Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan′in

ICMC, USP, São Carlos

25/11/2015 – 09/12/2015

5. Categorias derivadas

5.1. Categoria de frações. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $S \subset \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ uma coleção de morfismos. Procuramos descrever explicitamente a **categoria de frações** $\mathcal{C}[S^{-1}]$, ou seja, um funtor universal $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}$ que manda todo $s \in S$ para um isomorfismo em $\mathcal{Q}$. Em geral, este problema é complicado. Mas, se exigirmos algumas condições que permitam escrever qualquer coleção finita de "frações" na forma com um "denominador comum", o problema pode ser resolvido. No que se segue, introduzimos as condições mencionadas e construímos a categoria de frações. Os resultados serão aplicados às categorias $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$ e $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$.

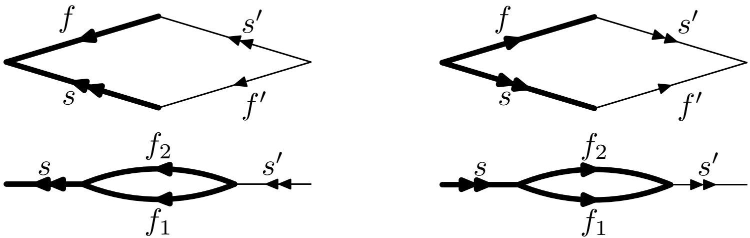
Sem perda de generalidade, vamos supor que S é fechado relativamente à composição (quando definida) e que $1_c \in S$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Para lidar com os denominadores à direita, precisamos das seguintes duas condições:

A. Para todos $f \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ e $s \in S$, existem $f' \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ e $s' \in S$ tais que $fs' = sf'$.

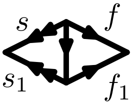
B. Para todos $f_1, f_2 \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ e $s \in S$ tais que $sf_1 = sf_2$, existe $s' \in S$ tal que $f_1 s' = f_2 s'$.

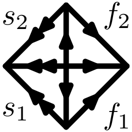
Informalmente, a condição A permite reescrever $s^{-1} f$ na forma $f' s'^{-1}$.

Nos diagramas relacionados às categorias de frações, exibimos morfismos de S utilizando setas duplas e morfismos a ser construídos utilizando setas mais finas. Assim, os diagramas abaixo à esquerda exibem as condições A e B. Os diagramas abaixo à direita ilustram as condições A′ e B′, duais a A e B.

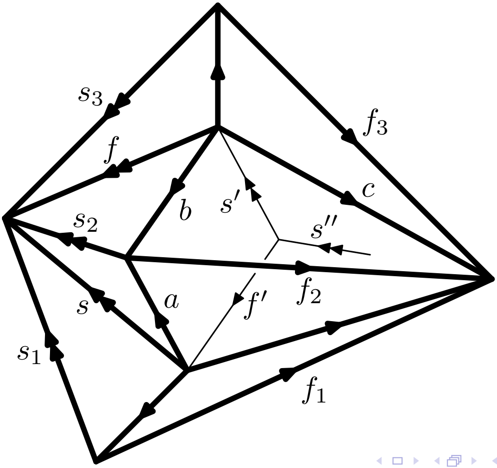


Supondo que as condições A e B são válidas, vamos construir a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Os objetos são os mesmos como em $\mathcal{C}$. Um morfismo $\varphi \in \mathcal{C}[S^{-1}](c_1, c_2)$ é um par de morfismos em $\mathcal{C}$ do tipo $s : c \to c_1$ e $f : c \to c_2$, denotado por $\varphi := fs^{-1}$ e considerado módulo a seguinte relação de equivalência.

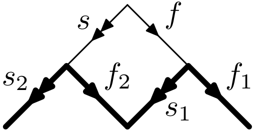




Se o primeiro diagrama à esquerda é comutativo, dizemos que fs^{-1} é equivalente a $f_1 s_1^{-1}$ e escrevemos $f_1 s_1^{-1} \sim fs^{-1}$. A relação $\sim$ introduzida deste modo é reflexiva, mas não é simétrica. A relação simétrica (e reflexiva) $f_1 s_1^{-1} \sim f_2 s_2^{-1}$ corresponde ao segundo diagrama comutativo à esquerda. Provemos que $\sim$ é transitiva. A comutatividade do diagrama



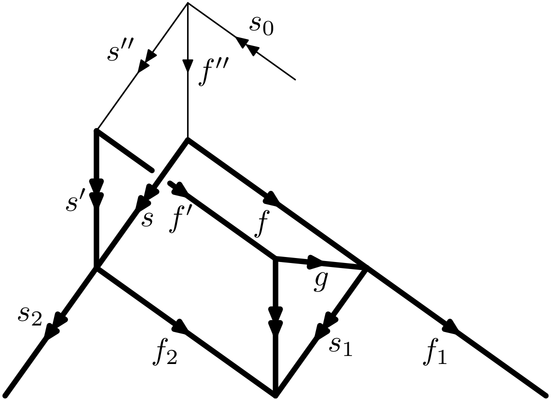
considerado inicialmente sem setas finas significa que $f_1 s_1^{-1} \sim f_2 s_2^{-1}$ e $f_2 s_2^{-1} \sim f_3 s_3^{-1}$. Pela condição A, podemos achar $s' \in S$ e f' tais que $fs' = sf'$. Portanto, $s_2(bs') = s_2(af')$. Pela condição B, podemos encontrar $s'' \in S$ tal que $(bs')s'' = (af')s''$. Denotando por s' a seta $s's''$ e por f' a seta $f's''$, podemos ver que o diagrama com as setas finas é comutativo (a seta s'' pode ser desconsiderada). Agora, utilizando o par de setas $(cs')(fs')^{-1}$ (note que $fs' \in S$), é fácil verificar que $f_1 s_1^{-1} \sim f_3 s_3^{-1}$.



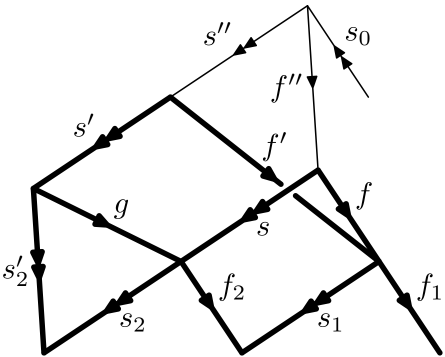
Definimos o produto $(f_1 s_1^{-1})(f_2 s_2^{-1})$ como $(f_1 f)(s_2 s)^{-1}$, onde os morfismos f e $s \in S$ no diagrama comutativo à esquerda são obtidos pela condição A. Para provar que essa definição é correta, devemos verificar que o produto fica equivalente nas seguintes três circunstâncias:

1. escolhemos outros f e $s \in S$ quando utilizamos a condição A,
2. trocamos por equivalente o fator $f_1 s_1^{-1}$,
3. trocamos por equivalente o fator $f_2 s_2^{-1}$.

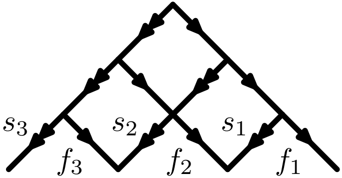
Trocando um fator por outro equivalente, é suficiente usar a equivalência mais elementar do tipo $f_1 s_1^{-1} \sim (f_1 g)(s_1 g)^{-1}$, exibida no primeiro diagrama relacionado a $\sim$, onde $s_1 g \in S$.

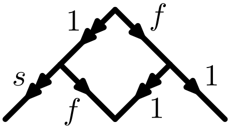


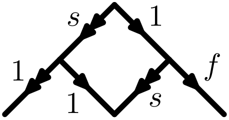
O diagrama acima trata do caso 1 (tome $g = 1$) e do caso 2. Dado este diagrama comutativo sem setas finas, construímos, pela condição A, setas f'' e $s'' \in S$ tais que $s's'' = sf''$. Sendo $s_1(ff'') = s_1(gf's'')$, pela condição B, construímos uma seta $s_0 \in S$ tal que $(ff'')s_0 = (gf's'')s_0$. Denotando por s'' a seta $s''s_0$ e por f'' a seta $f''s_0$, obtemos o diagrama comutativo com setas finas (a seta anterior s_0 está desconsiderada). Deste diagrama, é fácil ver que $(f_1 f)(s_2 s)^{-1} \sim (f_1 g f')(s_2 s')^{-1}$.



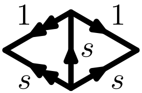
O diagrama acima, comutativo sem setas finas, trata do caso 3. Pela condição A, construímos setas f'' e $s'' \in S$ tais que $gs's'' = sf''$. Observando que $s_1(ff'') = s_1(f's'')$, pela condição B, construímos uma seta $s_0 \in S$ tal que $(ff'')s_0 = (f's'')s_0$. Denotando por s'' a seta $s''s_0$ e por f'' a seta $f''s_0$, obtemos o diagrama comutativo com setas finas (e com a seta s_0 retirada). Agora, é fácil ver que $(f_1 f)(s_2 s)^{-1} \sim (f_1 f')(s'_2 s')^{-1}$.

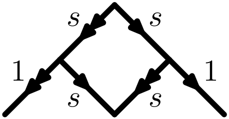


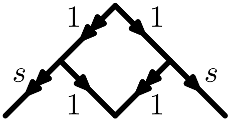




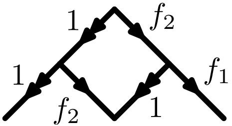
O diagrama acima à esquerda mostra que a multiplicação introduzida é associativa. Dois diagramas acima à direita mostram que os morfismos do tipo $1_c 1_c^{-1}$ servem como unidades. Assim acabamos de construir a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$.







