f^i"'] \\
D^{i-1} \arrow[r, "\pi^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{B}^i\, D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i\, D^\bullet \arrow[r, "\ker d^i_{D^\bullet}"] & D^i
\end{tikzcd}$$

comutativo, onde $\mathrm{Z}^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i)\ker d^i_{C^\bullet} = h^i \ker d^i_{C^\bullet} + f^i \ker d^i_{C^\bullet} = (\ker d^i_{D^\bullet})\mathrm{Z}^i h^\bullet + (\ker d^i_{D^\bullet})\mathrm{Z}^i f^\bullet = \ker d^i_{D^\bullet}(\mathrm{Z}^i h^\bullet + \mathrm{Z}^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $\mathrm{Z}^i(h^\bullet + f^\bullet) = \mathrm{Z}^i\, h^\bullet + \mathrm{Z}^i\, f^\bullet$. Daí, Z^i é aditivo. Analogamente, $\pi^i_{D^\bullet}(h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi^i_{D^\bullet} h^{i-1} + \pi^i_{D^\bullet} f^{i-1} = (\mathrm{B}^i h^\bullet)\pi^i_{C^\bullet} + (\mathrm{B}^i f^\bullet)\pi^i_{C^\bullet} = (\mathrm{B}^i h^\bullet + \mathrm{B}^i f^\bullet)\pi^i_{C^\bullet}$. Logo, pela unicidade de $\mathrm{B}^i(h^\bullet + f^\bullet)$, concluímos que $\mathrm{B}^i(h^\bullet + f^\bullet) = \mathrm{B}^i\, h^\bullet + \mathrm{B}^i\, f^\bullet$. Daí, B^i é aditivo. Da unicidade do morfismo entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i, existem dois únicos morfismos $\alpha^i_{C^\bullet}$ e $\beta^i_{C^\bullet}$ que fazem o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}^i C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] \arrow[u] & \mathrm{Z}^i C^\bullet \arrow[r, "\mathrm{co}\, j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\ker d^i_{C^\bullet}"'] & \mathrm{H}^i C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^i_{C^\bullet}"'] & 0 \\
 & C^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[u, "\pi^i_{C^\bullet}"] & C^i \arrow[r, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "d^i_{C^\bullet}"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "\beta^i_{C^\bullet}"'] & 0 \\
 & & C^{i+1} \arrow[r, "1_{C^{i+1}}"] & C^{i+1} &
\end{tikzcd}$$

comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é funtorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).

Demonstração. Sendo $d^i_{C^\bullet} d^{i-1}_{C^\bullet} = 0$, obtemos $d^i_{C^\bullet} = \beta^i_{C^\bullet}(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet})$ para um único $\beta^i_{C^\bullet}$. De $0 = (\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet})(d^{i-1}_{C^\bullet}) = (\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet})(\ker d^i_{C^\bullet})\, j^i_{C^\bullet} \pi^i_{C^\bullet}$ e de $\pi^i_{C^\bullet}$ ser epi, concluímos que $(\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C^\bullet})(\ker d^i_{C^\bullet}) j^i_{C^\bullet} = 0$.

Logo, existe um único $\alpha^i_{C^\bullet}$ que faz o diagrama do lema comutativo.
Por caça em diagrama, é fácil provar que $\alpha^i_{C^\bullet}$ é mono e que $\alpha^i_{C^\bullet} = \ker \beta^i_{C^\bullet}$.

