Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan′in

ICMC, USP, São Carlos

17/08/2015 – 02/09/2015

Procurando sentido, achei somente uma forma.

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste,* 2015

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste,* 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste,* 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.

b. Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\operatorname{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \to c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.

b. Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\operatorname{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \to c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.

c. A **composição** (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$.

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.

b. Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\mathrm{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \to c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.

c. A **composição** (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$. (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo $\beta\alpha$.)

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.

b. Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\operatorname{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \to c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.

c. A **composição** (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$. (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo $\beta\alpha$.)

d. As setas 1_c para todo $c \in \mathcal{C}$.

Procurando sentido, achei somente uma forma.
— *Um porco triste*, 2015

1. Categorias, funtores e transformações naturais

1.1. Definição. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de:

a. Um conjunto de **objetos** $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra $\mathcal{C}$.
b. Um conjunto de **morfismos** (ou **setas**) $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Cada seta tem **origem** e **fim** que são objetos. O símbolo $\operatorname{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha : c \to c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.
c. A **composição** (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$. (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo $\beta\alpha$.)
d. As setas 1_c para todo $c \in \mathcal{C}$.

e satisfaz os seguintes axiomas:

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

1.2. Exemplos.

1. Set, a **categoria dos conjuntos** (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor), e funções entre si.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

1.2. Exemplos.

1. Set, a **categoria dos conjuntos** (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor), e funções entre si.
2. A **categoria de relações Rel**, que tem os mesmos objetos de **Set**. Por definição, $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ significa $R \subset A \times B$, isto é, R é uma relação. Para $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, a **composição** $S \circ R$ é definida pela regra $S \circ R := \big\{(a, c) \mid \exists\ b \in B\ (a, b) \in R,\ (b, c) \in S\big\}$. Assim, **Rel** é **Set** com mais setas.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

1.2. Exemplos.

1. Set, a **categoria dos conjuntos** (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor), e funções entre si.
2. A **categoria de relações Rel**, que tem os mesmos objetos de **Set**. Por definição, $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ significa $R \subset A \times B$, isto é, R é uma relação. Para $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, a **composição** $S \circ R$ é definida pela regra $S \circ R := \big\{(a, c) \mid \exists\ b \in B\ (a, b) \in R,\ (b, c) \in S\big\}$. Assim, **Rel** é **Set** com mais setas.
3. A categoria dos **espaços topológicos Esp**, com funções contínuas.

C1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
C2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

1.2. Exemplos.

1. Set, a **categoria dos conjuntos** (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Set** contém somente conjuntos de cardinalidade menor), e funções entre si.
2. A **categoria de relações Rel**, que tem os mesmos objetos de **Set**. Por definição, $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ significa $R \subset A \times B$, isto é, R é uma relação. Para $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, a **composição** $S \circ R$ é definida pela regra $S \circ R := \big\{(a, c) \mid \exists\ b \in B\ (a, b) \in R,\ (b, c) \in S\big\}$. Assim, **Rel** é **Set** com mais setas.
3. A categoria dos **espaços topológicos Esp**, com funções contínuas.
4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Obtemos a categoria $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ "anti-isomorfa" a $\mathcal{C}$, ou **dual** a $\mathcal{C}$, pela troca dos sentidos de setas (ou, melhor dizendo, pela troca da ordem da composição).

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X, podemos definir a categoria $\operatorname{Top} X := \mathcal{T}(X)^{\mathrm{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \operatorname{Top} X$, a relação $U \to V$ significa simplesmente $U \supset V$.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X, podemos definir a categoria $\mathrm{Top}\, X := \mathcal{T}(X)^{\mathrm{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \mathrm{Top}\, X$, a relação $U \to V$ significa simplesmente $U \supset V$.
Denotemos por $\mathbf{1}$ a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por $\mathbf{2}$ a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X, podemos definir a categoria $\operatorname{Top} X := \mathcal{T}(X)^{\mathrm{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \operatorname{Top} X$, a relação $U \to V$ significa simplesmente $U \supset V$. Denotemos por $\mathbf{1}$ a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por $\mathbf{2}$ a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.

6. A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X, podemos definir a categoria $\mathrm{Top}\,X := \mathcal{T}(X)^{\mathrm{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \mathrm{Top}\,X$, a relação $U \to V$ significa simplesmente $U \supset V$.
Denotemos por $\mathbf{1}$ a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por $\mathbf{2}$ a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.
6. A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**. Uma variante mais geral: os **objetos** têm a forma (E, S), onde $E \in \mathbf{Esp}$ e $S \subset E$ é um subespaço; os **morfismos** $(E, S) \to (E', S')$ são as classes homotópicas de funções contínuas $E \xrightarrow{a} E'$ que preservam os subespaços, $aS \subset S'$, considerando apenas as homotopias que não alteram a restrição da função para o subespaço.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \to b \iff a \leqslant b$. É claro que pode existir no máximo uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X, podemos definir a categoria $\mathrm{Top}\, X := \mathcal{T}(X)^{\mathrm{op}}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \mathrm{Top}\, X$, a relação $U \to V$ significa simplesmente $U \supset V$.
Denotemos por $\mathbf{1}$ a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por $\mathbf{2}$ a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.
6. A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**. Uma variante mais geral: os **objetos** têm a forma (E, S), onde $E \in \mathbf{Esp}$ e $S \subset E$ é um subespaço; os **morfismos** $(E, S) \to (E', S')$ são as classes homotópicas de funções contínuas $E \xrightarrow{a} E'$ que preservam os subespaços, $aS \subset S'$, considerando apenas as homotopias que não alteram a restrição da função para o subespaço.
7. Seja X um espaço topológico. Denotemos por $\pi_1 X$ a **categoria fundamental** de X. Objetos de $\pi_1 X$ são pontos de X. As setas são as classes homotópicas de caminhos entre pontos (com extremos fixos).

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos),

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos),

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), $\mathbf{Lin}_k$ (de espaços lineares sobre um corpo k),

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), $\mathbf{Lin}_k$ (de espaços lineares sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos),

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), $\mathbf{Lin}_k$ (de espaços lineares sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos), $\mathbf{Mod}_R$ (de módulos à direita sobre um anel associativo R com unidade), etc.

8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), $\mathbf{Lin}_k$ (de espaços lineares sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos), $\mathbf{Mod}_R$ (de módulos à direita sobre um anel associativo R com unidade), etc.

10. Seja A um anel. Consideremos a categoria $\mathrm{Matr}\, A$ das matrizes sobre A. Os **objetos** de $\mathrm{Matr}\, A$ são os números naturais, $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Matr}\, A = \mathbb{N}$. Um **morfismo** $M : m \to n$ é simplesmente uma $m \times n$-**matriz** com coeficientes em A (por convenção, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem uma única $0 \times n$-matriz e uma única $n \times 0$-matriz, ambas nulas).

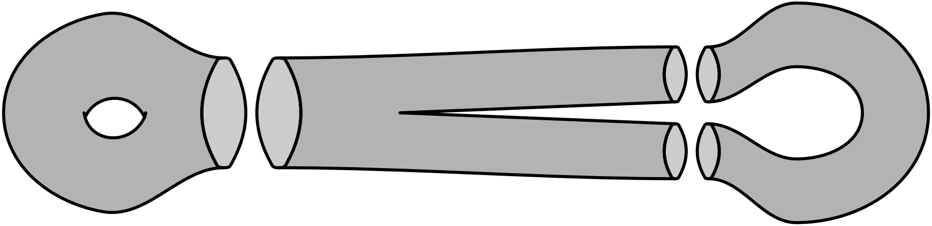
$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & c_1' \arrow[d, "\alpha'"] \\ c_2 \arrow[r, "f_2"] & c_2' \end{tikzcd}$$

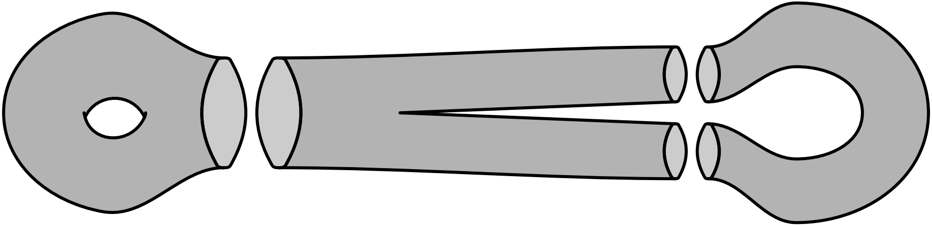
8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotemos por $\mathcal{C}^2$ a categoria das setas de $\mathcal{C}$. Os **objetos** de $\mathcal{C}^2$ são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em $\mathcal{C}$. Um **morfismo** entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c_1' \xrightarrow{\alpha'} c_2'$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c_1'$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c_2'$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), $\mathbf{Lin}_k$ (de espaços lineares sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos), $\mathbf{Mod}_R$ (de módulos à direita sobre um anel associativo R com unidade), etc.

