

Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan'in

ICMC, USP, São Carlos

16/11/2015 – 25/11/2015

4. δ -funtores

Nesta seção as categorias são abelianas e os funtores são aditivos.

4.1. Definição. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito **exato à esquerda (à direita)** se, para toda sequência curta exata $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , a sequência $0 \rightarrow Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3$ (respectivamente, $Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3 \rightarrow 0$) é exata em \mathcal{C}' . Se F é exato à esquerda e à direita, dizemos que F é um **funtor exato**.

Para $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ contravariante as definições são induzidas, isto é, dizemos que F é um funtor exato à esquerda (à direita) se o funtor covariante $F' : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'$ é exato à esquerda (respectivamente, à direita). Em outras palavras, para toda sequência curta exata $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , a sequência induzida $0 \rightarrow Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1$ (respectivamente, $Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1 \rightarrow 0$) é exata em \mathcal{C}' .

4.2. Exemplo. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$. Então o funtor $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é contravariante exato à esquerda. Realmente, seja $0 \rightarrow c_1 \xrightarrow{h_1} c_2 \xrightarrow{h_2} c_3 \rightarrow 0$ uma sequência curta exata em \mathcal{C} .

Então os morfismos

$$\mathcal{C}(h_2, c) : \mathcal{C}(c_3, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_2, c), \quad \alpha \mapsto \alpha h_2,$$

$$\mathcal{C}(h_1, c) : \mathcal{C}(c_2, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_1, c), \quad \beta \mapsto \beta h_1$$

induzem a sequência $0 \rightarrow \mathcal{C}(c_3, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_2, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_1, c)$ exata em **Ab**. Com efeito, seja $\alpha \in \mathcal{C}(c_3, c)$ tal que $\alpha h_2 = 0$. Sendo h_2 epi, $\alpha = 0$. Daí, $\mathcal{C}(h_2, c)$ é mono. A semiexatidão no segundo termo é óbvia. Seja $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c)$ tal que $\beta h_1 = 0$. Sendo c_3 conúcleo de h_1 , existe um único morfismo $\alpha \in \mathcal{C}(c_3, c)$ tal que $\alpha h_2 = \beta$. Assim obtemos a exatidão no segundo termo.

De maneira semelhante, podemos provar que o funtor $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é covariante exato à esquerda.

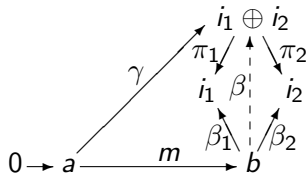
4.3. Definição. Dizemos que um objeto $i \in \mathcal{C}$ é **injetivo** se o funtor $\mathcal{C}(-, i)$ é exato. O conceito dual se chama **objeto**

projetivo. Equivalentemente, um objeto i é injetivo se, para qualquer morfismo $a \xrightarrow{m} b$ em \mathcal{C} , todo morfismo $\gamma : a \rightarrow i$ se estende por m a um $\beta : b \rightarrow i$ (não necessariamente único), tal que o diagrama à direita seja comutativo.

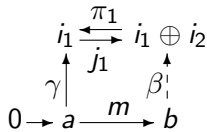
$$\begin{array}{ccc} & & i \\ & \nearrow \gamma & \uparrow \beta \\ 0 \rightarrow a & \xrightarrow{m} & b \end{array}$$

4.4. Lema. *Sejam $i_1, i_2 \in \mathcal{C}$. Então o biproduto $i_1 \oplus i_2$ é injetivo se e só se i_1 e i_2 são injetivos.*

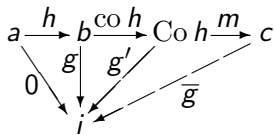
Demonstração. Sejam i_1 e i_2 injetivos e seja $m : a \rightarrow b$ mono. Seja $\gamma : a \rightarrow i_1 \oplus i_2$. Então $\pi_1 \gamma : a \rightarrow i_1$ e $\pi_2 \gamma : a \rightarrow i_2$ se estendem por m a $\beta_1 : b \rightarrow i_1$ e $\beta_2 : b \rightarrow i_2$, respectivamente. Pela propriedade do produto, obtemos $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$ desejado (vide o diagrama à direita).



Reciprocamente, seja $i_1 \oplus i_2$ injetivo. Pela simetria, basta verificar que i_1 é injetivo. Seja $m : a \rightarrow b$ mono e seja $\gamma : a \rightarrow i_1$. Sendo $i_1 \oplus i_2$ injetivo, $j_1 \gamma$ se estende por m a um $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$. Logo, $\pi_1 \beta m = \pi_1 j_1 \gamma = \gamma$ e, portanto, γ se estende por m a $\pi_1 \beta$ (vide o diagrama à direita) ■



4.5. Lema. *Seja $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ uma seqüência exata e seja $g : b \rightarrow i$ um morfismo com i injetivo tal que $gh = 0$. Então existe um morfismo \bar{g} tal que $g = \bar{g}f$.*



Demonstração. Pela Observação 2.19 e pela propriedade de conúcleo, encontramos um morfismo g' fazendo o diagrama comutativo acima, onde m é mono. Pela Definição 4.3, encontramos \bar{g} desejado ■

4.6. Definição. Seja $A \in \mathcal{C}$, seja $I^\bullet \in \text{Kom}^+ \mathcal{C}$ com $I^i = 0$ para todo $i < 0$ e seja $\varepsilon : A \rightarrow I^0$ um morfismo. Dizemos que I^\bullet é uma **resolução** de A (denotamos $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$) se a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$ é exata. Se, além disso, I^i for injetivo para todo i , dizemos que a resolução de A é **injetiva**. (O conceito dual ao de resolução injetiva se chama **resolução projetiva** de A .)

4.7. Lema. *Seja $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} R^\bullet$ uma resolução de A e seja $0 \rightarrow B \xrightarrow{\eta} I^\bullet$ uma resolução injetiva de B . Então todo morfismo $f : A \rightarrow B$ induz um morfismo entre complexos $f^\bullet : R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ tal que o diagrama à direita é comutativo. Mais ainda, quaisquer dois morfismos $f^\bullet, f'^\bullet : R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ induzidos por f são homotópicos.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & R^0 & \rightarrow & R^1 & \rightarrow & \dots \\
 & & f \downarrow & & f^0 \downarrow & & f^1 \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & B & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \rightarrow & I^1 & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

Demonstração. Construimos f^\bullet indutivamente pelo Lema 4.5. Partimos de $g := \eta f$ e obtemos $f^0 := \bar{g}$. Para obter f^{n+1} , apliquemos o Lema 4.5.

ao morfismo $g := d_{I^\bullet}^n f^n$.