$$\begin{tikzcd}
C^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^{i-1}"'] & C^i \arrow[r, "\operatorname{co} d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "h^i"'] & \operatorname{Co} d^{i-1}_{C^\bullet} \arrow[r, "\beta^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\overline{h}^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "h^{i+1}"'] \\
D^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{D^\bullet}"] & D^i \arrow[r, "\operatorname{co} d^{i-1}_{D^\bullet}"] & \operatorname{Co} d^{i-1}_{D^\bullet} \arrow[r, "\beta^i_{D^\bullet}"] & D^{i+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Z}^i D^\bullet \arrow[rr, "\operatorname{co} j^i_{D^\bullet}"] \arrow[dd, "\ker d^i_{D^\bullet}"] & & \mathrm{H}^i D^\bullet \arrow[dd, "\alpha^i_{D^\bullet}"] \\
\mathrm{Z}^i C^\bullet \arrow[ur, "\mathrm{Z}^i h^\bullet"] \arrow[rr, "\operatorname{co} j^i_{C^\bullet}"] \arrow[dd, "\ker d^i_{C^\bullet}"] & & \mathrm{H}^i C^\bullet \arrow[ur, "\mathrm{H}^i h^\bullet"] \arrow[dd, "\alpha^i_{C^\bullet}"] & \\
 & D^i \arrow[rr, "\operatorname{co} d^{i-1}_{D^\bullet}"] & & \operatorname{Co} d^{i-1}_{D^\bullet} \\
C^i \arrow[ur, "h^i"] \arrow[rr, "\operatorname{co} d^{i-1}_{C^\bullet}"] & & \operatorname{Co} d^{i-1}_{C^\bullet} \arrow[ur, "\overline{h}^i"] &
\end{tikzcd}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\operatorname{co} d^{i-1}_{C^\bullet}$ é epi. Utilizando as comutatividades obtidas anteriormente, constatamos que resta provar a comutatividade da face direita no diagrama acima à direita. As comutatividades das faces de cima, de baixo, frontal, do fundo e da esquerda são já conhecidas (vide a primeira parte do lema). A comutatividade da face direita segue da comutatividade das outras faces e de $\operatorname{co} j^i_{C^\bullet}$ ser epi ■

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \to C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \to 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1}, vemos que $\beta^i_{C_1^\bullet}\delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j^{i-1}_{C_3^\bullet} = 0$ (pois $\pi^{i-1}_{C_3^\bullet}$ e p^{i-2} são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4, $\alpha^i_{C_1^\bullet} = \ker \beta^i_{C_1^\bullet}$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha^i_{C_1^\bullet}\Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : \mathrm{Z}^{i-1}\, C_3^\bullet \to \mathrm{H}^i\, C_1^\bullet$. Sendo $\alpha^i_{C_1^\bullet}$ mono, concluímos que $\Delta^{i-1} j^{i-1}_{C_3^\bullet} = 0$. Assim, obtemos $\delta^{i-1}_E : \mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \to \mathrm{H}^i\, C_1^\bullet$ tal que $\Delta^{i-1} = \delta^{i-1}_E(\operatorname{co} j^{i-1}_{C_3^\bullet})$ (vide o diagrama (3.3.1) abaixo à direita; note que δ^{i-1}_E é o único morfismo que faz este diagrama comutativo).

(3.3.1)

$$
\begin{tikzcd}
 & & C_2^{i-2} \arrow[r, "p^{i-2}"] \arrow[d, "\pi^{i-1}_{C_2^\bullet}"'] & C_3^{i-2} \arrow[r] \arrow[d, "\pi^{i-1}_{C_3^\bullet}"'] & 0 \\
 & & \mathrm{B}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[r, "\mathrm{B}^{i-1}\, p^\bullet"] \arrow[d, "j^{i-1}_{C_2^\bullet}"'] & \mathrm{B}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[d, "j^{i-1}_{C_3^\bullet}"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}^{i-1}\, C_1^\bullet \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i-1}\, \varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "\ker d^{i-1}_{C_1^\bullet}"'] & \mathrm{Z}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i-1}\, p^\bullet"] \arrow[d, "\ker d^{i-1}_{C_2^\bullet}"'] & \mathrm{Z}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[r, "\delta^{i-1}"] \arrow[d, "\ker d^{i-1}_{C_3^\bullet}"'] & {} \\
0 \arrow[r] & C_1^{i-1} \arrow[r, "\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d, "d^{i-1}_{C_1^\bullet}"'] & C_2^{i-1} \arrow[r, "p^{i-1}"] \arrow[d, "d^{i-1}_{C_2^\bullet}"'] & C_3^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "d^{i-1}_{C_3^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^{i} \arrow[r, "\varepsilon^{i}"] \arrow[d, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C_1^\bullet}"'] & C_2^{i} \arrow[r, "p^{i}"] \arrow[d, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C_2^\bullet}"'] & C_3^{i} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{co}\, d^{i-1}_{C_3^\bullet}"'] & 0 \\
{} \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_1^\bullet} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}^{i}"] \arrow[d, "\beta^i_{C_1^\bullet}"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_2^\bullet} \arrow[r, "\overline{p}^{i}"] \arrow[d, "\beta^i_{C_2^\bullet}"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_3^\bullet} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1^{i+1} \arrow[r, "\varepsilon^{i+1}"] & C_2^{i+1} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[r, dashed, "\delta_E^{i-1}"] & \mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet \arrow[d, "\alpha^i_{C_1^\bullet}"] \\
\mathrm{Z}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[u, "\mathrm{co}\, j^{i-1}_{C_3^\bullet}"] \arrow[ur, dashed, "\Delta^{i-1}"'] \arrow[r, "\delta^{i-1}"'] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_1^\bullet} \arrow[d, "\beta^i_{C_1^\bullet}"] \\
\mathrm{B}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[u, "j^{i-1}_{C_3^\bullet}"] & C_1^{i+1}
\end{tikzcd}
$$