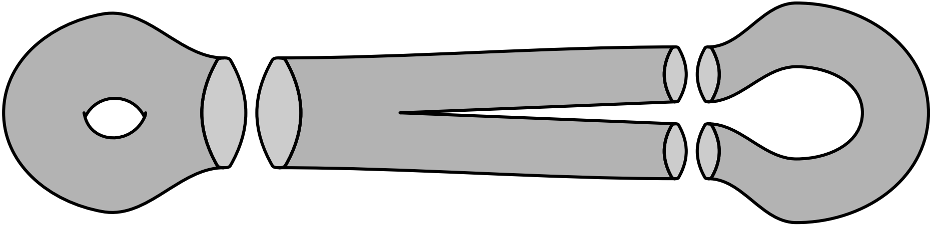
10. Seja A um anel. Consideremos a categoria $\mathrm{Matr}\, A$ das matrizes sobre A. Os **objetos** de $\mathrm{Matr}\, A$ são os números naturais, $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Matr}\, A = \mathbb{N}$. Um **morfismo** $M : m \to n$ é simplesmente uma $m \times n$-**matriz** com coeficientes em A (por convenção, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem uma única $0 \times n$-matriz e uma única $n \times 0$-matriz, ambas nulas).

11. Uma outra categoria $\mathcal{C}$ com $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathbb{N}$: **categoria das calças**. Os morfismos são as (classes de homeomorfismo de) superfícies cujas componentes do bordo são divididas nas duas partes: **início** e **fim**. No desenho abaixo, podemos encontrar 3 morfismos: $0 \to 1$, $1 \to 2$ e $2 \to 0$.

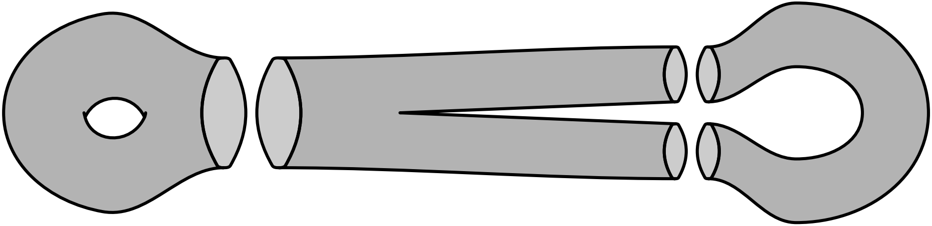




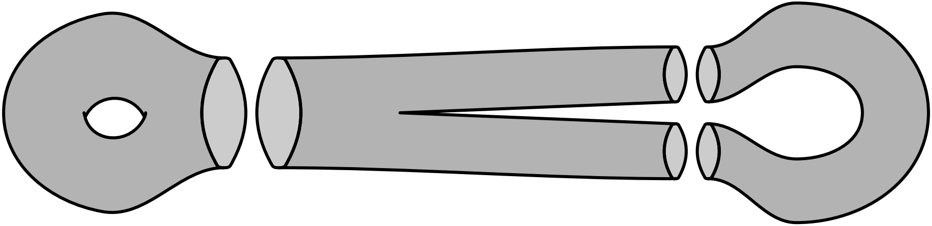
1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \to c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \to c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$.



1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \to c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \to c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados **isomorfos**.

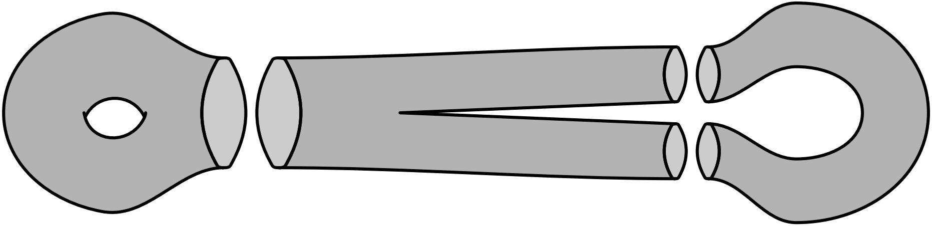


1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \to c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \to c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados **isomorfos**. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita **grupoide**.



1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \to c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \to c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados **isomorfos**. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita **grupoide**.

Um grupoide de um só objeto é simplesmente um grupo. De fato, todo grupoide conexo (isto é, entre quaisquer dois objetos existe um caminho de setas) é feito de um **grupo** de **automorfismos** $\operatorname{Aut} c$, o grupo de todos os isomorfismos entre c e c, e de uma (não única) árvore de setas.



1.3. Definição. Um morfismo $\alpha : c \to c'$ é dito **isomorfismo** se possui um **inverso** $\beta : c' \to c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados **isomorfos**. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita **grupoide**.

Um grupoide de um só objeto é simplesmente um grupo. De fato, todo grupoide conexo (isto é, entre quaisquer dois objetos existe um caminho de setas) é feito de um **grupo** de **automorfismos** $\mathrm{Aut}\, c$, o grupo de todos os isomorfismos entre c e c, e de uma (não única) árvore de setas. A categoria $\pi_1 X$ no Exemplo 1.2.7 é um grupoide. Caso X seja linearmente conexo, a categoria $\pi_1 X$ é conexa. Para $p \in X$, o grupo $\mathrm{Aut}\, p$ é o **grupo fundamental** $\pi_1(X, p)$.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).
F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a **categoria de categorias**, e o conceito de categorias isomorfas.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).
F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a **categoria de categorias**, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos . . .

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).
F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a **categoria de categorias**, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos ...

1.5. Definição. Os **melhores funtores** do mundo são os seguintes.

1.4. Definição. Um homomorfismo entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ é chamado **funtor** (**covariante**) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$:

F1. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ define uma função entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

F2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma função $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor **contravariante** $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um anti-homomorfismo entre categorias.

Assim obtemos **Cat**, a **categoria de categorias**, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos ...

1.5. Definição. Os **melhores funtores** do mundo são os seguintes. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$. Então temos as funções

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}, \qquad c' \mapsto \mathcal{C}(c, c'),$$

para objetos e

$$\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \textbf{Set}\,\big(\mathcal{C}(c, c_1), \mathcal{C}(c, c_2)\big),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto \big((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta \circ \alpha)\big),$$

para morfismos.

$$\mathcal{C}(c,-):\mathcal{C}(c_1,c_2)\to\mathbf{Set}\big(\mathcal{C}(c,c_1),\mathcal{C}(c,c_2)\big),$$

$$(c_1\xrightarrow{\beta}c_2)\mapsto\big((c\xrightarrow{\alpha}c_1)\mapsto(\beta\circ\alpha)\big),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um funtor $\mathcal{C}(c,-):\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ covariante.

$$\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathbf{Set}\big(\mathcal{C}(c, c_1), \mathcal{C}(c, c_2)\big),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto \big((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta \circ \alpha)\big),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um funtor $\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ covariante. As regras

$$\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}, \qquad c' \mapsto \mathcal{C}(c', c),$$

$$\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathbf{Set}\big(\mathcal{C}(c_2, c), \mathcal{C}(c_1, c)\big),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2) \mapsto \big((c_2 \xrightarrow{\beta} c) \mapsto (\beta \circ \alpha)\big)$$

definem um funtor contravariante $\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

$$\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C}(c_1,c_2) \to \textbf{Set}\,\big(\mathcal{C}(c,c_1),\mathcal{C}(c,c_2)\big),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto \big((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta\circ\alpha)\big),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um funtor $\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C} \to \textbf{Set}$ covariante. As regras

$$\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C} \to \textbf{Set}, \qquad c' \mapsto \mathcal{C}(c',c),$$

$$\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C}(c_1,c_2) \to \textbf{Set}\,\big(\mathcal{C}(c_2,c),\mathcal{C}(c_1,c)\big),$$

$$(c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2) \mapsto \big((c_2 \xrightarrow{\beta} c) \mapsto (\beta\circ\alpha)\big)$$

definem um funtor contravariante $\mathcal{C}(-,c) : \mathcal{C} \to \textbf{Set}$.