Precisamos encontrar uma homotopia entre dois morfismos f^\bullet e f'^\bullet induzidos por f . Fazendo a diferença $f^\bullet - f'^\bullet$, podemos supor que $f = 0$.

Seja $f^\bullet: R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ induzido por $f = 0$. Construimos indutivamente morfismos $h^i: R^i \rightarrow I^{i-1}$ que fazem a homotopia $f^\bullet \sim 0$. Inicialmente, para $i \leq 0$, definimos $h^i: R^i \rightarrow 0$ por $h^i := 0$.

Suponhamos que existam morfismos $h^i: R^i \rightarrow I^{i-1}$, $i \leq n$, tais que $f^i = h^{i+1} d_{R^\bullet}^i + d_{I^\bullet}^{i-1} h^i$ para todo $i \leq n-1$. Aplicamos o Lema 4.5 ao morfismo $g := f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n$ observando que $(f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n) d_{R^\bullet}^{n-1} = f^n d_{R^\bullet}^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-1} (f^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-2} h^{n-1}) = f^n d_{R^\bullet}^{n-1} - d_{I^\bullet}^{n-1} f^{n-1} = 0$. Fazendo $h^{n+1} := \bar{g}$, resta observar que $f^n - d_{I^\bullet}^{n-1} h^n = g = \bar{g} d_{R^\bullet}^n = h^{n+1} d_{R^\bullet}^n$. ■

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{m} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 \rightarrow 0 \\
 & & \gamma \downarrow & & \alpha \downarrow & & \\
 & & i & & r & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & x_1 & & x_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

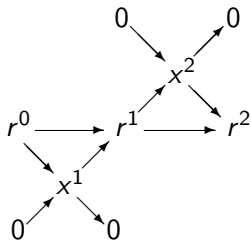
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & a_1 & \xrightarrow{m} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 \rightarrow 0 \\
 & & \gamma \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \alpha \downarrow \\
 0 & \rightarrow & i & \rightarrow & i \oplus r & \rightarrow & r \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow j & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 0 & \rightarrow & x_1 & \rightarrow & x_2 & \rightarrow & x_3 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

4.8. Lema. *Seja dado o diagrama acima à esquerda com a linha e as colunas exatas e com i injetivo. Então ele pode ser completado ao diagrama comutativo acima à direita com linhas e colunas exatas, onde j e π são a injeção e a projeção do biproduto.*

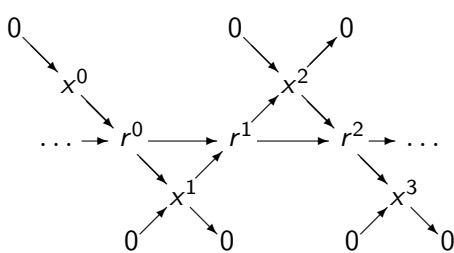
Demonstração. Pela Definição 4.3, existe um $\beta : a_2 \rightarrow i$ tal que $\gamma = \beta m$. Pela propriedade do produto, os morfismos β e $\alpha p : a_2 \rightarrow r$ induzem o morfismo $\varepsilon : a_2 \rightarrow i \oplus r$. Para a projeção $\pi' : i \oplus r \rightarrow i$, temos $\pi' \varepsilon m = \beta m = \gamma = \pi' j \gamma$ e $\pi \varepsilon m = \alpha p m = 0 = \pi j \gamma$. Pela propriedade do produto, $\varepsilon m = j \gamma$. Pela construção de ε , temos $\alpha p = \pi \varepsilon$. Fazendo $x_2 := \text{Co} \varepsilon$ e observando que $x_1 = \text{Co} \gamma$ e $x_3 = \text{Co} \alpha$, resta só aplicar o Lema 2.22 (da serpente) ■

4.9. Observação. *No diagrama comutativo à direita a seqüência horizontal é exata se e só se as seqüências diagonais são exatas, onde os x^i 's são escolhidos para decompor as setas $r^{i-1} \rightarrow r^i$ em epi e mono.*

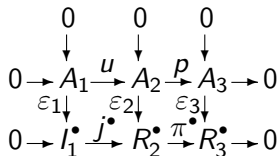
Demonstração. O fato segue da Definição 2.18 e da Observação 2.19 ■



Isto permite pensar numa sequência exata como sendo formada por um zigzague de sequências curtas exatas, como no diagrama à direita.



4.10. Lema. *Seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma sequência exata, seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} I_1^\bullet$ uma resolução injetiva*



e seja $0 \rightarrow A_3 \xrightarrow{\varepsilon_3} R_3^\bullet$ uma resolução arbitrária.

Para $n \geq 0$, definamos $R_2^n := I_1^n \oplus R_3^n$. Então existe uma resolução $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$ com as componentes indicadas acima tal que o diagrama à esquerda é comutativo, onde os morfismos j^\bullet e π^\bullet são

formados pelas injeções $j^n : I_1^n \rightarrow I_1^n \oplus R_3^n$ e pelas projeções $\pi^n : I_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$, respectivamente.

Demonstração. Pela Observação 4.9, podemos decompor todo $d_{I_1}^{n-1}$, $n > 0$, como $I_1^{n-1} \rightarrow X_1^n \rightarrow I_1^n$, onde $X_1^n = \text{Im } d_{I_1}^{n-1} = \text{Ker } d_{I_1}^n$. Do mesmo modo, decomposmos todo $d_{R_3^\bullet}^{n-1}$ como $R_3^{n-1} \rightarrow X_3^n \rightarrow R_3^n$, onde

$X_3^n = \text{Im } d_{R_3}^{n-1} = \text{Ker } d_{R_3}^n$. Aplicando o Lema 4.8 ao diagrama em baixo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow & & \\
 & & I_1^0 & & R_3^0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X_1^1 & & X_3^1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow \\
 & & I_1^0 & \xrightarrow{j^0} & R_2^0 & \xrightarrow{\pi^0} & R_3^0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & k^0 \downarrow & & \downarrow \\
 & & X_1^1 & \rightarrow & X_2^1 & \rightarrow & X_3^1 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

à esquerda, obtemos o diagrama acima à direita e, em particular, um objeto X_2^1 e morfismos $\varepsilon_2 : A_2 \rightarrow R_2^0$ e $k^0 : R_2^0 \rightarrow X_2^1$. Agora podemos aplicar o Lema 4.8 à terceira linha do diagrama acima à direita e assim por