Mostremos que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} \mathrm{H}^{i-1}\, C_1^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i-1}\,\varepsilon^\bullet} \mathrm{H}^{i-1}\, C_2^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i-1}\,p^\bullet} \mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} \mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i}\,\varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{H}^{i-1}\, C_1^\bullet \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,\varepsilon^\bullet"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,p^\bullet"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[u] \arrow[r, "\delta_E^{i-1}"] & \mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i}\,\varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^i_{C_1^\bullet}"'] & \mathrm{H}^{i}\, C_2^\bullet \arrow[d, "\alpha^i_{C_2^\bullet}"'] \\
\mathrm{Z}^{i-1}\, C_1^\bullet \arrow[u, "\mathrm{co}\, j^{i-1}_{C_1^\bullet}"] \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i-1}\,\varepsilon^\bullet"] & \mathrm{Z}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[u, "\mathrm{co}\, j^{i-1}_{C_2^\bullet}"] \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i-1}\,p^\bullet"] & \mathrm{Z}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[u, "\mathrm{co}\, j^{i-1}_{C_3^\bullet}"] \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_1^\bullet} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}^i"] & \mathrm{Co}\, d^{i-1}_{C_2^\bullet} \\
 & \mathrm{B}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[u, "j^{i-1}_{C_2^\bullet}"] \arrow[r, "\mathrm{B}^{i-1}\,p^\bullet"] & \mathrm{B}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[u, "j^{i-1}_{C_3^\bullet}"] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde a sequência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-sequência (2.22.1) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata. Com efeito,$(\mathrm{B}^{i-1}\,p^\bullet)\pi^{i-1}_{C_2^\bullet} = \pi^{i-1}_{C_3^\bullet}p^{i-2}$ (vide o segundo quadrado comutativo em (3.2.1)). Sendo $\mathrm{B}^{i-1}\,p^\bullet$ divisor à esquerda de um epimorfismo, ele é epi. Por caça usual em diagrama, podemos provar que a primeira linha do diagrama é exata nos termos $\mathrm{H}^{i-1}\, C_2^\bullet$, $\mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet$ e $\mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\operatorname{Esc}\mathcal{C}$, cujos objetos são sequências curtas exatas de complexos
$E:\ 0 \to C_1^\bullet \to C_2^\bullet \to C_3^\bullet \to 0$, com $C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \operatorname{Kom}^*\mathcal{C}$, e cujos morfismos são dados por diagramas comutativos do tipo

$$\begin{tikzcd}
E: \arrow[d, "h"'] & 0 \arrow[r] & C_1^\bullet \arrow[r, "\varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "h_1^\bullet"'] & C_2^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] \arrow[d, "h_2^\bullet"'] & C_3^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_3^\bullet"'] & 0 \\
E': & 0 \arrow[r] & C_1'^\bullet \arrow[r, "\varepsilon'^\bullet"] & C_2'^\bullet \arrow[r, "p'^\bullet"] & C_3'^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obviamente, temos três funtores
$F_k : \operatorname{Esc}\mathcal{C} \to \operatorname{Kom}^*\mathcal{C}$, $k = 1, 2, 3$, onde,
para $E:\ 0 \to C_1^\bullet \to C_2^\bullet \to C_3^\bullet \to 0$,
definimos $F_k E = C_k^\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i\, C_3^\bullet \arrow[r, "\delta_E^i"] \arrow[d, "\mathrm{H}^i\, h_3^\bullet"'] & \mathrm{H}^{i+1}\, C_1^\bullet \arrow[d, "\mathrm{H}^{i+1}\, h_1^\bullet"] \\
\mathrm{H}^i\, C_3'^\bullet \arrow[r, "\delta_{E'}^i"] & \mathrm{H}^{i+1}\, C_1'^\bullet
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Co} d^i_{C_1^\bullet} \arrow[dd, "\overline{h}_1^i"'] & & \mathrm{H}^{i+1}\, C_1^\bullet \arrow[ll, "\alpha^{i+1}_{C_1^\bullet}"'] \arrow[dd, "\mathrm{H}^{i+1}\, h_1^\bullet"] \\
\mathrm{Z}^i\, C_3^\bullet \arrow[ur, "\delta^i"] \arrow[rr, "\operatorname{co} j^i_{C_3^\bullet}"] \arrow[dd, "\mathrm{Z}^i\, h_3^\bullet"'] & & \mathrm{H}^i\, C_3^\bullet \arrow[ur, "\delta_E^i"'] \arrow[dd, "\mathrm{H}^i\, h_3^\bullet"] & \\
& \operatorname{Co} d^i_{C_1'^\bullet} & & \mathrm{H}^{i+1}\, C_1'^\bullet \arrow[ll, "\alpha^{i+1}_{C_1'^\bullet}"'] \\
\mathrm{Z}^i\, C_3'^\bullet \arrow[ur, "\delta'^i"] \arrow[rr, "\operatorname{co} j^i_{C_3'^\bullet}"'] & & \mathrm{H}^i\, C_3'^\bullet \arrow[ur, "\delta_{E'}^i"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que o $\delta^i_\bullet$ obtido acima define uma transformação natural $\delta^i_\bullet : \mathrm{H}^i\, F_3 \to \mathrm{H}^{i+1}\, F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \to E'$ em $\mathrm{Esc}\,\mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde $\overline{h}^i_1$ é induzido por $h^\bullet_1$ e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\mathrm{co}\, j^i_{C^\bullet_3}$ epi e sendo $\alpha^{i+1}_{C'^\bullet_1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