1.6. Definição. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dois funtores. Uma coleção $t_\bullet$ de morfismos $t_c : Fc \to Gc$, com c percorrendo $\mathcal{C}$, é dita **transformação natural** de F para G, e denotada por $t_\bullet : F \to G$, se, para todo morfismo $a \xrightarrow{\alpha} b$ em $\mathcal{C}$, o diagrama à direita é comutativo.

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "t_a"] \arrow[d, "F\alpha"'] & Ga \arrow[d, "G\alpha"] \\ Fb \arrow[r, "t_b"] & Gb \end{tikzcd}$$

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc.**

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc**. Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria.

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc**. Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural $t_\bullet$ é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc**. Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e **Cat**$(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural $t_\bullet$ é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

1.7. Definição. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são **equivalentes** se existem dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tais que o funtor $G \circ F$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}}$ e o funtor $F \circ G$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}'}$.

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc**. Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural $t_\bullet$ é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

1.7. Definição. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são **equivalentes** se existem dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tais que o funtor $G \circ F$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}}$ e o funtor $F \circ G$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}'}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ um subconjunto de objetos. Então $\mathcal{E}$ munido de todas as setas de $\mathcal{C}$ possíveis é uma categoria chamada de **subcategoria completa** de $\mathcal{C}$.

Intuitivamente, **uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc**. Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural $t_\bullet$ é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

1.7. Definição. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são **equivalentes** se existem dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tais que o funtor $G \circ F$ é isomorfo ao funtor $1_\mathcal{C}$ e o funtor $F \circ G$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}'}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ um subconjunto de objetos. Então $\mathcal{E}$ munido de todas as setas de $\mathcal{C}$ possíveis é uma categoria chamada de **subcategoria completa** de $\mathcal{C}$.

Vamos estabelecer um critério para verificar equivalência entre categorias.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c. Afirmamos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c. Afirmamos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c. Afirmamos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
- Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ categorias do tipo esqueleto. Então $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são equivalentes se e só se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são isomorfas.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c. Afirmamos:

- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
- Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ categorias do tipo esqueleto. Então $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são equivalentes se e só se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são isomorfas.
- Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}'$ categorias e seus esqueletos. Então $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{C}'$ se e só se $\mathcal{E}$ é isomorfo a $\mathcal{E}'$.

1.8. Critério. *Seja* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *um funtor. Denotemos por* $F\mathcal{C}$ *a subcategoria completa de* $\mathcal{C}'$ *relacionada com a imagem* $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$*. Então* $F : \mathcal{C} \to F\mathcal{C}$ *define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$*, a função* $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \to \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ *é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1.8, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.
Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que $\mathcal{E}$ é um **esqueleto** de $\mathcal{C}$ se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c. Afirmamos:

• Qualquer categoria possui um esqueleto.
• Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
• Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ categorias do tipo esqueleto. Então $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são equivalentes se e só se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são isomorfas.
• Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}'$ categorias e seus esqueletos. Então $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{C}'$ se e só se $\mathcal{E}$ é isomorfo a $\mathcal{E}'$.

O Critério 1.8 é uma consequência imediata desta última afirmação.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria **lin**$_k$ de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria $\mathbf{lin}_k$ de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.
1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria **lin**$_k$ de **espaços lineares sobre** k **de dimensão finita**.
2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \to \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria $\mathbf{lin}_k$ de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \to \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante. A transformação natural $\alpha_\bullet : 1_{\mathbf{Lin}_k} \to DD$ é dada pela regra $\alpha_V : V \to DDV$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria $\mathbf{lin}_k$ de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \to \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante. A transformação natural $\alpha_\bullet : 1_{\mathbf{Lin}_k} \to DD$ é dada pela regra $\alpha_V : V \to DDV$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$. No caso de $\mathbf{lin}_k$, esta transformação natural identifica V com DDV. **A naturalidade diz a que a identificação "não depende da escolha de base"**.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\, k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria $\mathbf{lin}_k$ de **espaços lineares sobre** k **de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \to \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante. A transformação natural $\alpha_\bullet : 1_{\mathbf{Lin}_k} \to DD$ é dada pela regra $\alpha_V : V \to DDV$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$. No caso de $\mathbf{lin}_k$, esta transformação natural identifica V com DDV. **A naturalidade diz a que a identificação "não depende da escolha de base"**.

3. Existem dois funtores $c, f : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$, o **começo** e o **fim** da seta em $\mathbf{2}$. A própria seta define uma **transformação natural** $c \to f$.

Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor que faz $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ equivalentes. É fácil ver agora que, para $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, Fc_1 e Fc_2 são isomorfos em $\mathcal{C}'$ se e só se c_1 e c_2 são isomorfos em $\mathcal{C}$.

1.9. Exemplos.

1. Seja k um corpo. Então a categoria $\mathrm{Matr}\,k$ (vide o Exemplo 1.2.10) é isomorfa a um esqueleto da categoria $\mathbf{lin}_k$ de **espaços lineares sobre k de dimensão finita**.

2. Seja $V \in \mathbf{Lin}_k$, onde k é um corpo. Denotemos por DV o **espaço dual** para V, $DV := \mathbf{Lin}_k(V, k)$. Claramente $D : \mathbf{Lin}_k \to \mathbf{Lin}_k$ é um funtor contravariante. A transformação natural $\alpha_\bullet : 1_{\mathbf{Lin}_k} \to DD$ é dada pela regra $\alpha_V : V \to DDV$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi v)$. No caso de $\mathbf{lin}_k$, esta transformação natural identifica V com DDV. **A naturalidade diz a que a identificação "não depende da escolha de base"**.

3. Existem dois funtores $c, f : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$, o **começo** e o **fim** da seta em $\mathbf{2}$. A própria seta define uma **transformação natural $c \to f$**. Para uma categoria arbitrária $\mathcal{C}$, a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ é isomorfa a $\mathcal{C}$ e a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \mathcal{C})$ é isomorfa à categoria das setas $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.
4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**).

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as *$n \times n$*-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in$ **CRng**. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que GL_n : **CRng** $\to$ **Grp** é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

1.11. Exemplos.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$.

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in \mathbf{CRng}$. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

1.11. Exemplos.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$. Os objetos de $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ são diagramas do tipo $c \leftarrow x \to c'$, com $x \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $c \leftarrow x \to c'$ para $c \leftarrow y \to c'$ em $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à direita seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ c & & c' \\ & y \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in$ **CRng**. Denotemos por $\mathrm{GL}_n\, A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n :$ **CRng** $\to$ **Grp** é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

1.11. Exemplos.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$. Os objetos de $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ são diagramas do tipo $c \leftarrow x \to c'$, com $x \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $c \leftarrow x \to c'$ para $c \leftarrow y \to c'$ em $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à direita seja comutativo. Um objeto final de $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ é dito **produto** de c e c' em $\mathcal{C}$ (assim, para dizer que $x \in \mathcal{C}$ é produto de c e c', temos que indicar as setas $c \leftarrow x \to c'$) e é denotado por $c \times c'$.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ c & & c' \\ & y \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Usando os funtores c e f, obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \to \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \to f^*$.