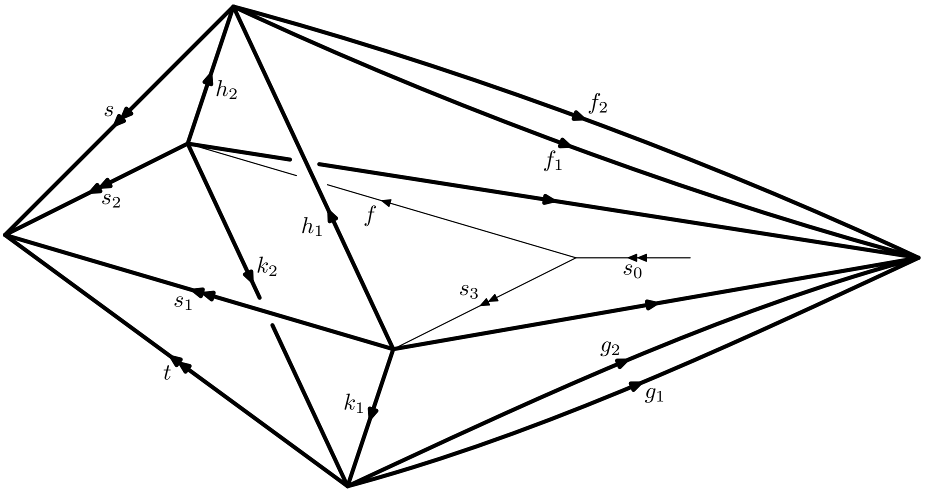
O diagrama acima à esquerda mostra que $ss^{-1} \sim 11^{-1}$ para todo $s \in S$. Agora dois diagramas acima à direita mostram que o morfismo $1s^{-1}$ é o inverso de $s1^{-1}$.



Definimos $Qf := f1^{-1}$. O diagrama à esquerda mostra que Q é um funtor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$. Já sabemos que Qs é um isomorfismo para todo $s \in S$. Para concluir que a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é a desejada, basta observar que, após aplicar qualquer funtor que manda todo $s \in S$ para um isomorfismo, a equivalência se torna a igualdade e o produto definido acima se transforma no produto usual.

Utilizando a condição A e a definição da equivalência, é fácil ver que qualquer coleção finita de morfismos em $\mathcal{C}[S^{-1}]$ com a mesma origem pode ser escrita com um denominador comum, isto é, para quaisquer morfismos $f_js_j^{-1} : c \to c_j$ em $\mathcal{C}[S^{-1}]$, $j = 1, 2, \dots, n$, existem morfismos g_j's e $s \in S$ em $\mathcal{C}$ tais que $f_js_j^{-1} = g_js^{-1}$ em $\mathcal{C}[S^{-1}]$ para todo j.

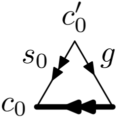
Suponhamos que $\mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}[S^{-1}](c, c')$. Escrevemos φ_1 e φ_2 com um denominador comum, $\varphi_j = f_js^{-1}$, $s \in S$, e definimos $\varphi_1 + \varphi_2 := (f_1 + f_2)s^{-1}$. Vamos verificar que essa definição independe da escolha de denominador comum. Suponhamos que $f_js^{-1} \sim g_jt^{-1}$ para $t \in S$ e todo $j = 1, 2$. Então temos um diagrama comutativo sem setas finas, onde as setas f_1 e g_1 participam nas faces



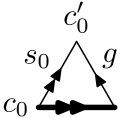
frontais e as setas f_2 e g_2 participam nas faces de fundos. Pela condição A, encontramos setas f e $s_3 \in S$ tais que $s_1 s_3 = s_2 f$. Temos $s(h_1 s_3) = s(h_2 f)$ e $t(k_1 s_3) = t(k_2 f)$. Utilizando duas vezes a condição B, podemos supor que o diagrama com setas finas (e sem a seta s_0) é essencialmente comutativo. Daí segue que $(f_1+f_2)s^{-1} \sim (g_1+g_2)t^{-1}$. Claro que, nesta situação, o funtor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ é aditivo.

Sejam dadas uma categoria $\mathcal{C}$ e uma coleção de morfismos $S \subset \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ que satisfaz as condições A e B. Seja $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ uma subcategoria completa tal que a coleção de morfismos $S_0 = S \cap \operatorname{Mor}\mathcal{C}_0$ também satisfaz as condições A e B. Adicionalmente, suponhamos que vale a condição

C. Para todo morfismo $s : c \to c_0$ em S com $c_0 \in \mathcal{C}_0$, existe um morfismo $g : c_0' \to c$ em $\mathcal{C}$ com $c_0' \in \mathcal{C}_0$ tal que $sg \in S$.

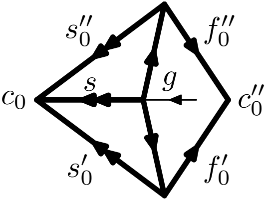


O diagrama à esquerda exibe a condição C. O diagrama à direita trata da condição C′, dual a C. Nesta situação, obtemos um funtor $I : \mathcal{C}_0[S_0^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ no diagrama comutativo abaixo à esquerda pela universalidade de $\mathcal{C}_0[S_0^{-1}]$.



$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
\mathcal{C}_0[S_0^{-1}] \arrow[r, "I"] & \mathcal{C}[S^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Provaremos que I é a equivalência com sua imagem, ou seja, que a categoria $\mathcal{C}_0[S_0^{-1}]$ é de fato uma subcategoria completa em $\mathcal{C}[S^{-1}]$.



Pelo Critério 1.8, basta mostrar que, para quaisquer

$c_0, c_0'' \in \mathcal{C}_0$, a função $I : \mathcal{C}_0[S_0^{-1}](c_0, c_0'') \to \mathcal{C}[S^{-1}](c_0, c_0'')$ é bijetora. Pela condição C, para todo morfismo $fs^{-1} \in \mathcal{C}[S^{-1}](c_0, c_0'')$, onde $s : c \to c_0$ pertence a S, podemos encontrar um morfismo $g : c_0' \to c$ em $\mathcal{C}$ com $c_0' \in \mathcal{C}_0$ tal que $sg \in S_0$. Logo, $fs^{-1} \sim (fg)(sg)^{-1}$. Concluímos que I é sobrejetivo no nível de morfismos. Sejam dados morfismos $f_0' {s_0'}^{-1}, f_0'' {s_0''}^{-1} \in \mathcal{C}_0[S_0^{-1}](c_0, c_0'')$ equivalentes em $\mathcal{C}[S^{-1}]$, $f_0' {s_0'}^{-1} \sim f_0'' {s_0''}^{-1}$. Isto significa que o diagrama acima à direita sem seta fina é comutativo. Pela condição C, encontramos uma seta $g \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ tal que $sg \in S_0$. O resto segue do diagrama ■

5.2. Cone e cilindro. Agora estudaremos em detalhes as categorias $\operatorname{Kom}^* \mathcal{C}$ e $\operatorname{K}^* \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana. Definamos o funtor de **shift por** $n \in \mathbb{Z}$. Seja $K^\bullet \in \operatorname{Kom}^* \mathcal{C}$. Façamos $K[n]^i := K^{n+i}$ e $d^i_{K[n]^\bullet} := (-1)^n d^{n+i}_{K^\bullet}$. Para um morfismo $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ em $\operatorname{Kom}^* \mathcal{C}$, façamos $f[n]^i := f^{n+i}$. É imediato que $[n]$ é um funtor e que morfismos homotópicos $f^\bullet \sim g^\bullet$ geram morfismos homotópicos $f[n]^\bullet \sim g[n]^\bullet$.

5.2.1. Observação. *Pela convenção presente logo após a Definição 2.17,* $\operatorname{Ker}(-h) = \operatorname{Ker} h$, $\ker(-h) = \ker h$, $\operatorname{Co}(-h) = \operatorname{Co} h$, $\operatorname{co}(-h) = \operatorname{co} h$ *e* $\operatorname{Im}(-h) = \operatorname{Im} h$ *para todo morfismo* h *em* $\mathcal{C}$*. Daí segue* (*vide o Lema* $3.2.4$ *e as definições dos funtores* $\mathrm{B}^\bullet$, $\mathrm{Z}^\bullet$, $\mathrm{H}^\bullet$ *e das correspondentes transformações naturais* $j^\bullet_{K^\bullet}$, $\alpha^\bullet_{K^\bullet}$, $\beta^\bullet_{K^\bullet}$) *que* $\mathrm{B}^i\,K[n]^\bullet = \mathrm{B}^{n+i}\,K^\bullet$, $\mathrm{Z}^i\,K[n]^\bullet = \mathrm{Z}^{n+i}\,K^\bullet$, $\mathrm{H}^i\,K[n]^\bullet = \mathrm{H}^{n+i}\,K^\bullet$, $\mathrm{Co}\,d^i_{K[n]^\bullet} = \mathrm{Co}\,d^{n+i}_{K^\bullet}$, $j^i_{K[n]^\bullet} = (-1)^n j^{n+i}_{K^\bullet}$, $\alpha^i_{K[n]^\bullet} = \alpha^{n+i}_{K^\bullet}$, $\beta^i_{K[n]^\bullet} = (-1)^n\beta^{n+i}_{K^\bullet}$, *o morfismo* $K[n]^{i-1} \to \mathrm{B}^i\,K[n]^\bullet$ *coincide com o morfismo* $K^{n+i-1} \to \mathrm{B}^{n+i}\,K^\bullet$, *o morfismo* $\mathrm{Z}^i\,K[n]^\bullet \to \mathrm{H}^i\,K[n]^\bullet$ *coincide com o morfismo* $\mathrm{Z}^{n+i}\,K^\bullet \to \mathrm{H}^{n+i}\,K^\bullet$ *e o morfismo* $K[n]^i \to \mathrm{Co}\,d^{i-1}_{K[n]^\bullet}$ *coincide com o morfismo* $K^{n+i} \to \mathrm{Co}\,d^{n+i-1}_{K^\bullet}$ ■

A qualquer morfismo $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ em $\mathrm{Kom}^*\,\mathcal{C}$ associamos o **cone** $\mathrm{C}\,f^\bullet \in \mathrm{Kom}^*\,\mathcal{C}$ de $f^\bullet$ e o **cilindro** $\mathrm{Cyl}\,f^\bullet \in \mathrm{Kom}^*\,\mathcal{C}$ de $f^\bullet$:

$$\mathrm{C}\,f^i := \begin{matrix} K[1]^i \\ \oplus \\ L^i \end{matrix}, \qquad d^\bullet_{\mathrm{C}\,f^\bullet} := \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Cyl}\,f^i := \begin{matrix} K^i \\ \oplus \\ \mathrm{C}\,f^i \end{matrix} = \begin{matrix} K^i \\ \oplus \\ K[1]^i \\ \oplus \\ L^i \end{matrix}, \qquad d^\bullet_{\mathrm{Cyl}\,f^\bullet} := \begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix}.$$