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^n & \rightarrow & X_2^n & \rightarrow & X_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & I_1^n & & R_3^n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & X_1^{n+1} & & X_3^{n+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X_1^n & \rightarrow & X_2^n & \rightarrow & X_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & I^{n-1} \downarrow & & \downarrow \\
 & & I_1^n & \xrightarrow{j^n} & R_2^n & \xrightarrow{\pi^n} & R_3^n \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & k^n \downarrow & & \downarrow \\
 & & X_1^{n+1} & \rightarrow & X_2^{n+1} & \rightarrow & X_3^{n+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

diante ... Indutivamente, aplicando o Lema 4.8 ao diagrama acima à esquerda, obtemos o diagrama acima à direita e, em particular, um objeto X_2^{n+1} e morfismos $l^{n-1} : X_2^n \rightarrow R_2^n$ e $k^n : R_2^n \rightarrow X_2^{n+1}$. Fazendo $d_{R_2}^n := l^n k^n$, pela Observação 4.9, obtemos a resolução desejada

$0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$. As comutatividades dos diagramas obtidos implicam que j^\bullet e π^\bullet são morfismos induzidos por m e p , respectivamente ■

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\ & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & R_1^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & R_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & R_3^\bullet \rightarrow 0 \end{array}$$

4.11. Observação. *Sejam $A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i^\bullet$, $i = 1, 2, 3$, resoluções tais que $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$ e suponhamos que as injeções $u^n : R_1^n \rightarrow R_1^n \oplus R_3^n$ e as projeções $p^n : R_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$ formem morfismos $u^\bullet : R_1^\bullet \rightarrow R_2^\bullet$ e $p^\bullet : R_2^\bullet \rightarrow R_3^\bullet$ de modo que o*

diagrama à esquerda seja comutativo e com as linhas exatas. Utilizando a representação matricial (2.12.1) da Observação 2.12, obtemos

$$u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}, p^n = [0 \ 1_{R_3^n}], \varepsilon_2 = [\varepsilon_3 p] \text{ e } d_{R_2}^n = \begin{bmatrix} d_{R_1}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3}^n \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0, \alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}, \alpha u = \varepsilon_1, d_{R_1}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_3 p = 0 \text{ e}$$

$$d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0 \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demonstração. As igualdades $u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $p^n = \begin{bmatrix} 0 & 1_{R_3^n} \end{bmatrix}$ são, de fato, dadas. A comutatividade $\varepsilon_3 p = p^0 \varepsilon_2$ significa que $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{bmatrix}$. A comutatividade $\varepsilon_2 u = u^0 \varepsilon_1$ implica $\alpha u = \varepsilon_1$. Escrevendo $d_{R_2^\bullet}^n = \begin{bmatrix} \gamma^n & \alpha^n \\ \delta^n & \beta^n \end{bmatrix}$, com $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}$, $\beta^n : R_3^n \rightarrow R_3^{n+1}$, $\gamma^n : R_1^n \rightarrow R_1^{n+1}$ e $\delta^n : R_1^n \rightarrow R_3^{n+1}$, da comutatividade $d_{R_3^\bullet}^n p^n = p^{n+1} d_{R_2^\bullet}^n$ concluímos que $\delta^n = 0$ e que $\beta^n = d_{R_3^\bullet}^n$. A comutatividade $u^{n+1} d_{R_1^\bullet}^n = d_{R_2^\bullet}^n u^n$ agora significa que $\gamma^n = d_{R_1^\bullet}^n$. Finalmente, as igualdades $d_{R_1^\bullet}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_3 p = 0$ e $d_{R_1^\bullet}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n = 0$ simplesmente expressam que $d_{R_2^\bullet}^0 \varepsilon_2 = 0$ e $d_{R_2^\bullet}^{n+1} d_{R_2^\bullet}^n = 0$ ■

4.12. Lema. *Sejam $0 \rightarrow A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i^\bullet$, $i = 1, 2, 3$, $0 \rightarrow B_j \xrightarrow{\eta_j} S_j^\bullet$, $j = 2, 3$, resoluções e seja $0 \rightarrow B_1 \xrightarrow{\eta_1} I_1^\bullet$ uma resolução injetiva. Suponhamos que no diagrama abaixo as linhas em cima sejam exatas e as faces de cima, de fundos, de frente, à esquerda e à direita sejam comutativas. Suponhamos também que $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$ e $S_2^n = I_1^n \oplus S_3^n$, que os morfismos u^\bullet e v^\bullet sejam formados pelas injeções respectivas e que os morfismos p^\bullet e q^\bullet sejam formados pelas projeções respectivas. Então existe um morfismo $f_2^\bullet : R_2^\bullet \rightarrow S_2^\bullet$ que faz todo o diagrama comutativo.*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow 0 \\
& \downarrow \varepsilon_1 & \searrow f_1 & \downarrow \varepsilon_2 & \searrow f_2 & \downarrow \varepsilon_3 & \searrow f_3 \\
0 \rightarrow & R_1^\bullet & \xrightarrow{u^\bullet} & R_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & R_3^\bullet & \rightarrow 0 \\
& & \searrow & \downarrow \eta_1 & \searrow f_2^\bullet & \downarrow \eta_2 & \searrow f_3^\bullet \\
0 \rightarrow & B_1 & \xrightarrow{v} & B_2 & \xrightarrow{q} & B_3 & \rightarrow 0 \\
& & \searrow f_1^\bullet & \downarrow \eta_1 & \searrow f_2^\bullet & \downarrow \eta_2 & \searrow f_3^\bullet \\
& & \searrow & \downarrow \eta_3 & \searrow q^\bullet & \downarrow \eta_3 & \searrow \\
0 \rightarrow & I_1^\bullet & \xrightarrow{v^\bullet} & S_2^\bullet & \xrightarrow{q^\bullet} & S_3^\bullet & \rightarrow 0
\end{array}$$

Demonstração. Pela Observação 4.11, $u^n = \begin{bmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$, $v^n = \begin{bmatrix} 1_{I_1^n} \\ 0 \end{bmatrix}$,
 $p^n = [0 \ 1_{R_3^n}]$, $q^n = [0 \ 1_{S_3^n}]$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \eta_3 q \end{bmatrix}$, $d_{R_2^\bullet}^n = \begin{bmatrix} d_{R_1^\bullet}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3^\bullet}^n \end{bmatrix}$,