4. Seja $A \in$ **CRng**. Denotemos por $\mathrm{GL}_n A$ o **grupo** de todas as $n \times n$-**matrizes inversíveis** sobre A. É fácil ver que $\mathrm{GL}_n :$ **CRng** $\to$ **Grp** é um funtor e que $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ é uma transformação natural.

1.10. Definição. Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito **final** (**universal**) se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \to f$. O conceito dual tem nome **inicial** (também **universal**). Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

1.11. Exemplos.

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$. Os objetos de $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ são diagramas do tipo $c \leftarrow x \to c'$, com $x \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $c \leftarrow x \to c'$ para $c \leftarrow y \to c'$ em $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à direita seja comutativo. Um objeto final de $c \leftarrow \mathcal{C} \to c'$ é dito **produto** de c e c' em $\mathcal{C}$ (assim, para dizer que $x \in \mathcal{C}$ é produto de c e c', temos que indicar as setas $c \leftarrow x \to c'$) e é denotado por $c \times c'$. O conceito dual é denominado **coproduto**, e é denotado por $c \sqcup c'$.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d] & \\ c & y \arrow[l] \arrow[r] & c' \end{tikzcd}$$

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dr] & y \arrow[d] \\ & c \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria** $\mathcal{C} \to c$ de **objetos sobre** c é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria** $\mathcal{C} \to c$ de **objetos sobre** c é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria** $\mathcal{C} \to c$ de **objetos sobre** c é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre** c ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$.

A composição é óbvia.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$.

A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ é um **bifuntor**.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$. A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ é um **bifuntor**. Por exemplo, é fácil ver que, de fato, os melhores funtores do mundo são bifuntores do tipo $\mathcal{C}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to$ **Set**. Podemos também dizer que o funtor $\mathcal{C}(-,-)$ é um bifuntor contravariante no primeiro argumento e covariante no segundo.

Este último em **Esp**, ou em **Set**, é a união disjunta.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd}$$

2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da **categoria $\mathcal{C} \to c$** de **objetos sobre c** é qualquer seta $x \to c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \to c$ e $y \to c$ dois objetos de $\mathcal{C} \to c$. Um morfismo entre si é uma seta $x \to y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \to c$ e $b \to c$ nesta categoria é dito **produto sobre c** ou **produto fibrado** ou **pullback** de a e b, e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\big\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito **pushout**.

3. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$. A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ é um **bifuntor**. Por exemplo, é fácil ver que, de fato, os melhores funtores do mundo são bifuntores do tipo $\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to$ **Set**. Podemos também dizer que o funtor $\mathcal{C}(-, -)$ é um bifuntor contravariante no primeiro argumento e covariante no segundo. Por exemplo, o Critério 1.8 trata do isomorfismo natural entre dois bifuntores $\mathcal{C}(-, -) \simeq \mathcal{C}'(F-, F-)$.

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$.

$$x \xrightarrow{\beta} c \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} c'$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$.

$$x \xrightarrow{\beta} c \overset{\alpha_1}{\underset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} c'$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo.

$$x \xrightarrow{\beta} c \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} c'$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $\mathcal{I}$ uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$).

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $\mathcal{I}$ uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$). Definamos a categoria $F \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$

$$x \xrightarrow{\beta} c \overset{\alpha_1}{\underset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} c'$$

tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $\mathcal{I}$ uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$). Definamos a categoria $F \to \mathcal{C}$. Um objeto de $F \to \mathcal{C}$ é um objeto $c \in \mathcal{C}$ munido de uma coleção $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de setas em $\mathcal{C}$, $\alpha_i : Fi \to c$,

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer $i \xrightarrow{f} j$ em $\mathcal{I}$.

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $\mathcal{I}$ uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$). Definamos a categoria $F \to \mathcal{C}$. Um objeto de $F \to \mathcal{C}$ é um objeto $c \in \mathcal{C}$ munido de uma coleção $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de setas em $\mathcal{C}$, $\alpha_i : Fi \to c$,

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer $i \xrightarrow{f} j$ em $\mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd} & Fi \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha'_i"] & \\ c \arrow[rr] & & c' \end{tikzcd}$$

Sejam $\big((\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}, c\big)$ e $\big((\alpha'_i)_{i\in\mathcal{I}}, c'\big)$ dois objetos de $F \to \mathcal{C}$. Um morfismo entre si é um morfismo $c \to c'$ compatível com os α's, isto é, tal que o diagrama à esquerda é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$.

4. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $\alpha_1, \alpha_2 : c \to c'$ setas em $\mathcal{C}$. Construímos a categoria cujos objetos são setas $\beta : x \to c$ tais que $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$. Um morfismo de $x \to c$ para $y \to c$ é uma seta $x \to y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama à esquerda acima é comutativo. Um objeto final da categoria construída chama-se **equalizador** de α_1, α_2. O conceito dual é dito **coequalizador**. Na categoria **Ab**, o equalizador de α_1, α_2 é nada mais do que o núcleo $\ker(\alpha_1 - \alpha_2)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & c' \end{tikzcd}$$

5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, seja $\mathcal{I}$ uma categoria (**de índices**) e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo $\mathcal{I}$ em $\mathcal{C}$). Definamos a categoria $F \to \mathcal{C}$. Um objeto de $F \to \mathcal{C}$ é um objeto $c \in \mathcal{C}$ munido de uma coleção $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de setas em $\mathcal{C}$, $\alpha_i : Fi \to c$,

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\alpha_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer $i \xrightarrow{f} j$ em $\mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd} & Fi \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha'_i"] & \\ c \arrow[rr] & & c' \end{tikzcd}$$

Sejam $\big((\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}}, c\big)$ e $\big((\alpha'_i)_{i\in\mathcal{I}}, c'\big)$ dois objetos de $F \to \mathcal{C}$. Um morfismo entre si é um morfismo $c \to c'$ compatível com os α's, isto é, tal que o diagrama à esquerda é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$. Um objeto inicial de $F \to \mathcal{C}$ é dito **limite indutivo** de F ou **limite direto** de F ou **colimite** de F, e é denotado por $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 :

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1;

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2;

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.
O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em $\mathcal{C}$, mas não em $\mathcal{I}$; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em $\mathcal{C}$, mas não em $\mathcal{I}$; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Dois exemplos ilustrativos:

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em $\mathcal{C}$, mas não em $\mathcal{I}$; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Dois exemplos ilustrativos:

Considerando uma função monótona $f : A \to B$ entre os conjuntos parcialmente ordenados A e B como um funtor entre as correspondentes categorias, temos $\varprojlim_{a\in A} f(a) = \inf_{a\in A} f(a)$ e $\varinjlim_{a\in A} f(a) = \sup_{a\in A} f(a)$.

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.
O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em $\mathcal{C}$, mas não em $\mathcal{I}$; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$.
Dois exemplos ilustrativos:
Considerando uma função monótona $f : A \to B$ entre os conjuntos parcialmente ordenados A e B como um funtor entre as correspondentes categorias, temos $\varprojlim_{a\in A} f(a) = \inf_{a\in A} f(a)$ e $\varinjlim_{a\in A} f(a) = \sup_{a\in A} f(a)$.
Denotando por ω o conjunto de todos os números naturais $\mathbb{N}$ munido da sua ordem usual, consideramos o funtor $F : \omega^{op} \to \mathbf{CRng}$ dado por $i \mapsto \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ e $(i \to j) \mapsto \left(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}\right)$ com o óbvio homomorfismo, onde p é um número primo.

Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 1.11.1, 1.11.2 e 1.11.3 : caso $\mathcal{I}$ seja uma categoria de dois objetos sem setas, o colimite é o coproduto do Exemplo 1.11.1; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$, o colimite é o pushout do Exemplo 1.11.2; caso $\mathcal{I}$ seja a categoria $\cdot \rightrightarrows \cdot$, o colimite é o coequalizador do Exemplo 1.11.3.