O fato que $\mathrm{C}\, f^\bullet, \mathrm{Cyl}\, f^\bullet \in \mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$ segue de $f[1]^{i+1} d^i_{K[1]^\bullet} + d^{i+1}_{L^\bullet} f[1]^i = -f^{i+2} d^{i+1}_{K^\bullet} + d^{i+1}_{L^\bullet} f^{i+1} = 0$ e de $-d^{i+1}_{K^\bullet} - d^i_{K[1]^\bullet} = 0$. É fácil ver que as setas nas linhas do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 & K[1]^\bullet \arrow[l] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[l, "\delta^\bullet_{f^\bullet} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}"'] \arrow[d, "1_{\mathrm{C}\, f^\bullet}"'] & L^\bullet \arrow[l, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[d, "\alpha^\bullet_{f^\bullet} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] & 0 \arrow[l] & \\
& 0 & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[l] & \mathrm{Cyl}\, f^\bullet \arrow[l, "\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[d, "\beta^\bullet_{f^\bullet} := \begin{bmatrix} f^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix}"'] & K^\bullet \arrow[l, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}"] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & 0 \arrow[l] \\
& & & L^\bullet & K^\bullet \arrow[l, "f^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

chamado C-Cyl-**diagrama**, são morfismos de complexos. Obviamente, estas linhas são exatas. As setas $\alpha^\bullet_{f^\bullet}$ e $\beta^\bullet_{f^\bullet}$ no diagrama comutativo também são morfismos de complexos, pois

$$\begin{bmatrix} f^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^\bullet d^\bullet_{K^\bullet} & -f[1]^\bullet + f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = d^\bullet_{L^\bullet} \begin{bmatrix} f^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} K_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] \arrow[d, "k^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[d, "l^\bullet"'] \\ K_2^\bullet \arrow[r, "f_2^\bullet"] & L_2^\bullet \end{tikzcd}$$

O cone e o cilindro são funtores e o C-Cyl-diagrama é funtorial em f. Realmente, seja $m := (k^\bullet, l^\bullet)$ um morfismo entre as setas $f_1^\bullet : K_1^\bullet \to L_1^\bullet$ e $f_2^\bullet : K_2^\bullet \to L_2^\bullet$. Definamos $\mathrm{C}\, m := \begin{bmatrix} k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & l^\bullet \end{bmatrix}$ e $\mathrm{Cyl}\, m := \begin{bmatrix} k^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & 0 & l^\bullet \end{bmatrix}$. Os fatos seguem por uma verificação direta.

Obviamente, $\beta^\bullet_{f^\bullet}\alpha^\bullet_{f^\bullet} = 1_{L^\bullet}$. Para a homotopia $h^\bullet$ dada por $h^\bullet := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, temos

$$1_{\mathrm{Cyl}\, f^\bullet} + d^\bullet_{\mathrm{Cyl}\, f^\bullet} h^\bullet + h^\bullet d^\bullet_{\mathrm{Cyl}\, f^\bullet} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -d^\bullet_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ f^\bullet & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha^\bullet_{f^\bullet}\beta^\bullet_{f^\bullet}.$$

Vamos verificar que o morfismo composto $\mathrm{C}\, f^\bullet \to K[1]^\bullet \xrightarrow{f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$ é homotópico a 0 com a homotopia h_1 de $\mathrm{C}\, f^\bullet$ para $L[1]^\bullet$ dada por $h_1^\bullet = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Realmente, $d^\bullet_{L[1]^\bullet} h_1^\bullet + h_1^\bullet d^\bullet_{\mathrm{C}\, f^\bullet} = \begin{bmatrix} f[1]^\bullet & -d^\bullet_{L[1]^\bullet} + d^\bullet_{L[1]^\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f[1]^\bullet & 0 \end{bmatrix}$ é igual ao morfismo composto em questão.

Resumindo, chegamos ao

5.2.2. Lema. C *e* Cyl *são funtores. O* C-Cyl-*diagrama é comutativo, funtorial em* $f^\bullet$ *e com linhas exatas. Além disso,* $\beta^\bullet_{f^\bullet}\alpha^\bullet_{f^\bullet} = 1_{L^\bullet}$,

$\alpha^\bullet_{f^\bullet}\beta^\bullet_{f^\bullet} \sim 1_{\mathrm{Cyl}\, f^\bullet}$ *e a composta* $\mathrm{C}\, f^\bullet \to K[1]^\bullet \xrightarrow{f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$ *é homotópica a* 0 ∎

Seja $h^\bullet : f^\bullet \to g^\bullet$ uma homotopia entre os morfismos $f^\bullet, g^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$, isto é, $f^\bullet = g^\bullet + d^\bullet_{L^\bullet} h^\bullet + h^\bullet d^\bullet_{K^\bullet}$. Definamos $\mathrm{C}\, h^\bullet := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathrm{Cyl}\, h^\bullet := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

5.2.3. Lema. *Sejam* $f^\bullet, g^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ *morfismos e seja* $h^\bullet : f^\bullet \to g^\bullet$ *uma homotopia. Então* $\mathrm{C}\, h^\bullet$ *e* $\mathrm{Cyl}\, h^\bullet$ *são morfismos e os diagramas*

$$\begin{tikzcd} 0 & K[1]^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "1_{K[1]^\bullet}"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{C}\, h^\bullet"] & L^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "1_{L^\bullet}"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & K[1]^\bullet \arrow[l] & \mathrm{C}\, g^\bullet \arrow[l] & L^\bullet \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{C}\, h^\bullet"] & \mathrm{Cyl}\, f^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Cyl}\, h^\bullet"] & K^\bullet \arrow[l] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathrm{C}\, g^\bullet \arrow[l] & \mathrm{Cyl}\, g^\bullet \arrow[l] & K^\bullet \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

são comutativos.

Demonstração. De $d^\bullet_{K[1]^\bullet} = -d^\bullet_{K^\bullet}$ segue a igualdade $g[1]^\bullet + d^\bullet_{L^\bullet} h^\bullet = h^\bullet d^\bullet_{K[1]^\bullet} + f[1]^\bullet$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ g[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ g[1]^\bullet + d^\bullet_{L^\bullet} h^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ h^\bullet d^\bullet_{K[1]^\bullet} + f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & g[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & g[1]^\bullet + d^\bullet_{L^\bullet} h^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & h^\bullet d^\bullet_{K[1]^\bullet} + f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} d^\bullet_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix}.$$

Além disso, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ■

5.2.4. Lema. *Seja $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ um morfismo. Então o morfismo $\mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \to \mathrm{H}^{i+1}\,K^\bullet$ induzido pela sequência curta exata $0 \to K^\bullet \to \mathrm{Cyl}\,f^\bullet \to \mathrm{C}\,f^\bullet \to 0$ coincide com $-\mathrm{H}^i\,\delta^\bullet_{f^\bullet} : \mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \to \mathrm{H}^i\,K[1]^\bullet$.*

Demonstração. Por (3.3.1), o morfismo $\mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \to \mathrm{H}^{i+1}\,K^\bullet$ é o único morfismo que faz o diagrama à esquerda comutativo, onde o morfismo δ do

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[r] & \mathrm{H}^{i+1}\,K^\bullet \arrow[d, "\alpha^{i+1}_{K^\bullet}"'] \\ \mathrm{Z}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[u] \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Co}\,d^i_{K^\bullet} \end{tikzcd}$$

Lema 2.22 (da serpente) é dado pela regra (2.22.2). Utilizando o diagrama abaixo, onde as setas pontilhadas são respectivamente a injeção $\gamma := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e a projeção $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ dos biprodutos, podemos calcular

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Z}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[d, "\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"] & \\
0 \arrow[r] & K^i \arrow[rr] \arrow[d, "d^i_{K^\bullet}"'] & & \mathrm{Cyl}\,f^i \arrow[r] \arrow[d, "d^i_{\mathrm{Cyl}\,f^\bullet}"] & \mathrm{C}\,f^i \arrow[l, dashed, bend right, "\gamma"'] \arrow[r] \arrow[d, "d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{co}\,d^i_{K^\bullet}"'] & \mathrm{Cyl}\,f^{i+1} \arrow[l, dashed, bend right, "{[\,1\ 0\ 0\,]}"'] \arrow[r] & \mathrm{C}\,f^{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Co}\,d^i_{K^\bullet} & & &
\end{tikzcd}$$

$$\delta = \mathrm{co}\,d^i_{K^\bullet}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d^i_{K^\bullet} & -1 & 0 \\ 0 & d^i_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 0 & g[1]^i & d^i_{L^\bullet}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet} =$$

$$= \mathrm{co}\,d^i_{K^\bullet}\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet} = \mathrm{co}\,d^i_{K^\bullet}(-\delta^\bullet_{f^\bullet})\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}.$$

Portanto, pela Observação 5.2.1, o morfismo $\mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \to \mathrm{H}^{i+1}\,K^\bullet = \mathrm{H}^i\,K[1]^\bullet$ em questão é o único no diagrama comutativo abaixo à esquerda que, por sua vez, faz parte do diagrama comutativo abaixo à direita.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[r] & \mathrm{H}^i\,K[1]^\bullet \arrow[d, "\alpha^i_{K[1]^\bullet}"] \\
\mathrm{Z}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[u] \arrow[d, "\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"'] & \mathrm{Co}\,d^{i-1}_{K[1]^\bullet} \\
\mathrm{C}\,f^i \arrow[r, "-\delta^i_{f^\bullet}"] & K[1]^i \arrow[u, "\mathrm{co}\,d^{i-1}_{K[1]^\bullet}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Z}^i\,K[1]^\bullet \arrow[rr] \arrow[dd, "\ker d^i_{K[1]^\bullet}" near start] & & \mathrm{H}^i\,K[1]^\bullet \arrow[dd, "\alpha^i_{K[1]^\bullet}"] \\
\mathrm{Z}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[ur, "\mathrm{Z}^i(-\delta^\bullet_{f^\bullet})"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\ker d^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"'] & & \mathrm{H}^i\,\mathrm{C}\,f^\bullet \arrow[ur, "\mathrm{H}^i(-\delta^\bullet_{f^\bullet})"] \arrow[dd, "\alpha^i_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"' near start] & \\
 & K[1]^i \arrow[rr, "\mathrm{co}\,d^{i-1}_{K[1]^\bullet}" near start] & & \mathrm{Co}\,d^{i-1}_{K[1]^\bullet} \\
\mathrm{C}\,f^i \arrow[ur, "-\delta^i_{f^\bullet}"'] \arrow[rr, "\mathrm{co}\,d^{i-1}_{\mathrm{C}\,f^\bullet}"'] & & \mathrm{Co}\,d^{i-1}_{\mathrm{C}\,f^\bullet} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Este último expressa uma parte da naturalidade do diagrama do Lema 3.2.4 em relação ao morfismo $-\delta^\bullet_{f^\bullet}$ ∎

5.3. Triângulos em $\mathrm{K}^*\,\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Do ponto de vista cohomológico, o conceito de sequência curta exata em $\mathrm{Kom}^*\,\mathcal{C}$ não parece muito adequado (em $\mathrm{K}^*\,\mathcal{C}$ este não faz muito sentido). Por exemplo, os morfismos δ^i_E na sequência longa exata são definidos de maneira sofisticada, o que dificulta o cálculo de cohomologias e de morfismos entre si. Um outro defeito é que não podemos incluir um morfismo arbitrário entre complexos numa sequência curta exata. Um conceito mais simétrico, e portanto mais adequado, é o de triângulo.