$d_{S_2^\bullet}^n = \begin{bmatrix} d_{I_1^\bullet}^n & \beta^n \\ 0 & d_{S_3^\bullet}^n \end{bmatrix}$, onde $\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0$, $\beta : B_2 \rightarrow I_1^0$, $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^{n+1}$,
 $\beta^n : S_3^n \rightarrow I_1^{n+1}$, $\alpha u = \varepsilon_1$, $\beta v = \eta_1$, $d_{R_1^\bullet}^0 \alpha + \alpha^0 \varepsilon_3 p = 0$, $d_{I_1^\bullet}^0 \beta + \beta^0 \eta_3 q = 0$,
 $d_{R_1^\bullet}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3^\bullet}^n = 0$ e $d_{I_1^\bullet}^{n+1} \beta^n + \beta^{n+1} d_{S_3^\bullet}^n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Vamos procurar f_2^\bullet na forma $f_2^n := \begin{bmatrix} f_1^n & g^n \\ 0 & f_3^n \end{bmatrix}$, onde $g^n : R_3^n \rightarrow I_1^n$. É imediato que $f_2^n u^n = v^n f_1^n$ e $f_3^n p^n = q^n f_2^n$. Utilizando $d_{I_1}^n \cdot f_1^n = f_1^{n+1} d_{R_1}^n$ e $d_{S_3}^n \cdot f_3^n = f_3^{n+1} d_{R_3}^n$, vemos que as comutatividades restantes, $\eta_2 f_2 = f_2^0 \varepsilon_2$ e $d_{S_2}^n \cdot f_2^n = f_2^{n+1} d_{R_2}^n$, $n \geq 0$, têm a forma

$$\beta f_2 = f_1^0 \alpha + g^0 \varepsilon_3 p, \quad \eta_3 q f_2 = f_3^0 \varepsilon_3 p, \quad d_{I_1}^n \cdot g^n + \beta^n f_3^n = f_1^{n+1} \alpha^n + g^{n+1} d_{R_3}^n.$$

É fácil verificar a segunda igualdade. Vamos utilizar a primeira e a última para determinar os g^n 's, reescrevendo as igualdades na forma

$$g^0 \varepsilon_3 p = \beta f_2 - f_1^0 \alpha, \quad g^{n+1} d_{R_3}^n = d_{I_1}^n \cdot g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n.$$

A sequência $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{\varepsilon_3 p} R_3^0$ é exata, pois a sequência $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3$ é exata e ε_3 é mono. Para $g := \beta f_2 - f_1^0 \alpha$, temos $g u = \beta f_2 u - f_1^0 \alpha u = \beta v f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = \eta_1 f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = 0$. Pelo Lema 4.5, existe um g^0 tal que $g^0 \varepsilon_3 p = g = \beta f_2 - f_1^0 \alpha$. A sequência $A_2 \xrightarrow{\varepsilon_3 p} R_3^0 \xrightarrow{d_{R_3}^0} R_3^1$ é exata, pois a sequência $A_3 \xrightarrow{\varepsilon_3} R_3^0 \xrightarrow{d_{R_3}^0} R_3^1$ é exata e p é epi.

Para $g := d_{l_1}^0 \cdot g^0 + \beta^0 f_3^0 - f_1^1 \alpha^0$, temos $g \varepsilon_3 p = d_{l_1}^0 \cdot g^0 \varepsilon_3 p + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_3 p - f_1^1 \alpha^0 \varepsilon_3 p = d_{l_1}^0 \cdot \beta f_2 - d_{l_1}^0 \cdot f_1^0 \alpha + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_3 p + f_1^1 d_{R_1}^0 \cdot \alpha = -\beta^0 \eta_3 q f_2 + \beta^0 f_3^0 \varepsilon_3 p = 0$.

Pelo Lema 4.5, existe um g^1 tal que $g^1 d_{R_3}^0 = g = d_{l_1}^0 \cdot g^0 + \beta^0 f_3^0 - f_1^1 \alpha^0$.

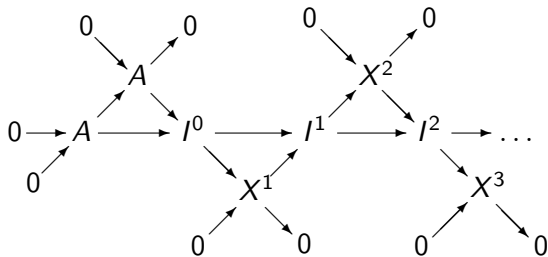
Vamos supor que já encontramos g^0, \dots, g^n , $n \geq 1$, satisfazendo as

igualdades acima. A sequência $R_3^{n-1} \xrightarrow{d_{R_3}^{n-1}} R_3^n \xrightarrow{d_{R_3}^n} R_3^{n+1}$ é exata. Para $g := d_{l_1}^n \cdot g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n$, temos $g d_{R_3}^{n-1} = d_{l_1}^n \cdot (d_{l_1}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}) + \beta^n d_{S_3}^{n-1} f_3^{n-1} + f_1^{n+1} d_{R_1}^n \cdot \alpha^{n-1} = 0$, pois $g^n d_{R_3}^{n-1} = d_{l_1}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}$ pela hipótese da indução. Pelo Lema 4.5, existe um $g^{n+1} : R_3^{n+1} \rightarrow I_1^{n+1}$ tal que $g^{n+1} d_{R_3}^n = g = d_{l_1}^n \cdot g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n$ ■

4.13. Definição. Dizemos que uma categoria \mathcal{C} **tem suficientes objetos injetivos** se, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um monomorfismo $A \rightarrow I$ com I injetivo. Neste caso, todo objeto $A \in \mathcal{C}$ possui uma resolução injetiva.

Realmente, pela hipótese, existe um $A \rightarrow I^0$ mono com I^0 injetivo. Seja X^1 o conúcleo deste monomorfismo, isto é, a sequência

$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow X^1 \rightarrow 0$ é exata. Pela hipótese, existe um $X^1 \rightarrow I^1$ mono com I^1 injetivo ... Finalmente, obtemos o diagrama comutativo abaixo,



onde as setas horizontais são definidas pela composição das respectivas setas diagonais. As seqüências curtas diagonais são exatas pela construção. Pela Observação 4.9, obtemos uma resolução injetiva de A .

4.14. Observação. *Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda e $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \xrightarrow{f} A_3$ uma seqüência exata em \mathcal{C} . Então a seqüência $0 \rightarrow FA_1 \rightarrow FA_2 \xrightarrow{Ff} FA_3$ é exata em \mathcal{C}' .*

Demonstração. Temos a decomposição $f = mp$ com as seqüências $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \xrightarrow{p} X_3 \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow X_3 \xrightarrow{m} A_3$ exatas. Portanto, as seqüências $0 \rightarrow FA_1 \rightarrow FA_2 \xrightarrow{Fp} FX_3$ e $0 \rightarrow FX_3 \xrightarrow{Fm} FA_3$ são exatas. Agora, a exatidão em FA_2 da seqüência com Ff segue da Proposição 2.21.4 ■

4.15. Teorema. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Então existem funtores aditivos $R^n F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $n \geq 0$, tais que $F \simeq R^0 F$ e, para qualquer sequência $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ exata em \mathcal{C} , existem morfismos $\delta_E^n : R^n F A_3 \rightarrow R^{n+1} F A_1$ que fazem a sequência*

$$\dots \rightarrow R^n F A_1 \rightarrow R^n F A_2 \rightarrow R^n F A_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} F A_1 \rightarrow \dots$$

exata. Além disso, os morfismos δ_E^n são naturais em E .

Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{C}$, fixemos (arbitrariamente) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$, uma resolução injetiva de A . Sendo F aditivo, $FI_A^\bullet \in \text{Kom}^+ \mathcal{C}'$. Definamos $R^n F A := H^n FI_A^\bullet$. Seja $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} . Pelo Lema 4.7, existe um morfismo induzido $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$, único a menos de uma homotopia. Definamos $R^n F f := H^n F f^\bullet$. Sendo F aditivo, ele preserva homotopias. Pelo Lema 3.4.2, $H^n F f^\bullet$ não depende da escolha de f^\bullet . Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathcal{C} e sejam $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$ e $g^\bullet : I_B^\bullet \rightarrow I_C^\bullet$, respectivamente, morfismos induzidos. É fácil observar, olhando o diagrama abaixo à esquerda, que $g^\bullet f^\bullet$ é induzido por gf . Portanto, $R^n F(gf) = H^n F(g^\bullet f^\bullet) = (H^n Fg^\bullet)(H^n Ff^\bullet) = (R^n Fg)(R^n Ff)$. Claramente, $1_{I_A^\bullet} : I_A^\bullet \rightarrow I_A^\bullet$ é induzido por $1_A : A \rightarrow A$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & I_A^0 & \longrightarrow & I_A^1 \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\varepsilon_B} & I_B^0 & \longrightarrow & I_B^1 \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow g & & \downarrow g^0 & & \downarrow g^1 \\
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\varepsilon_C} & I_C^0 & \longrightarrow & I_C^1 \longrightarrow \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & FA & \xrightarrow{F\varepsilon_A} & FI_A^0 & \xrightarrow{Fd_{I_A^0}^\bullet} & FI_A^1 \\
& & \downarrow Ff & & \downarrow Ff^0 & & \downarrow Ff^1 \\
0 & \longrightarrow & FB & \xrightarrow{F\varepsilon_B} & FI_B^0 & \xrightarrow{Fd_{I_B^0}^\bullet} & FI_B^1
\end{array}$$

Daí, $R^n F1 = 1$. Assim, $R^n F$ é um funtor. Para morfismos $f, f' : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} que induzem $f^\bullet, f'^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$, respectivamente, podemos observar que $f^\bullet + f'^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$ é induzido por $f + f'$. Sendo F aditivo e sendo, pelo Lema 3.2.3, H^n aditivo, concluímos que $R^n F(f + f') = H^n F(f^\bullet + f'^\bullet) = H^n Ff^\bullet + H^n Ff'^\bullet = R^n Ff + R^n Ff'$. Em outras palavras, $R^n F$ é aditivo.

Provemos que $F \simeq R^0 F$. A seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^0 \xrightarrow{d_{I_A^0}^\bullet} I_A^1$ é exata em \mathcal{C} . Sendo F exato à esquerda (este é o único lugar onde utilizamos este fato),

a seqüência $0 \rightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon_A} FI_A^0 \xrightarrow{Fd_{I_A^0}^\bullet} FI_A^1$ é exata pela Observação 4.14. Claramente, $B^0 FI_A^\bullet = 0$. Logo, $\text{coj}_{FI_A^\bullet}^0 : Z^0 FI_A^\bullet \rightarrow H^0 FI_A^\bullet$ é um isomorfismo.

Recordando que $Z^0 FI_A^\bullet = \text{Ker } Fd_{I_A}^0$, obtemos um isomorfismo

$i_A : FA \rightarrow H^0 FI_A^\bullet = R^0 FA$. A naturalidade de i_\bullet segue da unicidade de morfismos entre núcleos: qualquer morfismo $f : A \rightarrow B$ induz um morfismo (não único) $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow I_B^\bullet$ que, por sua vez, produz o diagrama comutativo acima à direita com linhas exatas.

Seja $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata em \mathcal{C} .

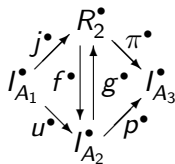
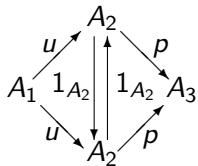
Apliquemos o Lema 4.10, fazendo $I_1^\bullet := I_{A_1}^\bullet$, $R_3^\bullet := I_{A_3}^\bullet$, $\varepsilon_i := \varepsilon_{A_i}$, $i = 1, 3$.

Obtemos uma resolução $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2^\bullet$, injetiva pelo Lema 4.4, e uma seqüência exata de complexos $0 \rightarrow I_{A_1}^\bullet \xrightarrow{j^\bullet} R_2^\bullet \xrightarrow{\pi^\bullet} I_{A_3}^\bullet \rightarrow 0$. Além disso, a exatidão da seqüência de complexos é uma consequência das decomposições $R_2^n = I_{A_1}^n \oplus I_{A_3}^n$. Sendo F aditivo, a seqüência de complexos

$0 \rightarrow FI_{A_1}^\bullet \xrightarrow{Fj^\bullet} FR_2^\bullet \xrightarrow{F\pi^\bullet} FI_{A_3}^\bullet \rightarrow 0$ é exata. Logo, pelo Teorema 3.5, obtemos a seqüência longa exata de cohomologias

$\dots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{H^n Fj^\bullet} H^n FR_2^\bullet \xrightarrow{H^n F\pi^\bullet} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$. Para definir $\delta_E^n := \delta^n$, é necessário verificar que δ^n independe da escolha de R_2^\bullet (não é única a escolha de operadores de bordo em R_2^\bullet). Seja S_2^\bullet qualquer outra resolução deste tipo. Então, utilizando o Lema 4.12 com $B_i := A_i$,

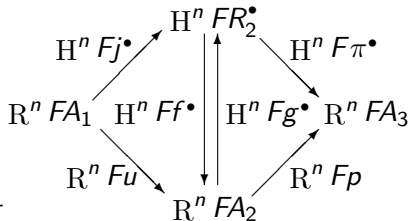
$f_i := 1_{A_i}$, $i = 1, 2, 3$, $f_1^\bullet := 1$, $f_3^\bullet := 1$, aplicando ao diagrama de resoluções obtido o funtor F e passando às seqüências longas de cohomologias, concluímos que δ^n independe da escolha de R_2^\bullet .



Consideremos, em \mathcal{C} , o diagrama comutativo à esquerda. Então, pelo Lema 4.7, no diagrama de resoluções injetivas à direita, temos morfismos j^\bullet , π^\bullet , u^\bullet , p^\bullet , f^\bullet , g^\bullet induzidos por u , p , u , p , 1_{A_2} , 1_{A_2} , respectivamente.