O conceito dual (para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em $\mathcal{C}$, mas não em $\mathcal{I}$; às vezes, para obter um certo co-conceito, precisamos mudar também a categoria de índices) tem nomes **limite** ou **limite inverso** ou **limite projetivo**, e é denotado por $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Dois exemplos ilustrativos:

Considerando uma função monótona $f : A \to B$ entre os conjuntos parcialmente ordenados A e B como um funtor entre as correspondentes categorias, temos $\varprojlim_{a\in A} f(a) = \inf_{a\in A} f(a)$ e $\varinjlim_{a\in A} f(a) = \sup_{a\in A} f(a)$.

Denotando por ω o conjunto de todos os números naturais $\mathbb{N}$ munido da sua ordem usual, consideramos o funtor $F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CRng}$ dado por $i \mapsto \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ e $(i \to j) \mapsto \left(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}\right)$ com o óbvio homomorfismo, onde p é um número primo. Então $\mathbb{Z}_p := \varinjlim_{i\in\omega^{\mathrm{op}}} Fi$ é o anel de números **p-ádicos**.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.

6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os "valores" de $a \times a'$.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.
6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os "valores" de $a \times a'$. Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.
6. **Objetos ou construções universais** (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os "valores" de $a \times a'$. Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos. É fácil verificar que o produto é associativo. Mais exatamente, os funtores $(- \times -) \times -$ e $- \times (- \times -)$ são isomorfos.

Podemos exibir o anel $\mathbb{Z}_p$ como o subanel em $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ formado pelas sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \ni a_{i+1} \mapsto a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
Usando (co)limites, podemos introduzir também (**co**)**produtos infinitos**. Estes correspondem a uma categoria **discreta** de índices, isto é, a uma categoria sem setas não-triviais.
6. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, **geram funtores**. Por exemplo, suponhamos que numa categoria $\mathcal{C}$ sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o **produto**. Note que este funtor depende das escolhas feitas para os "valores" de $a \times a'$. Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos. É fácil verificar que o produto é associativo. Mais exatamente, os funtores $(- \times -) \times -$ e $- \times (- \times -)$ são isomorfos. No mesmo sentido, o produto é comutativo.

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α.

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[ur, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] & \prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & F\operatorname{dom}\alpha \arrow[r, "F\alpha"] & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}
$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
& & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[urr, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] \arrow[rr, shift left, "\alpha_1"] \arrow[rr, shift right, "\alpha_2"'] & & \prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
& F\operatorname{dom}\alpha \arrow[rr, "F\alpha"] & & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

1.12. Lema. *Seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que existem os produtos $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e $\prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha$ em $\mathcal{C}$.*

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
 & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[ur, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] & \prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & F\operatorname{dom}\alpha \arrow[r, "F\alpha"] & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

1.12. Lema. *Seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que existem os produtos $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e $\prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha$ em $\mathcal{C}$. Então o limite $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ é nada mais do que o equalizador de α_1 e α_2 no diagrama à esquerda* ■

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[ur, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] & \prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & F\operatorname{dom}\alpha \arrow[r, "F\alpha"] & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}
$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

1.12. Lema. *Seja $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que existem os produtos $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e $\prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha$ em $\mathcal{C}$. Então o limite $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ é nada mais do que o equalizador de α_1 e α_2 no diagrama à esquerda* ■

1.13. Definição. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ **possui** todos os **limites finitos** se, para qualquer funtor $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ com a **categoria finita** de índices $\mathcal{I}$ (isto significa que $\mathcal{I}$ tem um número finito de objetos e setas), existe o limite $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$.

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
& & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[urr, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[rr, shift left, "\alpha_1"] \arrow[rr, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] & & \prod_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
& F\operatorname{dom}\alpha \arrow[rr, "F\alpha"] & & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

1.12. Lema. *Seja $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que existem os produtos $\prod_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e $\prod_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha$ em $\mathcal{C}$. Então o limite $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$ é nada mais do que o equalizador de α_1 e α_2 no diagrama à esquerda* ∎

1.13. Definição. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ **possui** todos os **limites finitos** se, para qualquer funtor $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ com a **categoria finita** de índices $\mathcal{I}$ (isto significa que $\mathcal{I}$ tem um número finito de objetos e setas), existe o limite $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} Fi$. (A definição dual trata de categorias que possuem todos os colimites finitos.)

Em seguida, para qualquer morfismo α, denotamos por $\operatorname{dom}\alpha$ e $\operatorname{cod}\alpha$ o **domínio** e **codomínio** de α. Assim, $\operatorname{dom}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{cod}\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & F\operatorname{cod}\alpha \\
L \arrow[r, "e"] & \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi \arrow[urr, "\pi_{\operatorname{cod}\alpha}"] \arrow[rr, shift left, "\alpha_1"] \arrow[rr, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{dom}\alpha}"'] & & \prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha \arrow[u, "\pi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & F\operatorname{dom}\alpha \arrow[rr, "F\alpha"] & & F\operatorname{cod}\alpha
\end{tikzcd}$$

O anel de números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ dá uma dica suficiente para demonstrar o seguinte lema.

1.12. Lema. *Seja $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que existem os produtos $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ e $\prod\limits_{\alpha\in\operatorname{Mor}\mathcal{I}} F\operatorname{cod}\alpha$ em $\mathcal{C}$. Então o limite $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$ é nada mais do que o equalizador de α_1 e α_2 no diagrama à esquerda* ■

1.13. Definição. Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ **possui** todos os **limites finitos** se, para qualquer funtor $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ com a **categoria finita** de índices $\mathcal{I}$ (isto significa que $\mathcal{I}$ tem um número finito de objetos e setas), existe o limite $\varprojlim\limits_{i\in\mathcal{I}} Fi$. (A definição dual trata de categorias que possuem todos os colimites finitos.) Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita (**co**)**completa** se existem todos os (co)limites em $\mathcal{C}$.

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos.*

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções** A**-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando;

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções** ***A*-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \to X$ para $b' : M_1 \times M_2 \to X'$ é um **homomorfismo** $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hb = b'$.

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções A-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \to X$ para $b' : M_1 \times M_2 \to X'$ é um **homomorfismo** $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hb = b'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **produto tensorial** e é denotado por $M_1 \otimes_A M_2$.

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções A-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \to X$ para $b' : M_1 \times M_2 \to X'$ é um **homomorfismo** $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hb = b'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **produto tensorial** e é denotado por $M_1 \otimes_A M_2$. Assim, temos uma função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_A M_2$ que denotamos por $m_1 \otimes m_2 := b(m_1, m_2)$, chamando $m_1 \otimes m_2$ **tensor simples**.

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções** A**-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \to X$ para $b' : M_1 \times M_2 \to X'$ é um **homomorfismo** $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hb = b'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **produto tensorial** e é denotado por $M_1 \otimes_A M_2$. Assim, temos uma função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_A M_2$ que denotamos por $m_1 \otimes m_2 := b(m_1, m_2)$, chamando $m_1 \otimes m_2$ **tensor simples**. Em outras palavras, o A-módulo $M_1 \otimes_A M_2$ (junto com $m_1 \otimes m_2$) é um lugar universal para valores das funções A-bilineares de $M_1 \times M_2$:

1.14. Corolário. *Uma categoria possui todos os limites finitos se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de quaisquer dois objetos. Uma categoria é completa se e só se ela possui um objeto final, equalizadores de quaisquer duas setas e produtos de qualquer família de objetos* ■

1.15. Exemplos.

1. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $M_1, M_2 \in \mathbf{Mod}_A$. Consideremos a categoria cujos objetos são **funções A-bilineares** $b : M_1 \times M_2 \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando; um **morfismo** de $b : M_1 \times M_2 \to X$ para $b' : M_1 \times M_2 \to X'$ é um **homomorfismo** $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hb = b'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **produto tensorial** e é denotado por $M_1 \otimes_A M_2$. Assim, temos uma função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_A M_2$ que denotamos por $m_1 \otimes m_2 := b(m_1, m_2)$, chamando $m_1 \otimes m_2$ **tensor simples**. Em outras palavras, o A-módulo $M_1 \otimes_A M_2$ (junto com $m_1 \otimes m_2$) é um lugar universal para valores das funções A-bilineares de $M_1 \times M_2$: qualquer outra função A-bilinear de $M_1 \times M_2$ para algum A-módulo é a composta de $\otimes$ com um (único) homomorfismo de A-módulos.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.**

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,

$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,
$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$,
$i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ com a inversa dada por
$j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,
$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$,
$i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ com a inversa dada por
$j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.
- $\mathbf{Mod}_A\big(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)\big) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,
$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$,
$i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ com a inversa dada por
$j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.
- $\mathbf{Mod}_A\big(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)\big) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$.