3.4. Homotopias. No exemplo introdutório 3.1, vimos como uma homotopia de funções contínuas entre espaços topológicos se transformou para uma homotopia entre os complexos $S_\bullet$ de simplexos singulares.

3.4.1. Definição. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e sejam $C^\bullet, D^\bullet \in \mathrm{Kom}^*\,\mathcal{C}$ complexos. Dizemos que morfismos $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ são **homotópicos** se existe uma coleção de morfismos $h^i : C^i \to D^{i-1}$ em $\mathcal{C}$, chamada **homotopia** (os morfismos h^i's não precisam comutar com d), tais que $f^i - g^i = d^{i-1}_{D^\bullet} h^i + h^{i+1} d^i_{C^\bullet}$ para todo i.

$$\begin{tikzcd}
 & C^i \arrow[r, "d^i_{C^\bullet}"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "f^i - g^i"] & C^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\
D^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{D^\bullet}"'] & D^i &
\end{tikzcd}$$

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ forem homotópicos. É fácil ver que "ser homotópico" é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um **"ideal"**, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ são homotópicos, então $\mathrm{H}^i f^\bullet = \mathrm{H}^i g^\bullet$ para todo i.*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo). Pela hipótese, $f^i = h^{i+1} d^i_{C^\bullet} + d^{i-1}_{D^\bullet} h^i$. Logo,
$f^i(\ker d^i_{C^\bullet}) = h^{i+1} d^i_{C^\bullet}(\ker d^i_{C^\bullet}) + d^{i-1}_{D^\bullet} h^i(\ker d^i_{C^\bullet}) = d^{i-1}_{D^\bullet} h^i(\ker d^i_{C^\bullet}) = (\ker d^i_{D^\bullet}) j^i_{D^\bullet} \pi^i_{D^\bullet} h^i(\ker d^i_{C^\bullet})$. Sendo $\mathrm{Z}^i f^\bullet$ o único morfismo que faz a comutatividade $f^i(\ker d^i_{C^\bullet}) = (\ker d^i_{D^\bullet})(\mathrm{Z}^i f^\bullet)$, concluímos que $\mathrm{Z}^i f^\bullet = j^i_{D^\bullet} \pi^i_{D^\bullet} h^i(\ker d^i_{C^\bullet})$. Obtemos o diagrama comutativo abaixo à direita, onde $\varphi = \pi^i_{D^\bullet} h^i(\ker d^i_{C^\bullet})$. Agora, $(\mathrm{H}^i f^\bullet)(\mathrm{co}\, j^i_{C^\bullet}) = (\mathrm{co}\, j^i_{D^\bullet}) j^i_{D^\bullet} \varphi = 0$. Sendo $\mathrm{co}\, j^i_{C^\bullet}$ epi, $\mathrm{H}^i f^\bullet = 0$ ■