Pelo Lema 4.7, o diagrama de resoluções é comutativo a menos de homotopias. Em particular, $g^\bullet f^\bullet \sim 1_{R_2^\bullet}$ e $f^\bullet g^\bullet \sim 1_{I_{A_2}^\bullet}$.

Apliquemos ao diagrama de resoluções o funtor F . Sendo F aditivo, o diagrama continua sendo comutativo a menos de homotopias. Apliquemos agora o funtor H^n . Pelo Lema 3.4.2, obtemos o diagrama comutativo à direita, onde $H^n Ff^\bullet$ e $H^n Fg^\bullet$ são isomorfismos (um é o inverso do



outro). Assim, a sequência longa exata $\cdots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{H^n Fj^\bullet} H^n FR_2^\bullet \xrightarrow{H^n F\pi^\bullet} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$ gera a sequência longa exata $\cdots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{R^n Fu} R^n FA_2 \xrightarrow{R^n Fp} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$.

Resta mostrar que δ_E^n é natural em E . Consideremos um morfismo de seqüências curtas exatas em \mathcal{C} , digamos, o que está apresentado pela face em cima do diagrama do Lema 4.12. Façamos $R_1^\bullet := I_{A_1}^\bullet$, $R_3^\bullet := I_{A_3}^\bullet$, $I_1^\bullet := I_{B_1}^\bullet$, $S_3^\bullet := I_{B_3}^\bullet$. Pelo Lema 4.10, podemos encontrar R_2^\bullet e S_2^\bullet de modo que as condições do Lema 4.12 sejam satisfeitas. Pelos Lema 4.12 e Teorema 3.5, obtemos a naturalidade desejada ■

4.16. Definição. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Os funtores $R^n F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ construídos acima são chamados **funtores derivados à direita** de F . Seja $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à direita, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos projetivos (isto significa que, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um epimorfismo $P \rightarrow A$ com P projetivo). De forma análoga à que fizemos acima, podemos definir os **funtores derivados à esquerda** de G , $L_n GA := H^{-n} GP_A^\bullet$, onde, para todo $A \in \mathcal{C}$, fixamos (arbitrariamente) uma resolução projetiva $P_A^\bullet \xrightarrow{\epsilon_A} A \rightarrow 0$.

4.17. Definição. Sejam \mathcal{C} , \mathcal{C}' categorias. Um **δ -funtor covariante** de \mathcal{C} para \mathcal{C}' é uma coleção de funtores covariantes $F^\bullet = \{F^n : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \mid n \geq 0\}$ tal que, para toda sequência curta exata $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} e para todo $n \geq 0$, existem morfismos $\delta_{F^\bullet, E}^n : F^n A_3 \rightarrow F^{n+1} A_1$ que satisfazem as condições seguintes:

- A sequência longa

$$\ell_{F^\bullet, E} : 0 \rightarrow F^0 A_1 \xrightarrow{F^0 m} F^0 A_2 \xrightarrow{F^0 p} F^0 A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^0} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^{n-1}} F^n A_1 \xrightarrow{F^n m} F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} \dots$$

é exata.

- Para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ entre sequências curtas exatas em \mathcal{C}

$$E : \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\ E' : & 0 & \rightarrow & A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & A'_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \\ F^n h_3 \downarrow & & \downarrow F^{n+1} h_1 \\ F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E'}^n} & F^{n+1} A'_1 \end{array}$$

e para todo $n \geq 0$, o quadrado à direita é comutativo.

Em outras palavras, $\delta_{F^\bullet, E}^n$ é natural em E .

$$\begin{array}{ccc}
 F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \\
 \alpha_{A_3}^n \downarrow & & \alpha_{A_1}^{n+1} \downarrow \\
 G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1
 \end{array}$$

esquerda é comutativo.

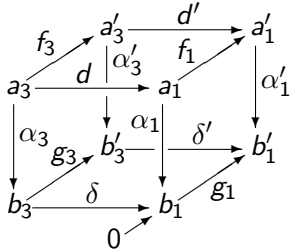
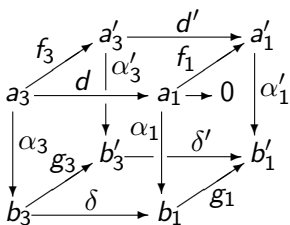
Um **morfismo** $\alpha_\bullet: F^\bullet \rightarrow G^\bullet$ entre δ -funtores é uma coleção de transformações naturais

$\alpha_\bullet = \{\alpha_\bullet^n: F^n \rightarrow G^n \mid n \geq 0\}$ tal que, para todo $n \geq 0$ e para toda sequência curta exata

$E: 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , o quadrado à

4.18. Definição. Um δ -funtor covariante $F^\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é chamado **universal** se, para qualquer outro δ -funtor covariante $G^\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e para qualquer transformação natural $\alpha_\bullet: F^0 \rightarrow G^0$, existe um único morfismo $\alpha_\bullet: F^\bullet \rightarrow G^\bullet$ com $\alpha_\bullet^0 = \alpha_\bullet$. É fácil construir uma categoria apropriada de δ -funtores, onde este conceito tem seu sentido usual. Claramente, para qualquer δ -funtor F^\bullet , o funtor F^0 é exato à esquerda. Daí, em particular, concluímos que, para todo funtor F exato à esquerda, existe (a menos de um isomorfismo) no máximo um δ -funtor universal F^\bullet tal que $F^0 \simeq F$. Se tal F^\bullet existe, os funtores F^n , $n > 0$, são chamados **funtores satélites à direita** de F .

4.19. Definição. Um funtor covariante $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito **apagador** se, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um $m: A \rightarrow A'$ mono tal que $Fm = 0$.



4.20. Lema. *Suponhamos que, no cubo à esquerda, d seja epi e as faces esquerda, de cima, de baixo, de fundos e de frente sejam comutativas. Então a face direita também é comutativa.*

Suponhamos que, no cubo à direita, g_1 seja mono e as faces esquerda, direita, de cima, de baixo e de fundos sejam comutativas. Então a face frontal também é comutativa.

Demonstração. Basta observar que $\alpha'_1 f_1 d = g_1 \alpha_1 d$ para o cubo esquerdo e que $g_1 \alpha_1 d = g_1 \delta \alpha_3$ para o cubo direito, o que é imediato ■

4.21. Teorema (Grothendieck). *Seja $F^\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um δ -funtor covariante. Se F^n é apagador para todo $n > 0$, então F^\bullet é universal.*

Demonstração. Seja $G^\bullet: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um δ -funtor arbitrário e seja

$\alpha_\bullet : F^0 \rightarrow G^0$ uma transformação natural. Basta mostrar por indução sobre n que existem únicas transformações naturais $\alpha_\bullet^j : F^j \rightarrow G^j$,

$0 \leq j \leq n$, tais que $\alpha_\bullet^0 = \alpha_\bullet$ e, para todo $0 \leq i < n$ e qualquer seqüência $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$

curta exata em \mathcal{C} , o quadrado à direita é comutativo.