5.3.1. Definição. Um morfismo $f^\bullet$ na categoria $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$ ou $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$ se chama **quase isomorfismo** se $\mathrm{H}^i f^\bullet$ é isomorfismo para todo i.

5.3.2. Definição. Seja $\mathcal{K}$ uma categoria munida de um automorfismo $[1] : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Um diagrama do tipo $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ se chama **triângulo** em $\mathcal{K}$. O diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] & K[1] \arrow[d, "k[1]"] \\ K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \arrow[r, "g_1"] & M_1 \arrow[r, "h_1"] & K_1[1] \end{tikzcd}$$

descreve um **morfismo** entre triângulos. Claro que este é um isomorfismo se e só se k, l, m são isomorfismos.

5.3.3. Definição. Pela Observação 5.2.1, a cada triângulo $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$ na categoria $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$ ou $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, podemos associar a **$\mathrm{H}^\bullet$-sequência**

$$\dots \xrightarrow{\mathrm{H}^{i-1} h^\bullet} \mathrm{H}^i K^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^i f^\bullet} \mathrm{H}^i L^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^i g^\bullet} \mathrm{H}^i M^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^i h^\bullet}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{H}^i h^\bullet} \mathrm{H}^{i+1} K^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1} f^\bullet} \mathrm{H}^{i+1} L^\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1} g^\bullet} \dots$$

Claro que todo morfismo entre triângulos induz um morfismo entre as correspondentes $\mathrm{H}^\bullet$-sequências. Qualquer triângulo em $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ isomorfo ao triângulo $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \to \mathrm{C}\, f^\bullet \to K[1]^\bullet$ é dito **distinguido**.

5.3.4. Observação. *Pelo Lema* $5.2.2$, *qualquer triângulo distinguido em* $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ *é isomorfo em* $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ *ao triângulo do tipo* $K^\bullet \to \mathrm{Cyl}\, f^\bullet \to \mathrm{C}\, f^\bullet \to K[1]^\bullet$, *distinguido em* $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$, *pois o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"'] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, bend left, "\alpha^\bullet_{f^\bullet}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{K}^*"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{C}\, f^\bullet}"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "1_{K^\bullet}[1]"] \\
K^\bullet \arrow[r] & \mathrm{Cyl}\, f^\bullet \arrow[r] \arrow[u, bend left, "\beta^\bullet_{f^\bullet}"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r] & K[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

é comutativo em $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, *com a única exceção em que* $\alpha^\bullet_{f^\bullet}\beta^\bullet_{f^\bullet}$ *é apenas homotópico a* 1. *Assim, a* $\mathrm{H}^\bullet$*-sequência de um triângulo distinguido em* $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$ *ou* $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ *é exata pelos Lemas* $5.2.2$ *e* $5.2.4$. *Em particular,* $f^\bullet$ *é um quase isomorfismo se e só se* $\mathrm{C}\, f^\bullet$ *é acíclico, isto é, se* $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{C}\, f^\bullet = 0$ ■

5.3.5. Observação. *Seja* $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$ *uma sequência exata em* $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$. *Então no diagrama abaixo comutativo em* $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, *as setas verticais são quase isomorfismos.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & \operatorname{Cyl} f^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\beta^\bullet_{f^\bullet}"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "{[\,0\ g^\bullet\,]}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & L^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & M^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demonstração. Temos $[\,0\ g^\bullet\,]\, d^\bullet_{\mathrm{C}\, f^\bullet} = [\,0\ g^\bullet\,] \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = [\,0\ g^\bullet d^\bullet_{L^\bullet}\,] =$ $d^\bullet_{M^\bullet}[\,0\ g^\bullet\,]$, pois $g^\bullet f^\bullet = 0$. Logo, $[\,0\ g^\bullet\,]$ é um morfismo. Pelo Lema 5.2.2 e devido a $g^\bullet \beta^\bullet_{f^\bullet} = g^\bullet[\,f^\bullet\ 0\ 1\,] = [\,0\ g^\bullet\,]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, o diagrama é comutativo, com linhas exatas e $1_{K^\bullet}, \beta^\bullet_{f^\bullet}$ são quase isomorfismos. Pelo Corolário 2.25 (5-lema), $[\,0\ g^\bullet\,]$ é um quase isomorfismo ■

5.4. Categoria derivada. Dada uma categoria abeliana $\mathcal{C}$, a **categoria derivada** $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$ é a categoria de frações $\operatorname{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$, onde S é a coleção de todos os quase isomorfismos em $\operatorname{Kom}^* \mathcal{C}$. Já que o funtor $Q : \operatorname{Kom}^* \mathcal{C} \to \operatorname{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$ manda morfismos homotópicos para iguais (vide o Lema 5.4.2), $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$ coincide com a categoria de frações $\mathrm{K}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$. Essa última pode ser construída pela subseção 5.1.

5.4.1. Proposição. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. A coleção de todos os quase isomorfismos em $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ satisfaz as condições A, A', B e B'. A condição C vale para as subcategorias completas $\mathrm{K}^-\mathcal{C} \subset \mathrm{K}\,\mathcal{C}$ e $\mathrm{K}^b\mathcal{C} \subset \mathrm{K}^+\mathcal{C}$. A condição C' vale para as subcategorias completas $\mathrm{K}^+\mathcal{C} \subset \mathrm{K}\,\mathcal{C}$ e $\mathrm{K}^b\mathcal{C} \subset \mathrm{K}^-\mathcal{C}$.*

Demonstração. **A.** Seja $s^\bullet$ um quase isomorfismo no diagrama $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} M^\bullet$. Temos $\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right]$, o morfismo composto $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} \mathrm{C}\,s^\bullet$. Pela Observação 5.3.4, a $\mathrm{H}^\bullet$-sequência do triângulo distinguido $K^\bullet \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right]} \mathrm{C}\,s^\bullet \to \mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right] \xrightarrow{[1\ 0\ 0]} K[1]^\bullet$ é exata e $\mathrm{H}^\bullet\mathrm{C}\,s^\bullet = 0$. Logo, $[1\ 0\ 0]$ é um quase isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"'] & \mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right][-1] \arrow[l, "{[1\ 0\ 0]}"'] \arrow[d, "{[0\ -1\ 0]}"] \\
L^\bullet & M^\bullet \arrow[l, "s^\bullet"]
\end{tikzcd}$$

O operador de bordo do complexo $\mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right]$ tem a forma $\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0\\ 0 & d_{M[1]^\bullet} & 0\\ f[1]^\bullet & s[1]^\bullet & d_{L^\bullet}\end{bmatrix}$. Portanto, $\begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0\\ 0 & d_{M^\bullet} & 0\\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet}\end{bmatrix}$ é o operador de bordo do complexo $\mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix}0\\ f^\bullet\end{smallmatrix}\right][-1]$.

De $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M^\bullet} & 0 \\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet} \end{bmatrix} = d_{M^\bullet} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ segue que $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é um morfismo no diagrama acima à esquerda. De $\begin{bmatrix} f^\bullet & s^\bullet & 0 \end{bmatrix} = d_{L^\bullet} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{K^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d_{M^\bullet} & 0 \\ -f^\bullet & -s^\bullet & d_{L[-1]^\bullet} \end{bmatrix}$ segue que este diagrama é comutativo em $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é uma homotopia.

A′. Seja $s^\bullet$ um quase isomorfismo no diagrama $L^\bullet \xleftarrow{f^\bullet} K^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} M^\bullet$. O morfismo composto $\mathrm{C}\, s^\bullet[-1] \xrightarrow{[1\ 0]} K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet$ gera o triângulo distinguido $\mathrm{C}\, s^\bullet[-1] \xrightarrow{[f^\bullet\ 0]} L^\bullet \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{C} \begin{bmatrix} f^\bullet & 0 \end{bmatrix} \to \mathrm{C}\, s^\bullet$. Pela Observação 5.3.4, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um quase isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} L^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]"] & \mathrm{C}\begin{bmatrix} f^\bullet & 0 \end{bmatrix} \\ K^\bullet \arrow[u, "f^\bullet"] \arrow[r, "s^\bullet"] & M^\bullet \arrow[u, "\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"'] \end{tikzcd}$$

O operador de bordo do complexo $\mathrm{C}\begin{bmatrix} f^\bullet & 0 \end{bmatrix}$ tem a forma $\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_{M^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_{L^\bullet} \end{bmatrix}$. Resta observar que $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um morfismo no diagrama à direita, comutativo em $\mathrm{K}^* \mathcal{C}$ por meio da homotopia $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_{M^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_{L^\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} d_{M^\bullet} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ s[1]^\bullet \\ f[1]^\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{K[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ s[1]^\bullet & d_{M^\bullet} & 0 \\ f[1]^\bullet & 0 & d_{L^\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_{K^\bullet}.$$

B. Seja $s^\bullet$ um quase isomorfismo no diagrama $M^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{f^\bullet} K^\bullet$ tal que $s^\bullet f^\bullet = d_{M^\bullet} h^\bullet + h^\bullet d_{K^\bullet}$ para alguma homotopia $h^\bullet$. Então $\mathrm{C}\, s^\bullet[-1] \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right]} K^\bullet$ é um morfismo, pois $\left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right] d_{K^\bullet} = \left[\begin{smallmatrix} d_{L^\bullet} f^\bullet \\ d_{M^\bullet} h^\bullet - s^\bullet f^\bullet \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} d_{L^\bullet} & 0 \\ -s^\bullet & d_{M[-1]^\bullet} \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} d_{L^\bullet} & 0 \\ -s^\bullet & d_{M[-1]^\bullet} \end{smallmatrix}\right]$ é o operador de bordo do complexo $\mathrm{C}\, s^\bullet[-1]$. O morfismo composto $\mathrm{C}\, s^\bullet[-1] \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right]} K^\bullet \leftarrow \mathrm{C} \left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right] [-1]$ é homotópico a 0 pelo Lema 5.2.2. Pela Obsevação 5.3.4, $K^\bullet \leftarrow \mathrm{C} \left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right] [-1]$ é um quase isomorfismo. Resta observar que $f^\bullet$ é o morfismo composto $L^\bullet \xleftarrow{[1\ 0]} \mathrm{C}\, s^\bullet[-1] \xleftarrow{\left[\begin{smallmatrix} f^\bullet \\ -h^\bullet \end{smallmatrix}\right]} K^\bullet$.