Como um exemplo, demonstramos a penúltima afirmação. Sendo a expressão $\varphi(m_1 \otimes m_2)$ trilinear em m_1, m_2, φ, a função i é bem definida e é um homomorfismo de A-módulos.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,

$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$,

$i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ com a inversa dada por

$j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.
- $\mathbf{Mod}_A\big(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)\big) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$.

Como um exemplo, demonstramos a penúltima afirmação. Sendo a expressão $\varphi(m_1 \otimes m_2)$ trilinear em m_1, m_2, φ, a função i é bem definida e é um homomorfismo de A-módulos. A expressão $\psi(m_1)(m_2)$ é trilinear em m_1, m_2, ψ, onde $\psi \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$.

Utilizando o Corolário 1.14, é fácil demonstrar a existência do produto tensorial. De acordo com o Exemplo 1.11.6, o produto tensorial é um bifuntor. **Escapando referências a uma construção concreta, entendemos melhor o comportamento deste funtor.** Usando tal refrão, podemos estabelecer os seguintes isomorfismos naturais.

- $A \otimes_A M \simeq M$, $a \otimes m \mapsto am$.
- $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$, $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$.
- $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$,
$(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$.
- $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$,
$i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ com a inversa dada por
$j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.
- $\mathbf{Mod}_A\big(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)\big) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$.

Como um exemplo, demonstramos a penúltima afirmação. Sendo a expressão $\varphi(m_1 \otimes m_2)$ trilinear em m_1, m_2, φ, a função i é bem definida e é um homomorfismo de A-módulos. A expressão $\psi(m_1)(m_2)$ é trilinear em m_1, m_2, ψ, onde $\psi \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$. Pela propriedade universal do produto tensorial, a regra $m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ determina univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **simétrico** significa que $p(m_1, \ldots, m_d) = p(m_{\sigma 1}, \ldots, m_{\sigma d})$ para quaisquer $m_1, \ldots, m_d \in M$ e qualquer permutação $\sigma : \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = p(m_{\sigma 1}, \dots, m_{\sigma d})$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ e qualquer permutação $\sigma : \{1, \dots, d\} \to \{1, \dots, d\}$. Um morfismo de $p : M^d \to X$ para $p' : M^d \to X'$ é um homomorfismo $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hp = p'$.

univocamente um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M_1 \otimes_A M_2 \to M_3$. Pela unicidade, é fácil ver que a função dada por $\psi \mapsto \varphi$ é um homomorfismo de A-módulos. Com efeito, sejam $\psi, \psi' \in \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ e $a \in A$. Então $\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)$ e $\varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi'(m_1)(m_2)$ implicam $\varphi + \varphi' : m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2) + \psi'(m_1)(m_2) = (\psi + \psi')(m_1)(m_2)$ e $a\varphi : m_1 \otimes m_2 \mapsto a\big(\psi(m_1)(m_2)\big) = (a\psi)(m_1)(m_2)$. Temos

$$j \circ i : \varphi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big),$$

$$i \circ j : \psi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)\Big),$$

como desejado.

2. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = p(m_{\sigma 1}, \dots, m_{\sigma d})$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ e qualquer permutação $\sigma : \{1, \dots, d\} \to \{1, \dots, d\}$. Um morfismo de $p : M^d \to X$ para $p' : M^d \to X'$ é um homomorfismo $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hp = p'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito

***d*-ésima potência simétrica** de M e é denotado por $\mathrm{Sym}^d_A M$.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M.

***d*-ésima potência simétrica** de M e é denotado por $\mathrm{Sym}_A^d M$. É imediato que $\mathrm{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \mathrm{Sym}_A^d M$.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\mathrm{Sym}_A^d M$. É imediato que $\mathrm{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \mathrm{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\mathrm{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1A + \cdots + g_nA$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A.

d-**ésima potência simétrica** de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \ldots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Se $g_1, \ldots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \ldots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\operatorname{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \operatorname{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \ldots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\mathrm{Sym}_A^d M$. É imediato que $\mathrm{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \mathrm{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1A + \dots + g_nA$, o A-módulo $\mathrm{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\mathrm{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\mathrm{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathrm{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \dots + g_n A$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\operatorname{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \operatorname{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares anti-simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \dots + g_n A$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\operatorname{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \operatorname{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares anti-simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **anti-simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = 0$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ dos quais pelo menos dois são iguais.

d-ésima potência simétrica de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \dots + g_n A$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\operatorname{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \operatorname{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares anti-simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **anti-simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = 0$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ dos quais pelo menos dois são iguais. Um morfismo de $p : M^d \to X$ para $p' : M^d \to X'$ é um homomorfismo $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hp = p'$.

d-**ésima potência simétrica** de M e é denotado por $\operatorname{Sym}_A^d M$. É imediato que $\operatorname{Sym}_A^d M$ é um funtor em M. O produto (comutativo) $m_1 \dots m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \operatorname{Sym}_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \dots + g_n A$, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é gerado por todos os "monômios comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Se $g_1, \dots, g_n$ são geradores livres de M, o A-módulo $\operatorname{Sym}_A^d M$ é formado por todos os polinômios homogêneos de grau d em $g_1, \dots, g_n$ com coeficientes em A. Assim, a soma direta $\operatorname{Sym}_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \operatorname{Sym}_A^d M$, chamada **álgebra simétrica** de $M \in \mathbf{Mod}_A$, é nada mais do que a álgebra de polinômios $A[g_1, \dots, g_n]$ caso M seja livre de posto n.

3. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$, $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $d \in \mathbb{N}$. Consideremos a categoria cujos objetos são funções A-multilineares anti-simétricas com d argumentos em M, $p : M^d \to X$, onde $X \in \mathbf{Mod}_A$ está variando. Ser p **anti-simétrico** significa que $p(m_1, \dots, m_d) = 0$ para quaisquer $m_1, \dots, m_d \in M$ dos quais pelo menos dois são iguais. Um morfismo de $p : M^d \to X$ para $p' : M^d \to X'$ é um homomorfismo $h : X \to X'$ de A-módulos tal que $hp = p'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito *d*-**ésima potência**

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.)

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1A + \cdots + g_nA$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \dots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \dots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \dots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \dots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

$\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \bigwedge_A^d M$ é a **álgebra de Grassmann** de $M \in \mathbf{Mod}_A$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

$\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \bigwedge_A^d M$ é a **álgebra de Grassmann** de $M \in \mathbf{Mod}_A$.

4. Seja $h : A \to B$ uma seta em **CRng**.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

$\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus_{d \geqslant 0} \bigwedge_A^d M$ é a **álgebra de Grassmann** de $M \in \mathbf{Mod}_A$.