A hipótese é óbvia para $n = 0$.
Seja $A_1 \in \mathcal{C}$. Para definir $\alpha_{A_1}^{n+1}$, encontramos um

$m : A_1 \rightarrow A_2$ mono tal que $F^{n+1}m = 0$. Fazendo $p := \text{co } m$ e $A_3 := \text{Co } m$, obtemos uma seqüência curta exata $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$.

Sendo F^\bullet um δ -funtor com $F^{n+1}m = 0$, obtemos uma seqüência exata

$F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} F^{n+1} A_1 \rightarrow 0$. Pela hipótese de indução e por G^\bullet ser

$$\begin{array}{ccccc} F^n A_2 & \xrightarrow{F^n p} & F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \rightarrow 0 \\ \downarrow \alpha_{A_2}^n & & \downarrow \alpha_{A_3}^n & & \downarrow \alpha_{A_1, E}^{n+1} \\ G^n A_2 & \xrightarrow{G^n p} & G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1 \end{array}$$

um δ -funtor, o diagrama acima é comutativo e com linhas exatas. Sendo

$\delta_{F^\bullet, E}^n = \text{co } F^n p$, encontramos um único morfismo

$\alpha_{A_1, E}^{n+1} : F^{n+1} A_1 \rightarrow G^{n+1} A_1$ que faz o diagrama comutativo. Já temos a

unicidade de α_{\bullet}^{n+1} . Consideremos agora uma outra sequência curta exata

$E' : 0 \rightarrow A'_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$ com m' "apagado" por F^{n+1} , isto é,

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \\ & & & A'_1 & \xrightarrow{m'} & A'_2 & \xrightarrow{p'} & A'_3 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$F^{n+1}m' = 0$. Seja $h : E \rightarrow E'$ um morfismo (vide o diagrama acima).

Então, como acima, obtemos um morfismo $\alpha_{A'_1, E'}^{n+1} : F^{n+1}A'_1 \rightarrow G^{n+1}A'_1$. No

cubo à direita, $\delta_{F^\bullet, E}^n$ é epi, a face esquerda é comutativa por α_{\bullet}^n ser transformação natural, as faces de cima e de baixo são comutativas por F^\bullet e G^\bullet serem δ -funtores e as faces de fundos e de frente são comutativas pela construção. Aplicando o Lema 4.20

$$\begin{array}{ccccc} & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E'}} & F^{n+1} A'_1 \rightarrow 0 \\ & \nearrow F^n h_3 & \downarrow \alpha_{A'_3}^n & \nearrow F^{n+1} h_1 & \downarrow \alpha_{A'_1, E'}^{n+1} \\ F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}^n} & F^{n+1} A_1 \rightarrow 0 & & \\ & \downarrow \alpha_{A_3}^n & & & \\ & & G^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E'}} & G^{n+1} A'_1 \\ & \nearrow G^n h_3 & \downarrow \alpha_{A_1, E}^{n+1} & \nearrow G^{n+1} h_1 & \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}^n} & G^{n+1} A_1 & & \end{array}$$

(cubo esquerdo), obtemos a comutatividade na face direita.

Utilizando o fato obtido, provemos que $\alpha_{A_1, E}^{n+1}$ independe da escolha da seqüência E . Realmente, seja $E'' : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m''} A_2'' \xrightarrow{p''} A_3'' \rightarrow 0$ uma outra seqüência curta exata com $F^{n+1}m'' = 0$. Façamos $A_2' := A_2'' \sqcup_{A_1} A_2$ e $m' := h_2 m = h_2' m''$ (vide o diagrama à direita). Pela Proposição 2.16.8, h_2 é mono. Logo, m' é mono. De $F^{n+1}m = 0$ segue que $F^{n+1}m' = 0$. Definamos p', h_3 e h_3' que fazem o diagrama abaixo à esquerda com linhas exatas e comutativo. Assim, obtemos dois morfismos entre seqüências curtas exatas $E \xrightarrow{h} E' \xleftarrow{h'} E''$.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 \\ m'' \downarrow & & \downarrow h_2 \\ A_2'' & \xrightarrow{h_2'} & A_2'' \sqcup_{A_1} A_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 & \rightarrow 0 \\ & 1_{A_1} \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m'} & A_2' & \xrightarrow{p'} & A_3' & \rightarrow 0 \\ & 1_{A_1} \uparrow & & h_2' \uparrow & & h_3' \uparrow & \\ 0 \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m''} & A_2'' & \xrightarrow{p''} & A_3'' & \rightarrow 0 \end{array}$$

$F^{n+1}m' = 0$. Com efeito, tomemos primeiramente uma seqüência curta

Aplicando o fato obtido acima a cada morfismo e levando em conta que $h_1 = h_1' = 1_{A_1}$, obtemos $\alpha_{A_1, E}^{n+1} = \alpha_{A_1, E'}^{n+1} = \alpha_{A_1, E''}^{n+1}$.

De maneira semelhante, é fácil provar que $\alpha_{\bullet, E}^{n+1}$ é natural: podemos completar qualquer morfismo $h_1 : A_1 \rightarrow A_1'$ a um morfismo entre seqüências exatas curtas $h : E \rightarrow E'$ com $F^{n+1}m = 0$ e

exata $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ com $F^{n+1}m = 0$. Como acima, partindo de $A'_1 \xleftarrow{h_1} A_1 \xrightarrow{m} A_2$, podemos fazer $A'_1 \xrightarrow{h} A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \xleftarrow{h'_1} A_2$. Sendo m mono, h é mono pela Proposição 2.16.8. Existe um monomorfismo $m'' : A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \rightarrow A'_2$ com $F^{n+1}m'' = 0$. Resta fazer $m' := m''h$, $h_2 := m''h'_1$ e aplicar o fato obtido.

Finalmente, provemos que $\alpha_{A_1}^{n+1} \delta_{F^\bullet, E}^n = \delta_{G^\bullet, E}^n \alpha_{A_3}^n$ para toda sequência curta exata $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$. Para isto, construímos uma sequência curta exata $E' : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$ com $F^{n+1}m' = 0$ e um morfismo $h : E \rightarrow E'$ com $h_1 := 1_{A_1}$. Primeiramente, como acima, encontramos um monomorfismo $m'' : A_1 \rightarrow A''_1$ com $F^{n+1}m'' = 0$. Partindo de $A''_1 \xleftarrow{m''} A_1 \xrightarrow{m} A_2$, podemos fazer $A''_1 \xrightarrow{h'_2} A''_1 \sqcup_{A_1} A_2 \xleftarrow{h_2} A_2$. Sendo m e m'' monos, pela Proposição 2.16.8, h'_2 e h_2 são monos.