B′. Seja $s^\bullet$ um quase isomorfismo no diagrama $M^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet$ tal que $f^\bullet s^\bullet = d_{L^\bullet} h^\bullet + h^\bullet d_{M^\bullet}$ para alguma homotopia $h^\bullet$. Então $\mathrm{C}\, s^\bullet \xrightarrow{[h^\bullet\ f^\bullet]} L^\bullet$ é um morfismo, pois $d_{L^\bullet} [\,h^\bullet\ f^\bullet\,] = [\,f^\bullet s^\bullet - h^\bullet d_{M^\bullet}\ \ f^\bullet d_{K^\bullet}\,] = [\,h^\bullet\ f^\bullet\,] \left[\begin{smallmatrix} d_{M[1]^\bullet} & 0 \\ s[1]^\bullet & d_{K^\bullet} \end{smallmatrix}\right]$.

O morfismo composto $\mathrm{C}\, s^\bullet \xrightarrow{[\, h^\bullet\ f^\bullet]} L^\bullet \to \mathrm{C}\,[\, h^\bullet\ f^\bullet]$ é homotópico a 0 pelo Lema 5.2.2. Pela Obsevação 5.3.4, $L^\bullet \to \mathrm{C}\,[\, h^\bullet\ f^\bullet]$ é um quase isomorfismo.

Resta observar que $f^\bullet$ é o morfismo composto $K^\bullet \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} \mathrm{C}\, s^\bullet \xrightarrow{[\, h^\bullet\ f^\bullet]} L^\bullet$.

C. Seja $L_0^\bullet \xleftarrow{s^\bullet} K^\bullet$ um quase isomorfismo em $\mathrm{K}\,\mathcal{C}$ (ou em $\mathrm{K}^+\,\mathcal{C}$) com $L_0^\bullet \in \mathrm{K}^-\,\mathcal{C}$ (ou $L_0^\bullet \in \mathrm{K}^b\,\mathcal{C}$). Então existe um índice i_1 tal que $L_0^i = 0$ para todo $i > i_1$. O quase isomorfismo $g^\bullet : K_0^\bullet \to K^\bullet$ é dado pelo diagrama abaixo, onde $K_0^\bullet \in \mathrm{K}^-\,\mathcal{C}$ (ou $K_0^\bullet \in \mathrm{K}^b\,\mathcal{C}$).

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & K^{i_1-2} \arrow[r] \arrow[d] & K^{i_1-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}^{i_1}\, K^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & K^{i_1-2} \arrow[r] & K^{i_1-1} \arrow[r] & K^{i_1} \arrow[r] & K^{i_1+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & L^{i_0-2} \arrow[r] \arrow[d] & L^{i_0-1} \arrow[r] \arrow[d] & L^{i_0} \arrow[r] \arrow[d] & L^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{B}^{i_0}\, L^\bullet \arrow[r] & L^{i_0} \arrow[r] & L^{i_0+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

C′. Seja $K_0^\bullet \xrightarrow{s^\bullet} L^\bullet$ um quase isomorfismo em $\mathrm{K}\,\mathcal{C}$ (ou em $\mathrm{K}^-\,\mathcal{C}$) com $K_0^\bullet \in \mathrm{K}^+\,\mathcal{C}$ (ou $K_0^\bullet \in \mathrm{K}^b\,\mathcal{C}$). Então existe um índice i_0 tal que $K_0^i = 0$ para todo $i < i_0$. O quase isomorfismo $g^\bullet : L^\bullet \to L_0^\bullet$ é dado pelo diagrama acima, onde $L_0^\bullet \in \mathrm{K}^+\,\mathcal{C}$ (ou $L_0^\bullet \in \mathrm{K}^b\,\mathcal{C}$) ∎

5.4.2. Lema. *Seja $Q : \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \to \mathcal{Q}$ um funtor que manda todos os quase isomorfismos para isomorfismos e seja $h^\bullet : f^\bullet \to g^\bullet$ uma homotopia. Então $Qf^\bullet = Qg^\bullet$.*

$$\begin{tikzcd}
 & L^\bullet \arrow[dl, bend right=20, "\alpha^\bullet_{f^\bullet}"'] & \\
\mathrm{Cyl}\, f^\bullet \arrow[ur, bend left=20, "\beta^\bullet_{f^\bullet}"] \arrow[rr, "\mathrm{Cyl}\, h^\bullet"'] & \mathrm{K}^* & \mathrm{Cyl}\, g^\bullet \arrow[ul, "\beta^\bullet_{g^\bullet}"'] \\
 & K^\bullet \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, bend left=90, "f^\bullet"] \arrow[uu, bend right=90, "g^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. No diagrama à direita, temos $\beta^\bullet_{g^\bullet} \mathrm{Cyl}\, h^\bullet \alpha^\bullet_{f^\bullet} = \begin{bmatrix} g^\bullet & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h^\bullet & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$. Portanto, pelos Lema 5.2.2 e 5.2.3, este diagrama é comutativo em $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$, com a única exceção em que $\alpha^\bullet_{f^\bullet} \beta^\bullet_{f^\bullet}$ é apenas homotópico a 1. Após aplicar o funtor Q, o diagrama fica comutativo implicando o resultado ■

5.4.3. Definição. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Denotamos por S a coleção de todos os quase isomorfismos em $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$. A categoria $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}[S^{-1}]$ é a **categoria derivada** de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$.

Do Lema 5.4.2 e da Proposição 5.4.1 segue que a categoria de frações de $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$ por quase isomorfismos é uma subcategoria completa de $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$. Pela universalidade do funtor $Q : \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \to \mathrm{D}^* \mathcal{C}$, obtemos o funtor

$\mathrm{H}^\bullet : \mathrm{D}^*\,\mathcal{C} \to \mathrm{Kom}_0^*\,\mathcal{C}$. A mesma universalidade induz o funtor [1], um automorfismo da categoria $\mathrm{D}^*\,\mathcal{C}$. Claro que $\mathrm{H}^i\,K[n]^\bullet = \mathrm{H}^{i+n}\,K^\bullet$ para todo $K^\bullet \in \mathrm{D}^*\,\mathcal{C}$.

5.5. Funtores Ext. Dizemos que $K^\bullet \in \mathrm{D}\,\mathcal{C}$ é um **H^0-objeto** se $\mathrm{H}^i\,K^\bullet = 0$ para todo $i \neq 0$. Para qualquer $C \in \mathcal{C}$, denotamos por $C[0] \in \mathrm{Kom}^b\,\mathcal{C}$ o complexo dado pela regra $C[0]^0 := C$ e $C[0]^i := 0$ para todo $i \neq 0$. Definamos o funtor $Q[0] : \mathcal{C} \to \mathrm{D}\,\mathcal{C}$ como $C \mapsto QC[0]$. Combinando este funtor com o funtor de shift (não importa em qual das categorias $\mathrm{Kom}\,\mathcal{C}$ ou $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$), obtemos o funtor $Q[n] : \mathcal{C} \to \mathrm{D}\,\mathcal{C}$ que produz o complexo concentrado na $(-n)$-ésima posição. Definimos o bifuntor $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i$ como $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) := \mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_1, QC_2[i]\big)$ para todos $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. O funtor de shift induz a identificação $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) = \mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_1[n], QC_2[n+i]\big)$. Temos o produto biaditivo

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^j(C_2, C_3) \times \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(C_1, C_2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^{i+j}(C_1, C_3),$$

chamado **produto de Yoneda**, induzido pela composição

$$\mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_2[n+i], QC_3[n+i+j]\big) \times \mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_1[n], QC_2[n+i]\big) \to$$
$$\to \mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_1[n], QC_3[n+i+j]\big).$$

Note que essa definição independe da escolha de n. Daí segue que o produto de Yoneda é associativo.

Seja $i > 0$, sejam $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e seja $K^\bullet \in \operatorname{Kom}^b \mathcal{C}$ um complexo acíclico. Suponhamos que $K^j = 0$ para todo $j > 1$ ou $j < -i$ e que $K^{-i} = C_2$ e $K^1 = C_1$. Neste caso, chamamos $K^\bullet$ de ***i*-ésima extensão** de C_2 por meio de C_1. Assim, uma i-ésima extensão de C_2 por meio de C_1 é nada mais do que uma sequência exata

$$0 \leftarrow C_1 \leftarrow K^0 \leftarrow \ldots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow C_2 \leftarrow 0$$

Definamos o complexo $\widetilde{K}^\bullet$ fazendo $\widetilde{K}^j := K^j$ para $0 \geqslant j > -i$, $\widetilde{K}^{-i} := C_2$ e $\widetilde{K}^{-j} := 0$ para outros j com um óbvio operador de bordo. Os morfismos $C_1 \leftarrow K^0$ e 1_{C_2} definem as setas $C_1[0] \xleftarrow{s^\bullet} \widetilde{K}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} C_2[i]$. É fácil ver que $s^\bullet$ é um quase isomorfismo. Logo, obtemos $y(K^\bullet) = f^\bullet s^{\bullet -1} \in \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$.

Seja $j > 0$ e seja $L^\bullet \in \operatorname{Kom}^b \mathcal{C}$ uma j-ésima extensão de C_3 por meio de C_2,

$$0 \leftarrow C_2 \leftarrow L^0 \leftarrow \ldots \leftarrow L^{-j+1} \leftarrow C_3 \leftarrow 0$$

Então é fácil ver que a sequência

$$0 \leftarrow C_1 \leftarrow K^0 \leftarrow \ldots \leftarrow K^{-i+1} \leftarrow L^0 \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}} \ldots$$

$$\ldots \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j+1}} L^{-j+1} \xleftarrow{(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}} C_3 \leftarrow 0$$

onde o morfismo $K^{-i+1} \leftarrow L^0$ é o composto $K^{-i+1} \leftarrow C_2 \leftarrow L^0$, é exata e, portanto, define uma $(i+j)$-ésima extensão de C_3 por meio de C_1, denotada por $L^\bullet \circ K^\bullet$.