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^i C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i C^\bullet \arrow[d, "\ker d^i_{C^\bullet}"] & \\
C^{i-1} \arrow[u, "\pi^i_{C^\bullet}"] \arrow[r, "d^{i-1}_{C^\bullet}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & C^i \arrow[r, "d^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dl, "h^i"'] & C^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \arrow[dl, "h^{i+1}"'] \\
D^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{D^\bullet}"] \arrow[d, "\pi^i_{D^\bullet}"'] & D^i \arrow[r, "d^i_{D^\bullet}"] & D^{i+1} \\
\mathrm{B}^i D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i D^\bullet \arrow[u, "\ker d^i_{D^\bullet}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{B}^i C^\bullet \arrow[r, "j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{B}^i f^\bullet"'] & \mathrm{Z}^i C^\bullet \arrow[r, "\operatorname{co} j^i_{C^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^i f^\bullet"] \arrow[dl, "\varphi"'] & \mathrm{H}^i C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i f^\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}^i D^\bullet \arrow[r, "j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{Z}^i D^\bullet \arrow[r, "\operatorname{co} j^i_{D^\bullet}"] & \mathrm{H}^i D^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Fazendo um "quociente" pelo "ideal" da Definicão 3.4.1, obtemos a categoria $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, isto é, $\mathrm{K}^*\mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathrm{Kom}^*\mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)/\sim$. Claramente, obtemos o funtor "canônico de quociente" $\pi : \mathrm{Kom}^*\mathcal{C} \to \mathrm{K}^*\mathcal{C}$. (Note que $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por $\mathrm{Kom}^*_0\mathcal{C}$ a subcategoria completa de $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$ formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos. Assim, para qualquer $C^\bullet \in \mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, obtemos $\mathrm{B}^\bullet C^\bullet, \mathrm{Z}^\bullet C^\bullet, \mathrm{H}^\bullet C^\bullet \in \mathrm{Kom}^*_0\mathcal{C}$ e podemos considerar $\mathrm{B}^\bullet$, $\mathrm{Z}^\bullet$ e $\mathrm{H}^\bullet$ como funtores, $\mathrm{B}^\bullet, \mathrm{Z}^\bullet, \mathrm{H}^\bullet : \mathrm{Kom}^*\mathcal{C} \to \mathrm{Kom}^*_0\mathcal{C}$.

3.5. Teorema. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então os funtores $\mathrm{B}^\bullet, \mathrm{Z}^\bullet, \mathrm{H}^\bullet : \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \to \mathrm{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a sequência exata $0 \to \mathrm{B}^\bullet \to \mathrm{Z}^\bullet \to \mathrm{H}^\bullet \to 0$. O funtor $\mathrm{H}^\bullet$ passa por $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um funtor aditivo e I é a inclusão.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{H}^\bullet"'] & \mathrm{K}^* \mathcal{C} \arrow[dl, "h"'] \\ \mathrm{Kom}_0^* \mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Seja $E \in \mathrm{Esc}\, \mathcal{C}$ uma sequência curta exata de complexos, $E : 0 \to C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \to 0$. Então a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} \mathrm{H}^{i-1}\, C_1^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i-1}\, \varepsilon^\bullet} \mathrm{H}^{i-1}\, C_2^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i-1}\, p^\bullet} \mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} \mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i}\, \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata, onde, para todo i, $\delta_\bullet^i$ é uma transformação natural. Isto significa que, para qualquer morfismo $h : E \to E'$ em $\mathrm{Esc}\, \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} E: \arrow[d, "h"'] & 0 \arrow[r] & C_1^\bullet \arrow[r, "\varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "h_1^\bullet"'] & C_2^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] \arrow[d, "h_2^\bullet"'] & C_3^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_3^\bullet"'] & 0 \\ E': & 0 \arrow[r] & C_1'^\bullet \arrow[r, "\varepsilon'^\bullet"] & C_2'^\bullet \arrow[r, "p'^\bullet"] & C_3'^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_E^{i-2}"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_1^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,\varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{i-1}\,h_1^\bullet"'] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_2^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,p^\bullet"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{i-1}\,h_2^\bullet"'] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_3^\bullet \arrow[r, "\delta_E^{i-1}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{i-1}\,h_3^\bullet"'] & \mathrm{H}^{i}\, C_1^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i}\,\varepsilon^\bullet"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{i}\,h_1^\bullet"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{E'}^{i-2}"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_1'^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,\varepsilon'^\bullet"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_2'^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i-1}\,p'^\bullet"] & \mathrm{H}^{i-1}\, C_3'^\bullet \arrow[r, "\delta_{E'}^{i-1}"] & \mathrm{H}^{i}\, C_1'^\bullet \arrow[r, "\mathrm{H}^{i}\,\varepsilon'^\bullet"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

é comutativo ■

Exercícios