Portanto, obtemos o monomorfismo desejado

$m' := h_2 m = h'_2 m'' : A_1 \rightarrow A'_2 := A''_1 \sqcup_{A_1} A_2$ (note que $F^{n+1}m'' = 0$ implica $F^{n+1}m' = 0$). No cubo em baixo, $G^{n+1}h_1$ é mono, pois $h_1 = 1_{A_1}$, as faces esquerda e direita são comutativas por α_{\bullet}^n e α_{\bullet}^{n+1} serem transformações naturais, as faces de cima e de baixo são comutativas por F^\bullet e G^\bullet serem

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E'}} & F^{n+1} A'_1 \\
 & \nearrow^{F^n h_3} & \downarrow \alpha_{A'_3}^n & \nearrow^{F^{n+1} h_1} & \downarrow \alpha_{A'_1}^{n+1} \\
 F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F^\bullet, E}} & F^{n+1} A_1 & & \\
 \downarrow \alpha_{A_3}^n & & \downarrow \alpha_{A_1}^{n+1} & & \\
 & \nearrow^{G^n h_3} & G^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E'}} & G^{n+1} A'_1 \\
 G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G^\bullet, E}} & G^{n+1} A_1 & & \\
 \uparrow 0 & & & & \nearrow^{G^{n+1} h_1}
 \end{array}$$

δ -funtores e a face de fundos é comutativa pela construção de $\alpha_{A'_1}^{n+1}$ (recorde que $F^{n+1} m' = 0$). Pelo Lema 4.20 (veja cubo direito), a face frontal é comutativa ■

4.22. Observação. Seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma seqüência curta exata tal que $\pi m = 1_{A_1}$ para algum $\pi : A_2 \rightarrow A_1$. Então a seqüência é isomorfa à seqüência

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{j_1} & A_1 \oplus A_3 & \xrightarrow{\pi_3} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow 1_{A_1} & & \uparrow h & & \uparrow 1_{A_3} \\
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0
 \end{array}$$

do biproduto $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{j_1} A_1 \oplus A_3 \xrightarrow{\pi_3} A_3 \rightarrow 0$.

Demonstração. Consideremos o diagrama acima, onde h é induzido por π e p , isto é, $\pi_3 h = p$ e $\pi_1 h = \pi$. Temos $\pi_1 h m = \pi m = 1_{A_1} = \pi_1 j_1$ e $\pi_3 h m = p m = 0 = \pi_3 j_1$. Pela propriedade do produto, $h m = j_1$. Sendo o diagrama comutativo, pelo Lema 2.22 (da serpente), h é um isomorfismo ■

Da Observação 4.22 segue que toda sequência curta exata

$0 \rightarrow I \xrightarrow{m} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ com I injetivo é isomorfa à sequência do biproduto (aplique a Definição 4.3 para $a := I, b := B, i := I, \gamma := 1_I$).

Por indução, daí segue que qualquer resolução injetiva de um objeto injetivo I é isomorfa à resolução do tipo $0 \rightarrow I \rightarrow I \oplus I'^1 \rightarrow I'^1 \oplus I'^2 \rightarrow \dots$

Aplicando a esta resolução o funtor $H^n F$ com $n > 0$, temos 0 . Em outras palavras, $R^n F I = 0$ se $n > 0$ e I for injetivo. Consequentemente, pelo Teorema 4.21, obtemos o

4.23. Corolário. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Então $R^\bullet F$ é um δ -funtor universal. ■*

Em particular, se vamos construir o δ -funtor $R^\bullet F$ fixando outras resoluções injetivas, obtemos um δ -funtor isomorfo. ▶ ◀ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

Neste sentido, R^*F independe da escolha de resolução.

4.24. Definição. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Um objeto $A \in \mathcal{C}$ se chama **F -acíclico** se, para todo $n > 0$, temos $R^n FA = 0$. Uma resolução $0 \rightarrow A \rightarrow A^\bullet$ é dita **resolução F -acíclica** de A se todo A^i é F -acíclico.

4.25. Observação. Podemos calcular $R^n F$ utilizando resoluções acíclicas: para qualquer resolução acíclica $0 \rightarrow A \rightarrow A^\bullet$, temos $R^n FA \simeq H^n FA^\bullet$ para todo $n \geq 0$.

Demonstração. A resolução $0 \rightarrow A \rightarrow A^\bullet$ é um ziguezague de seqüências curtas exatas $0 \rightarrow X^n \xrightarrow{m^n} A^n \xrightarrow{p^n} X^{n+1} \rightarrow 0$, $n \geq 0$, onde $X^0 \simeq A$. Cada uma dessas seqüências induz sua seqüência exata longa. Devido a $R^n FA^k = 0$ para todos $n > 0$ e $k \geq 0$, obtemos $R^n FX^{k+1} \simeq R^{n+1} FX^k$. Consequentemente, $R^n FA \simeq R^n FX^0 \simeq \dots \simeq R^1 FX^{n-1}$ para todo $n > 0$. Além disso, a seqüência $0 \rightarrow FX^{n-1} \xrightarrow{Fm^{n-1}} FA^{n-1} \xrightarrow{Fp^{n-1}} FX^n \rightarrow R^1 FX^{n-1} \rightarrow 0$ é exata para todo $n > 0$ (pois $R^1 FA^{n-1} = 0$ e $R^0 F \simeq F$). Logo, $R^n FA \simeq R^1 FX^{n-1} \simeq \text{CoF}p^{n-1}$ para todo $n > 0$.

Para qualquer complexo C^\bullet , temos $d_{C^\bullet}^{n-1} = (\ker d_{C^\bullet}^n)j_{C^\bullet}^n \cdot \pi_{C^\bullet}^n$ (vide o início da subseção 3.2). Por definição, $H^n C^\bullet = \text{Co} j_{C^\bullet}^n$. Sendo $\pi_{C^\bullet}^n$ epi, $\text{Co} j_{C^\bullet}^n \simeq \text{Co}(j_{C^\bullet}^n \cdot \pi_{C^\bullet}^n)$. Assim, $H^n C^\bullet \simeq \text{Co} h^n$, onde h^n é o único morfismo tal que $d_{C^\bullet}^{n-1} = (\ker d_{C^\bullet}^n)h^n$. Resta observar que, para $n > 0$, temos a decomposição $d_{FA^\bullet}^{n-1} = (Fm^n)(Fp^{n-1})$, onde $Fm^n = \ker d_{FA^\bullet}^n$ pela Observação 4.14 ■

Exercícios