4. Seja $h : A \to B$ uma seta em **CRng**. Então temos os funtores $- \otimes_A B : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_B$ e $E : \mathbf{Mod}_B \to \mathbf{Mod}_A$.

exterior de M e é denotado por $\bigwedge_A^d M$. É imediato que $\bigwedge_A^d M$ é um funtor em M. O produto $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ é, por definição, a imagem de $(m_1, \ldots, m_d) \in M^d$ pela função $p : M^d \to \bigwedge_A^d M$. Caso M seja um A-módulo finitamente gerado, $M = g_1 A + \cdots + g_n A$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por todos os "monômios anti-comutativos" de grau d em $g_1, \ldots, g_n$. Em particular, caso $n = d$, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ é gerado por $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. Caso $g_1, \ldots, g_d$ sejam geradores livres de M, o A-módulo $\bigwedge_A^d M$ tem posto 1 com o gerador livre $g_1 \wedge \cdots \wedge g_d$. (Equivalentemente, este fato significa que a paridade de permutação é multiplicativa.) Sendo $\bigwedge_A^d$ um funtor, qualquer endomorfismo $h : M \to M$ de um A-módulo livre de posto d induz o endomorfismo $\wedge^d h$ do A-módulo livre $\bigwedge_A^d M$ de posto 1. É fácil ver que tal endomorfismo tem que ser a multiplicação por um elemento apropriado $a \in A$. Denotando $\det h := a$, obtemos $\det(hh') = \det h \cdot \det h'$.

$\bigwedge_A^\bullet M := \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} \bigwedge_A^d M$ é a **álgebra de Grassmann** de $M \in \mathbf{Mod}_A$.

4. Seja $h : A \to B$ uma seta em **CRng**. Então temos os funtores $- \otimes_A B : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_B$ e $E : \mathbf{Mod}_B \to \mathbf{Mod}_A$. O segundo é o funtor de **esquecimento** que considera qualquer $M \in \mathbf{Mod}_B$ como A-módulo

com respeito ao homomorfismo h.

com respeito ao homomorfismo h.
5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X;

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in$ **CRng** e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in$ **CRng** e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em $\mathbf{CRng}$ tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em $\mathbf{CRng}$ tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em $\mathbf{CRng}$ tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em $\mathbf{CRng}$ tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$. Assim, obtemos o funtor de **localização** $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ e uma transformação natural $i_\bullet : 1_{\mathbf{Mod}_A} \to E \circ S^{-1}$ dada por $M \to M \otimes_A S^{-1}A$, $m \mapsto m \otimes 1$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$. Assim, obtemos o funtor de **localização** $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ e uma transformação natural $i_\bullet : 1_{\mathbf{Mod}_A} \to E \circ S^{-1}$ dada por $M \to M \otimes_A S^{-1}A$, $m \mapsto m \otimes 1$. Abusando da notação, às vezes escreve-se a no lugar de ia e m no lugar de $i_M m$.

com respeito ao homomorfismo h.
5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.
Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$. Assim, obtemos o funtor de **localização** $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ e uma transformação natural $i_\bullet : 1_{\mathbf{Mod}_A} \to E \circ S^{-1}$ dada por $M \to M \otimes_A S^{-1}A$, $m \mapsto m \otimes 1$. Abusando da notação, às vezes escreve-se a no lugar de ia e m no lugar de $i_M m$. Usando a propriedade universal da localização, é fácil provar que todo elemento de $S^{-1}M$ tem a forma ms^{-1} para alguns $m \in M$ e $s \in S \subset A$.

com respeito ao homomorfismo h.

5. Sejam $A \in \mathbf{CRng}$ e $S \subset A$. Consideremos a categoria cujos objetos são setas $h : A \to X$ em **CRng** tais que todos os elementos de hS são inversíveis em X; um morfismo de $h : A \to X$ para $h' : A \to X'$ é uma seta $\alpha : X \to X'$ em **CRng** tal que $\alpha h = h'$. Um objeto inicial nessa categoria é dito **localização** de A em S e é denotado por $i : A \to A[S^{-1}]$ ou por $i : A \to S^{-1}A$. Note que $S^{-1}A \simeq \hat{S}^{-1}A$, onde $\hat{S}$ denota o fecho de S relativamente à multiplicação. Por isto, em seguida, sempre assumimos que $SS \subset S \ni 1$.

Para $M \in \mathbf{Mod}_A$, denotemos $S^{-1}M := M \otimes_A S^{-1}A \in \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$. Assim, obtemos o funtor de **localização** $S^{-1} : \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_{S^{-1}A}$ e uma transformação natural $i_\bullet : 1_{\mathbf{Mod}_A} \to E \circ S^{-1}$ dada por $M \to M \otimes_A S^{-1}A$, $m \mapsto m \otimes 1$. Abusando da notação, às vezes escreve-se a no lugar de ia e m no lugar de $i_M m$. Usando a propriedade universal da localização, é fácil provar que todo elemento de $S^{-1}M$ tem a forma ms^{-1} para alguns $m \in M$ e $s \in S \subset A$. Elementos $ms^{-1}, m's'^{-1} \in S^{-1}M$ são iguais em $S^{-1}M$ se e só se existe $s'' \in S$ tal que $(ms' - m's)s'' = 0$ em M.

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**.

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$.

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$.

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais).

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos na próxima seção, este f, através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \to c'$ que tornam f o produto.

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos na próxima seção, este f, através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \to c'$ que tornam f o produto.

1.16. Estruturas algébricas em uma categoria dada. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $G \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\mu \times 1_G"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "1_G \times \mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G & G \times G \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos na próxima seção, este f, através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \to c'$ que tornam f o produto.

$$
\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "\mu \times 1_G"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "1_G \times \mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G & G \times G \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}
$$

1.16. Estruturas algébricas em uma categoria dada. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $G \in \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} = \textbf{Set}$, podemos definir uma estrutura de grupo em G do modo seguinte. Sejam dadas três setas $\mu : G \times G \to G$, $i : G \to G$ e $e : f \to G$ (multiplicação, inverso e unidade, respectivamente), onde f é um objeto final em $\mathcal{C}$ (neste caso de **Set**, qualquer conjunto de um elemento).

6. Frequentemente, construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Set**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \to c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \to c$ e $x \to c'$. Assim, temos uma bijeção $\mathcal{C}(x, c \times c') \to \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, o produto é um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos na próxima seção, este f, através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \to c'$ que tornam f o produto.

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "\mu \times 1_G"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "1_G \times \mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G & G \times G \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

1.16. Estruturas algébricas em uma categoria dada. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja $G \in \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} = \textbf{Set}$, podemos definir uma estrutura de grupo em G do modo seguinte. Sejam dadas três setas $\mu : G \times G \to G$, $i : G \to G$ e $e : f \to G$ (multiplicação, inverso e unidade, respectivamente), onde f é um objeto final em $\mathcal{C}$ (neste caso de **Set**, qualquer conjunto de um elemento). A associatividade de μ significa a comutatividade do diagrama acima, onde $(G \times G) \times G \xrightarrow{t} G \times (G \times G)$

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto).

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

$f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd} f \times G \arrow[r, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \times f \arrow[l, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\ & G & \end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\ f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "(\alpha, \beta)"'] & \\ a & a \times b \arrow[l] \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$
\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
 & G &
\end{tikzcd}
$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "(\alpha, \beta)"'] & \\
a & a \times b \arrow[l] \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$.

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
& G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(1_G, i)}"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "{(i, 1_G)}"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "{(\alpha, \beta)}"'] & \\
a & & b \\
& a \times b \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f\times G\to G\leftarrow G\times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f\leftarrow G\xrightarrow{1_G}G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
f\times G \arrow[r, "e\times 1_G"] \arrow[dr] & G\times G \arrow[d, "\mu"'] & G\times f \arrow[l, "1_G\times e"'] \arrow[dl] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α,β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G,i)"'] \arrow[d] & G\times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i,1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & \\
a & a\times b \arrow[l] \arrow[r] & b
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**),

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "(\alpha, \beta)"'] & \\
a & & b \\
 & a \times b \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis),

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
& G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "(\alpha, \beta)"'] & \\
a & a \times b \arrow[l] \arrow[r] & b
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos,

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[r] & G & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "(\alpha, \beta)"'] & \\
a & a \times b \arrow[l] \arrow[r] & b
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
f \times G \arrow[r, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \times f \arrow[l, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(1_G, i)}"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "{(i, 1_G)}"'] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, "{(\alpha, \beta)}"] & \\
a & a \times b \arrow[l] \arrow[r] & b
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos (grupos em categoria do tipo $\mathcal{C} \to c$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria de espaços topológicos e $c \in \mathcal{C}$;

é o isomorfismo natural (a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dd, "\mu"'] & \\
f \times G \arrow[ur, "e \times 1_G"] \arrow[dr] & & G \times f \arrow[ul, "1_G \times e"'] \arrow[dl] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

$f \times G \to G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G, munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G).