5.5.1. Proposição. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e sejam $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. Então*

1. $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) = 0$ *para todo* $i < 0$;
2. *o funtor* $Q[0] : \mathcal{C} \to \mathrm{D}\,\mathcal{C}$ *é uma equivalência entre* $\mathcal{C}$ *e a subcategoria completa de todos os* H^0*-objetos em* $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$; *em particular,* $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) = \mathcal{C}(C_1, C_2)$;
3. *para todo* $i > 0$, *qualquer elemento em* $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ *tem a forma* $y(K^\bullet)$, *onde* $K^\bullet$ *é uma* i*-ésima extensão de* C_2 *por meio de* C_1;
4. *para* $i, j > 0$, *temos* $y(L^\bullet \circ K^\bullet) = y(L^\bullet)y(K^\bullet)$, *onde* $K^\bullet$ *é uma* i*-ésima extensão de* C_2 *por meio de* C_1, *isto é,* $y(K^\bullet) \in \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, *e* $L^\bullet$ *é uma* j*-ésima extensão de* C_3 *por meio de* C_2, *isto é,* $y(L^\bullet) \in \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(C_2, C_3)$.

Demonstração. **1.** Seja $i < 0$ e seja $f^\bullet s^{\bullet -1} : C_1[0] \to C_2[i]$ um morfismo em $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$, onde $s^\bullet : K^\bullet \to C_1[0]$ é um quase isomorfismo e $f^\bullet : K^\bullet \to C_2[i]$ é um morfismo. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & K^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & K^{-i-2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}^{-i-1} K^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & K^{-2} \arrow[r] & K^{-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K^{-i-2} \arrow[r] & K^{-i-1} \arrow[r] & K^{-i} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

define um quase isomorfismo $s_0^\bullet : L^\bullet \to K^\bullet$ tal que $f^\bullet s_0^\bullet = 0$.

2. Utilizando o funtor H^0, é fácil ver que a função $\mathcal{C}(C_1, C_2) \to \mathrm{D}\,\mathcal{C}\big(QC_1[0], QC_2[0]\big)$ é injetora. Para provar que ela é sobrejetora, tomemos qualquer morfismo $f^\bullet s^{\bullet -1} : C_1[0] \to C_2[0]$ em $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$, onde $s^\bullet : K^\bullet \to C_1[0]$ é um quase isomorfismo e $f^\bullet : K^\bullet \to C_2[0]$ é um morfismo. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & K^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}^0 K^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & K^{-2} \arrow[r] & K^{-1} \arrow[r] & K^0 \arrow[r] & K^1 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

define um quase isomorfismo $s_0^\bullet : L^\bullet \to K^\bullet$. Existe um único morfismo g tal que o morfismo composto $\mathrm{Z}^0 K^\bullet \xrightarrow{s^0 s_0^0} C_1 \xrightarrow{g} C_2$ coincide com $\mathrm{Z}^0 K^\bullet \xrightarrow{f^0 s_0^0} C_2$. Claramente, $f^\bullet s^{\bullet -1} \sim (f^\bullet s_0^\bullet)(s^\bullet s_0^\bullet)^{-1} \sim Qg[0]$.

Seja $K^\bullet \in \mathrm{D}\,\mathcal{C}$ um H^0-objeto. Então o diagrama acima define um quase isomorfismo $L^\bullet \to K^\bullet$ e o morfismo $\mathrm{Z}^0 K^\bullet \to \mathrm{H}^0 K^\bullet$ induz um quase

isomorfismo $L^\bullet \to \mathrm{H}^0 K^\bullet[0]$.
3. Seja $i > 0$ e seja $f^\bullet s^{\bullet -1} : C_1[0] \to C_2[i]$ um morfismo em $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$, onde $s^\bullet : K^\bullet \to C_1[0]$ é um quase isomorfismo e $f^\bullet : K^\bullet \to C_2[i]$ é um morfismo. O diagrama acima define um quase isomorfismo $s_0^\bullet : L^\bullet \to K^\bullet$. Assim podemos supor que $K^j = 0$ para todo $j > 0$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & K^{-i-1} \arrow[r] \arrow[d] & K^{-i} \arrow[r] \arrow[d] & K^{-i+1} \arrow[r] \arrow[d] & K^{-i+2} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{B}^{-i+1} K^\bullet \arrow[r] & K^{-i+1} \arrow[r] & K^{-i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

define um quase isomorfismo $s_0^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$. O morfismo $L^0 = K^0 \xrightarrow{s^0} C_1$ define um quase isomorfismo $s_1^\bullet : L^\bullet \to C_1[0]$ tal que $s_1^\bullet s_0^\bullet = s^\bullet$. De $\mathrm{H}^{-i} K^\bullet = 0$ segue que o morfismo $K^{-i} \xrightarrow{f^{-i}} C_2$ se fatora por algum morfismo $L^{-i} = \mathrm{B}^{-i+1} K^\bullet \to C_2$. Em outras palavras, existe um morfismo $f_0^\bullet : L^\bullet \to C_2[i]$ tal que $f_0^\bullet s_0^\bullet = f^\bullet$. Assim podemos supor que $K^j = 0$ para todo $j < -i$ e todo $j > 0$.

Consideramos os morfismos de complexos $M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} L^\bullet \xleftarrow{s_0^\bullet} K^\bullet$ dados pelo diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & \dots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & K^{-i} \arrow[l] \arrow[d, "\begin{bmatrix} d^{-i}_{K^\bullet} \\ -f^{-i} \end{bmatrix}"'] & K^{-i} \arrow[l] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & 0 \arrow[l] \\
0 & K^{0} \arrow[l] & \dots \arrow[l] & K^{-i+2} \arrow[l] & \begin{matrix} K^{-i+1} \\ \oplus \\ C_2 \end{matrix} \arrow[l, "\begin{bmatrix} d^{-i+1}_{K^\bullet} & 0 \end{bmatrix}"] & \begin{matrix} K^{-i} \\ \oplus \\ C_2 \end{matrix} \arrow[l, "\begin{bmatrix} d^{-i}_{K^\bullet} & 0 \\ -f^{-i} & 1 \end{bmatrix}"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & K^{0} \arrow[l] \arrow[u] & \dots \arrow[l] & K^{-i+2} \arrow[l] \arrow[u] & K^{-i+1} \arrow[l] \arrow[u, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"'] & K^{-i} \arrow[l] \arrow[u, "\begin{bmatrix} 1 \\ f^{-i} \end{bmatrix}"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Definimos o morfismo $f_1^\bullet \colon L^\bullet \to C_2[i]$ através do morfismo $L^{-i} \xrightarrow{[0\ 1]} C_2$.
Definimos o morfismo $s_1^\bullet : L^\bullet \to C_1[0]$ fazendo $s_1^0 = s^0$ caso $i > 1$ e $s_1^0 = [\, s^0\ 0\,]$ caso $i = 1$. Uma verificação direta mostra que $f_1^\bullet s_0^\bullet = f^\bullet$, que $s_1^\bullet s_0^\bullet = s^\bullet$, que $s_1^\bullet$ é um quase isomorfismo, que $M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} L^\bullet$ é mono com $M^\bullet$ acíclico, que $f_1^\bullet g^\bullet = 0$ e que $s_1^\bullet g^\bullet = 0$.
Logo, $s_0^\bullet$ é um quase isomorfismo e $f^\bullet s^{\bullet -1} \sim f_1^\bullet s_1^{\bullet -1}$. De $M^\bullet$ ser acíclico segue que $L^\bullet \xrightarrow{\operatorname{co} g^\bullet} \operatorname{Co} g^\bullet$ é um quase isomorfismo. Assim, $f_2^\bullet \operatorname{co} g^\bullet = f_1^\bullet$ e $s_2^\bullet \operatorname{co} g^\bullet = s_1^\bullet$ para morfismos apropriados $\operatorname{Co} g^\bullet \xrightarrow{f_2^\bullet} C_2[i]$ e $\operatorname{Co} g^\bullet \xrightarrow{s_2^\bullet} C_1[0]$. Portanto, $s_2^\bullet$ é um quase isomorfismo e $f_1^\bullet s_1^{\bullet -1} \sim f_2^\bullet s_2^{\bullet -1}$.

Concluímos que $f^\bullet s^{\bullet -1} \sim y\big(0 \leftarrow C_1 \xleftarrow{s_2^0} \mathrm{Co}\, g^\bullet\big)$, pois f_2^{-i} é um isomorfismo, o qual podemos considerar igual a 1_{C_2}.

4. Os diagramas $C_1[0] \xleftarrow{s_1^\bullet} \widetilde{K}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} C_2[i]$, $C_1[0] \xleftarrow{s_2^\bullet} \widetilde{L^\bullet \circ K^\bullet} \xrightarrow{f_2^\bullet} C_3[i+j]$, $C_2[i] \xleftarrow{s^\bullet} \widetilde{L}[i]^\bullet \xrightarrow{f_1^\bullet} C_3[i+j]$ que correspondem a $y(K^\bullet)$, $y(L^\bullet \circ K^\bullet)$, $y(L^\bullet)[i]$ podem ser exibidos pelos diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 & K^0 \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] & K^{-i+1} \arrow[l] & K^{-i} \arrow[l] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[l] \\
 & C_1 & & & C_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & K^0 \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] & K^{-i+1} \arrow[l] & L^0 \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l, "(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}"'] & L^{-j} \arrow[l, "(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}"'] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[l] \\
 & C_1 & & K^{-i} \arrow[u] \arrow[r, equal] & C_2 & & C_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & L^0 \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l, "(-1)^i d_{L^\bullet}^{-1}"'] & L^{-j} \arrow[l, "(-1)^i d_{L^\bullet}^{-j}"'] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[l] \\
 & C_2 & & C_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] & \widetilde{L^\bullet \circ K^\bullet} \arrow[l, "s'^\bullet"'] \arrow[d, "f'^\bullet"] \\
C_2[i] & \widetilde{L}[i]^\bullet \arrow[l, "s^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

É fácil visualizar os morfismos $s'^\bullet$ e $f'^\bullet$ no diagrama comutativo à esquerda e ver que $s_1^\bullet s'^\bullet = s_2^\bullet$ e $f_1^\bullet f'^\bullet = f_2^\bullet$. Daí concluímos que $s'^\bullet$ é um quase isomorfismo ■

5.6. Categorias pré-trianguladas.

5.6.1. Definição. Seja $\mathcal{D}$ uma **Ab**-categoria com objeto 0 munida de um automorfismo aditivo $[1] : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ e seja dada uma família de triângulos em $\mathcal{D}$, chamados **distinguidos**, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Todo triângulo isomorfo a um distinguido é distinguido.

2. Para todo $K \in \mathcal{D}$, o triângulo $K \xrightarrow{1_K} K \to 0 \to K[1]$ é distinguido.

3. Todo morfismo $K \xrightarrow{f} L$ em $\mathcal{D}$ está incluído em um triângulo distinguido $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$.

4. O triângulo $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ é distinguido se e só se o triângulo $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1] \xrightarrow{-f[1]} L[1]$ é distinguido.

5. Sejam $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ e $K_1 \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \xrightarrow{h_1} K_1[1]$ triângulos distinguidos e sejam k, l dois morfismos tais que o primeiro quadrado no diagrama à direita é comutativo. Então existe um morfismo m que faz todo diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] & K[1] \arrow[d, "k[1]"] \\ K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \arrow[r, "g_1"] & M_1 \arrow[r, "h_1"] & K_1[1] \end{tikzcd}$$

Neste caso, a categoria $\mathcal{D}$ se chama **pré-triangulada**.

5.6.2. Proposição. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$ é uma categoria pré-triangulada.*

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "1_{K^\bullet}"] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K[1]^\bullet \arrow[d, "1_{K[1]^\bullet}"] \\
K^\bullet \arrow[r, "1_{K^\bullet}"] & K^\bullet \arrow[r] & \mathrm{C}\,1_{K^\bullet} \arrow[r] & K[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

Demonstração. **1** e **3.** Por definição.
2. Pelo diagrama à direita, basta mostrar que $1_{\mathrm{C}\,1_{K^\bullet}} \sim 0$. O operador de bordo de $\mathrm{C}\,1_{K^\bullet}$ tem a forma $\begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & d^\bullet_{K^\bullet} \end{bmatrix}$. Para a homotopia $h^\bullet = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, temos $\begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & d^\bullet_{K^\bullet} \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & d^\bullet_{K^\bullet} \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

4. No diagrama abaixo as setas $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são morfismos, pois $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} d^\bullet_{L[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} = d^\bullet_{K[1]^\bullet} \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\begin{bmatrix} d^\bullet_{L[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} d^\bullet_{K[1]^\bullet}$, onde $\begin{bmatrix} d^\bullet_{L[1]^\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0 \\ 1 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet} \end{bmatrix}$ é o operador de bordo de $\mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Claramente, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} -f[1]^\bullet \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. O diagrama é comutativo, com a única

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & L^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "1_{L^\bullet}"'] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "1_{\mathrm{C}\, f^\bullet}"'] & K[1]^\bullet \arrow[r, "-f[1]^\bullet"] \arrow[d, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}-f[1]^\bullet\\1\\0\end{smallmatrix}\right]"] & L[1]^\bullet \arrow[d, "1_{L[1]^\bullet}"] \\
 & L^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"'] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right]"'] & \mathrm{C}\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]^\bullet \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[u, shift left, "\left[\begin{smallmatrix}0 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right]"] & L[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

exceção em que o morfismo $\begin{bmatrix}-f[1]^\bullet\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ é homotópico a 1 através de $h^\bullet := \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Realmente,

$$\begin{bmatrix}d^\bullet_{L[1]^\bullet} & 0 & 0\\0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0\\1 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d^\bullet_{L[1]^\bullet} & 0 & 0\\0 & d^\bullet_{K[1]^\bullet} & 0\\1 & f[1]^\bullet & d^\bullet_{L^\bullet}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-f[1]^\bullet\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Assim demonstramos que o triângulo $L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$ é distinguido se o triângulo $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$ é distinguido.

Suponhamos que o triângulo $L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet$ é distinguido.

Pelo fato que acabamos de mostrar, aplicado duas vezes, o triângulo $K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]^\bullet} L[1]^\bullet \xrightarrow{-g[1]^\bullet} M[1]^\bullet \xrightarrow{-h[1]^\bullet} K[2]^\bullet$ é distinguido, ou seja, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K[1]^\bullet \arrow[r, "-f[1]^\bullet"] \arrow[d, "k[1]^\bullet"] & L[1]^\bullet \arrow[r, "-g[1]^\bullet"] \arrow[d, "l[1]^\bullet"] & M[1]^\bullet \arrow[r, "-h[1]^\bullet"] \arrow[d, "m[1]^\bullet"] & K[2]^\bullet \arrow[d, "k[2]^\bullet"] \\
K_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[r] & \mathrm{C}\, f_1^\bullet \arrow[r] & K_1[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

comutativo, onde as setas verticais são isomorfismos. Logo, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "k^\bullet"] & L^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "l^\bullet"] & M^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "-m^\bullet"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "k[1]^\bullet"] \\
K_1[-1]^\bullet \arrow[r, "-f_1[-1]^\bullet"] & L_1[-1]^\bullet \arrow[r] & (\mathrm{C}\, f_1^\bullet)[-1] \arrow[r] & K_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

é comutativo e as setas verticais são isomorfismos. Resta observar que $\mathrm{C}\,\big(-f_1[-1]^\bullet\big) = (\mathrm{C}\, f_1^\bullet)[-1]$.

$$
\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "k^\bullet"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "l^\bullet"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r] & K[1]^\bullet \arrow[d, "k[1]^\bullet"] \\
K_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[r] & \mathrm{C}\, f_1^\bullet \arrow[r] & K_1[1]^\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "l^\bullet"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & K[1]^\bullet \arrow[d, "1_{K[1]^\bullet}"] \\
K^\bullet \arrow[r, "l^\bullet f^\bullet"] \arrow[d, "1_{K^\bullet}"] & L_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{L_1^\bullet}"] & \mathrm{C}(l^\bullet f^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{C}\, h^\bullet"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "1_{K[1]^\bullet}"] \\
K^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet k^\bullet"] \arrow[d, "k^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{L_1^\bullet}"] & \mathrm{C}(f_1^\bullet k^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & K[1]^\bullet \arrow[d, "k[1]^\bullet"] \\
K_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[r] & \mathrm{C}\, f_1^\bullet \arrow[r] & K_1[1]^\bullet
\end{tikzcd}
$$

5. Basta considerar o diagrama à esquerda com o primeiro quadrado comutativo em $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$. Os Lemas 5.2.2 e 5.2.3 implicam que o diagrama à direita é comutativo em $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$ com a única exceção em que um quadrado é comutativo somente em $\mathrm{K}^*\mathcal{C}$, pois temos uma homotopia $h^\bullet : l^\bullet f^\bullet \to f_1^\bullet k^\bullet$ ■

Seja $\mathcal{K}$ uma categoria pré-triangulada e seja S uma coleção de morfismos, fechada relativamente à composição, que satisfaz as condições A e B (ou A′ e B′). Dizemos que S é **compatível** com a triangulação se são válidas as condições seguintes:

D. $S[1] = S$.
E. Suponhamos que, no diagrama do axioma 5 na Definição 5.6.1, as linhas são triângulos distinguidos e os morfismos $k, l \in S$ fazem o primeiro quadrado comutativo. Então existe $m \in S$ que faz todo o diagrama comutativo.

Pelas condição D e universalidade do funtor $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}[S^{-1}]$, obtemos o automorfismo induzido $[1] : \mathcal{K}[S^{-1}] \to \mathcal{K}[S^{-1}]$. É claro que $(fs^{-1})[1] = f[1]\big(s[1]\big)^{-1}$ para $s \in S$. Escrevendo morfismos em $\mathcal{K}[S^{-1}]$ com um denominador comum, podemos ver que $[1]$ é aditivo em $\mathcal{K}[S^{-1}]$.
Um triângulo Δ' em $\mathcal{K}[S^{-1}]$ é **distinguido** se ele é isomorfo a $Q\Delta$, onde Δ é um triângulo distinguido em $\mathcal{K}$.
Pela Proposição 5.6.2, pela Observação 5.3.4 e pelo Corolário 2.25 (5-lema), as condições D e E são válidas para $\mathcal{K} := \mathrm{K}^*\mathcal{C}$ e para a coleção S de todos os quase isomorfismos, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana.

5.6.3. Lema. *Seja $\mathcal{K}$ uma categoria pré-triangulada e seja S uma coleção de morfismos compatível com a triangulação. Então $\mathcal{K}[S^{-1}]$ é uma categoria pré-triangulada.*

Demonstração. **1**, **2** e **4.** Por definição.

3. Sejam $s : K \to K_1$ e $f : K \to K_2$ morfismos em $\mathcal{K}$ e $s \in S$, isto é, $fs^{-1} : K_1 \to K_2$ é um morfismo em $\mathcal{K}[S^{-1}]$. Existe um triângulo $K \xrightarrow{f} K_2 \to L \xrightarrow{g} K[1]$ distinguido em $\mathcal{K}$. No diagrama à direita, temos o isomorfismo de triângulos em $\mathcal{K}[S^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & K_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_{K_2}"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_L"] & K[1] \arrow[d, "s[1]"] \\ K_1 \arrow[r, "fs^{-1}"] & K_2 \arrow[r] & L \arrow[r, "s[1]g"] & K_1[1] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & L \\ K' \arrow[u, "s_0"] \arrow[d, "k"] & L' \arrow[u, "s"] \arrow[d, "l"] \\ K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \end{tikzcd}$$

5. Basta considerar os triângulos $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ e $K_1 \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \xrightarrow{h_1} K_1[1]$ distinguidos em $\mathcal{K}$. Seja dado um quadrado comutativo em $\mathcal{K}[S^{-1}]$ exibido no diagrama à esquerda, onde $s, s_0 \in S$. Pela condição A, podemos encontrar $s' \in S$ e f' tais que $(fs_0)s' = sf'$. Denotando por s_0 a seta $s_0 s'$ e por k a seta ks', obtemos o diagrama à direita com o quadrado em cima comutativo em $\mathcal{K}$ e o quadrado abaixo comutativo em $\mathcal{K}[S^{-1}]$. Neste diagrama as setas verticais continuam a exibir os mesmos morfismos em $\mathcal{K}[S^{-1}]$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & L \\ K' \arrow[u, "s_0"] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "k"] & L' \arrow[u, "s"] \arrow[d, "l"] \\ K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \end{tikzcd}$$

A comutatividade em $\mathcal{K}[S^{-1}]$ do quadrado abaixo significa que $f_1 ks'' = lf's''$ para algum $s'' \in S$ apropriado. Denotando por s_0 a seta $s_0 s''$, por f' a seta $f's''$ e por k a seta ks'', chegamos ao diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "h"] & K[1] \\
K' \arrow[u, "s_0"'] \arrow[d, "k"] \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "l"] \arrow[r, "g'"] & M' \arrow[r, "h'"] & K'[1] \arrow[u, "s_0[1]"] \arrow[d, "k[1]"'] \\
K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \arrow[r, "g_1"] & M_1 \arrow[r, "h_1"] & K_1[1]
\end{tikzcd}$$

comutativo em $\mathcal{K}$ com as setas verticais continuando a exibir os mesmos morfismos em $\mathcal{K}[S^{-1}]$. Incluímos o morfismo f' em um triângulo distinguido $K' \xrightarrow{f'} L' \xrightarrow{g'} M' \xrightarrow{h'} K'[1]$. Pela condição E e pelo axioma 5 na Definição 5.6.1, podemos encontrar $S \ni s_1 : M' \to M$ e $m : M' \to M_1$ que fazem o diagrama à esquerda comutativo. Assim obtemos o morfismo desejado ms_1^{-1} em $\mathcal{K}[S^{-1}]$ ■

5.6.4. Teorema. *Seja $\mathcal{D}$ uma categoria pré-triangulada, seja $C \in \mathcal{D}$ e seja $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} K[1]$ um triângulo distinguido. Então as sequências*

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{D}(C, h[i-1])} \mathcal{D}(C, K[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, f[i])} \mathcal{D}(C, L[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, g[i])}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{D}(C, g[i])} \mathcal{D}(C, M[i]) \xrightarrow{\mathcal{D}(C, h[i])} \mathcal{D}(C, K[i+1]) \dots$$

$$\dots \mathcal{D}(K[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(f[i], C)} \mathcal{D}(L[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(g[i], C)}$$

$$\xleftarrow{\mathcal{D}(g[i], C)} \mathcal{D}(M[i], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(h[i], C)} \mathcal{D}(K[i+1], C) \xleftarrow{\mathcal{D}(f[i+1], C)} \dots$$

são exatas.

Demonstração. Consideramos apenas a primeira sequência. (A segunda pode ser tratada analogamente.) Pelo axioma 4 da Definição 5.6.1, é suficiente mostrar a exatidão em $\mathcal{D}(C, L)$. Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, temos o diagrama comutativo à direita. Portanto, $gf = 0$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "1_K"] \arrow[d, "1_K"] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d, "1_{K[1]}"'] \\ K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "h"] & K[1] \end{tikzcd}$$

Seja dado um morfismo $\varphi : C \to L$ tal que $g\varphi = 0$. O triângulo $C \to 0 \to C[1] \xrightarrow{-1_{C[1]}} C[1]$ é distinguido pelos axiomas 2 e 4 da Definição 5.6.1. Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, encontramos um morfismo $\psi : C \to K$ tal que o diagrama à esquerda é comutativo. Logo, $f\psi = \varphi$ ■

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C[1] \arrow[r, "-1_{C[1]}"] \arrow[d, "\psi[1]"'] & C[1] \arrow[d, "\varphi[1]"'] \\ L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "h"] & K[1] \arrow[r, "-f[1]"] & L[1] \end{tikzcd}$$

5.6.5. Corolário. *Suponhamos que as linhas no diagrama comutativo à direita são triângulos distinguidos. Então m é um isomorfismo se k e l são isomorfismos. Em particular, o triângulo distinguido que inclui um morfismo dado, como no axioma 3 da*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"] & K[1] \arrow[d, "k[1]"'] \\ K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \arrow[r, "g_1"] & M_1 \arrow[r, "h_1"] & K_1[1] \end{tikzcd}$$

Definição 5.6.1, é único a menos de isomorfismo.

Demonstração. Pelos Teorema 5.6.4 e Corolário 2.25 (5-lema), $\mathcal{D}(A, m) : \mathcal{D}(A, M) \to \mathcal{D}(A, M_1)$ e $\mathcal{D}(m, B) : \mathcal{D}(M_1, B) \to \mathcal{D}(M, B)$ são isomorfismos para quaisquer $A, B \in \mathcal{D}$. Fazendo $A := M_1$ e $B := M$, encontramos morfismos $\varphi : M_1 \to M$ e $\psi : M_1 \to M$ tais que $\mathcal{D}(M_1, m)\varphi = 1_{M_1}$ e $\mathcal{D}(m, M)\psi = 1_M$. Em outras palavras, $m\varphi = 1_{M_1}$ e $\psi m = 1_M$ ■

5.6.6. Corolário. *Suponhamos que as linhas no diagrama à direita são triângulos distinguidos. Para existir um morfismo entre triângulos que estende este diagrama é necessário e suficiente que $g_1 lf = 0$. Caso $\mathcal{D}\big(K, M_1[-1]\big) = 0$, tal morfismo é único.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[r, "h"] & K[1] \\
K_1 \arrow[r, "f_1"] & L_1 \arrow[r, "g_1"] & M_1 \arrow[r, "h_1"] & K_1[1]
\end{tikzcd}$$

Demonstração. A necessidade segue da igualdade $gf = 0$ mostrada na demonstração do Teorema 5.6.4.

Suponhamos que $g_1 lf = 0$. Pelo Teorema 5.6.4, as sequências

$$\mathcal{D}\big(K, M_1[-1]\big) \to \mathcal{D}\big(K, K_1\big) \xrightarrow{\mathcal{D}(K, f_1)} \mathcal{D}\big(K, L_1\big) \xrightarrow{\mathcal{D}(K, g_1)} \mathcal{D}\big(K, M_1\big)$$

$$\mathcal{D}\big(L, M_1\big) \xleftarrow{\mathcal{D}(g, M_1)} \mathcal{D}\big(M, M_1\big) \leftarrow \mathcal{D}\big(K[1], M_1\big)$$

são exatas. Utilizando a primeira, vemos que $\mathcal{D}(K, g_1)lf = 0$ implica a existência de um $k : K \to K_1$ tal que $\mathcal{D}(K, f_1)k = lf$, isto é, $f_1 k = lf$. Tal k é único caso $\mathcal{D}\big(K, M_1[-1]\big) = 0$. Pelo axioma 5 da Definição 5.6.1, podemos achar um morfismo $m : M \to M_1$ que juntamente com k e l providencia um morfismo entre os triângulos. Analogamente, utilizando a segunda sequência e $\mathcal{D}(g, M_1)m = g_1 l$, concluímos que m é único caso $\mathcal{D}\big(K[1], M_1\big) = 0$ (equivalente a $\mathcal{D}\big(K, M_1[-1]\big) = 0$) ■

Pelas Observações 5.3.5 e 5.3.4, qualquer sequência exata $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$ em $\mathrm{Kom}^* \mathcal{C}$ se completa a um triângulo distinguido em $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$ e todo triângulo distinguido em $\mathrm{D}^* \mathcal{C}$ é isomorfo a um destes.

5.6.7. Corolário. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, seja $E :\ 0 \to C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3 \to 0$ uma sequência exata em $\mathcal{C}$ e seja $C \in \mathcal{C}$. Então temos as sequências longas exatas*

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{i-1}_{C,E}} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, C_1) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C,f)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, C_2) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C,g)}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C,g)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C, C_3) \xrightarrow{\delta^{i}_{C,E}} \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{C}}(C, C_1) \to \ldots$$

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{C}}(C_3, C) \xleftarrow{\delta^{i}_{E,C}} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}\,(C_1, C) \xleftarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(f,C)}$$

$$\xleftarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(f,C)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_2, C) \xleftarrow{\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(g,C)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(C_3, C) \xleftarrow{\delta^{i-1}_{E,C}} \ldots$$

onde os homomorfismos $\delta^i_{C,E}$ e $\delta^i_{E,C}$ são naturais em E e C.

Demonstração. Pela Observação 5.3.5, qualquer sequência $E:\ 0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$, exata em $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, gera em $\mathrm{D}^*\mathcal{C}$ o triângulo distinguido $K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} K[1]^\bullet$, onde o morfismo $h := [\,1\ 0\,][\,0\ g^\bullet]^{-1}$ em $\mathrm{D}^*\mathcal{C}$ é dado por $M^\bullet \xleftarrow{[0\ g^\bullet]} \mathrm{C}\,f^\bullet \xrightarrow{[1\ 0]} K[1]^\bullet$ (pela Observação 5.3.5, $[\,0\ g^\bullet]$ é um quase isomorfismo). Este triângulo é funtorial em E, pois um morfismo $E \to E_1$ como no diagrama abaixo à esquerda, comutativo em $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, gera o diagrama abaixo à direta, comutativo em $\mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$. Pelo Teorema 5.6.4, para qualquer complexo $C^\bullet \in \mathrm{Kom}^*\mathcal{C}$, obtemos duas sequências longas exatas (na segunda usamos o índice $-i$ no lugar de i). Resta pôr $C^\bullet := C[0]$, $K^\bullet := C_1[0]$, $L^\bullet := C_2[0]$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "k^\bullet"'] & L^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "l^\bullet"'] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "m^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & L_1^\bullet \arrow[r, "g_1^\bullet"] & M_1^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^\bullet \arrow[d, "m^\bullet"] & \mathrm{C}\, f^\bullet \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & g^\bullet \end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix} k[1]^\bullet & 0 \\ 0 & l^\bullet \end{smallmatrix}\right]}"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "{k[1]^\bullet}"] \\
M_1^\bullet & \mathrm{C}\, f_1^\bullet \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & g_1^\bullet \end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] & K_1[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

$M^\bullet := C_3[0]$ e denotar $\delta^i_{C,E} := \mathrm{D}^*\mathcal{C}\big(C^\bullet, h[i]\big)$,
$\delta^i_{E,C} := \mathrm{D}^*\mathcal{C}\big(h[-i-1], C^\bullet\big)$ ■

Exercícios