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G, i)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \arrow[l, "(i, 1_G)"] \arrow[d] \\
f \arrow[r, "e"] & G & f \arrow[l, "e"']
\end{tikzcd}$$

A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "(\alpha, \beta)"'] & \\
a & & b \\
 & a \times b \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária $\mathcal{C}$, obtemos o conceito de **grupo** na categoria $\mathcal{C}$. Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos (grupos em categoria do tipo $\mathcal{C} \to c$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria de espaços topológicos e $c \in \mathcal{C}$; por exemplo, caso $\mathcal{C} = \textbf{Esp}$, um grupo sobre $B \in \textbf{Esp}$ é uma função contínua $G \to B$ tal que a imagem inversa de todo ponto tem estrutura de um grupo topológico e as operações são globalmente contínuas).

O conceito dual tem nome **cogrupo**.

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por $\mathbf{Homot}_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por $\mathbf{Homot}_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido).

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por $\mathbf{Homot}_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados.

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por **Homot**$_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera $\mathbb{S}^n$ temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o "equador" $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \to *$ que leva toda a esfera $\mathbb{S}^n$ no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que "inverte" a esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao ponto $*$ por uma simetria.

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por $\mathbf{Homot}_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera $\mathbb{S}^n$ temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o "equador" $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \to *$ que leva toda a esfera $\mathbb{S}^n$ no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que "inverte" a esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que $\mathbb{S}^n$ é um cogrupo.

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por $\mathbf{Homot}_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera $\mathbb{S}^n$ temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o "equador" $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \to *$ que leva toda a esfera $\mathbb{S}^n$ no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que "inverte" a esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que $\mathbb{S}^n$ é um cogrupo.

$$\begin{tikzcd} & & t \arrow[d] \\ x'' \arrow[r] & x' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

1.17. Observação. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja dado um diagrama à esquerda em $\mathcal{C}$.*

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por **Homot**$_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera $\mathbb{S}^n$ temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o "equador" $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \to *$ que leva toda a esfera $\mathbb{S}^n$ no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que "inverte" a esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que $\mathbb{S}^n$ é um cogrupo.

$$\begin{tikzcd} & & t \arrow[d] \\ x'' \arrow[rr] & & x' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

1.17. Observação. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja dado um diagrama à esquerda em $\mathcal{C}$. Suponhamos que existam os produtos fibrados $x' \times_x t$ e $x'' \times_{x'} (x' \times_x t)$.*

$$\begin{tikzcd} x'' \times_{x'} (x' \times_x t) \arrow[r] \arrow[d] & x' \times_x t \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ x'' \arrow[r] & x' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

O conceito dual tem nome **cogrupo**. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por **Homot**$_*$ a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são funções contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserva o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto $\vee$ é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera $\mathbb{S}^n$ temos a comultiplicação $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva o "equador" $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \to *$ que leva toda a esfera $\mathbb{S}^n$ no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ que "inverte" a esfera $\mathbb{S}^n$ em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que $\mathbb{S}^n$ é um cogrupo.

$$\begin{tikzcd} & & t \arrow[d] \\ x'' \arrow[r] & x' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

1.17. Observação. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e seja dado um diagrama à esquerda em $\mathcal{C}$. Suponhamos que existam os produtos fibrados $x' \times_x t$ e $x'' \times_{x'} (x' \times_x t)$. Então $x'' \times_{x'} (x' \times_x t) = x'' \times_x t$ com respeito ao diagrama comutativo à direita* ∎

$$\begin{tikzcd} x'' \times_{x'} (x' \times_x t) \arrow[r] \arrow[d] & x' \times_x t \arrow[r] \arrow[d] & t \arrow[d] \\ x'' \arrow[r] & x' \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\mathrm{Centre}\, G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \mathrm{Centre}\, G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\mathrm{Centre}\, G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \mathrm{Centre}\, G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C. Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\mathrm{Centre}\, G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \mathrm{Centre}\, G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C. Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?

4. Encontre dois funtores $F_1, F_2 : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ tais que $F_i G = G$ para todos $i = 1, 2$ e $G \in \mathbf{Grp}$.

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\mathrm{Centre}\, G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \mathrm{Centre}\, G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C. Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?

4. Encontre dois funtores $F_1, F_2 : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ tais que $F_i G = G$ para todos $i = 1, 2$ e $G \in \mathbf{Grp}$.

5. Seja $S \in \mathbf{Set}$. Definamos $\mathrm{ev}_X : \mathbf{Set}(S, X) \times S \to X$ pela regra $(f, s) \mapsto f(s)$. Prove que $\mathrm{ev}_\bullet$ é uma transformação natural.

Exercícios

1. Prove todas as afirmações cujas demonstrações foram omitidas nas notas de aulas.

2. Seja $G \in \mathbf{Grp}$. Denotemos por $\mathrm{Centre}\, G := \{g \in G \mid gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ o **centro** do grupo G. Considerando apropriados homomorfismos $\Sigma_2 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2$ de grupos simétricos, prove que $G \mapsto \mathrm{Centre}\, G$ é um funtor do formato $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$.

3. Seja $C \in \mathbf{Set}$. Denotemos por $2^C := \{S \mid S \subset C\}$ o conjunto de todos os subconjuntos de C. Será que $C \mapsto 2^C$ é um funtor?

4. Encontre dois funtores $F_1, F_2 : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ tais que $F_i G = G$ para todos $i = 1, 2$ e $G \in \mathbf{Grp}$.

5. Seja $S \in \mathbf{Set}$. Definamos $\mathrm{ev}_X : \mathbf{Set}(S, X) \times S \to X$ pela regra $(f, s) \mapsto f(s)$. Prove que $\mathrm{ev}_\bullet$ é uma transformação natural.

6. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtores. Mostre que uma transformação natural $t_\bullet : F \to G$ é nada mais do que um funtor $t : \mathcal{C} \times \mathbf{2} \to \mathcal{C}'$ tal que $t(-, 0) = F$ e $t(-, 1) = G$, onde $\mathbf{2}$ é a categoria com 2 objetos $0, 1$ e uma única seta não-trivial $0 \to 1$.

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfimos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}')$.

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfimos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}')$.

9. Denotemos por $\mathcal{D}$ a categoria com 3 objetos e apenas duas setas não-triviais $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor, $c \in \mathcal{C}$ e $\Delta_c : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um **funtor constante** relacionado com c (isto significa que Δ_c manda todos os objetos para c e todos os morfismos para 1_c). Descreva de um modo simples todos as transformações naturais do tipo $\Delta_c \to F$. (Será que já encontramos este animal?)

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfimos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}')$.

9. Denotemos por $\mathcal{D}$ a categoria com 3 objetos e apenas duas setas não-triviais $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor, $c \in \mathcal{C}$ e $\Delta_c : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um **funtor constante** relacionado com c (isto significa que Δ_c manda todos os objetos para c e todos os morfismos para 1_c). Descreva de um modo simples todos as transformações naturais do tipo $\Delta_c \to F$. (Será que já encontramos este animal?)

10. Uma categoria $\mathcal{C}$ é **pré-ordem** se, para todos $c, c' \in \mathcal{C}$, existe no máximo um morfismo $c \to c'$. Denotemos por **Preord** a subcategoria completa de **Cat** formada por todos as pré-ordens. Mostre que **Preord** é fechada relativamente a produtos.

7. Supondo que os indicados produtos e coprodutos existem, encontre uma transformação natural $(a \times c) \sqcup (b \times c) \to (a \sqcup b) \times c$. Essa é sempre um isomorfismo?

8. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Estabeleça isomorfimos de categorias $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})$ e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'^{\,\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}')$.

9. Denotemos por $\mathcal{D}$ a categoria com 3 objetos e apenas duas setas não-triviais $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor, $c \in \mathcal{C}$ e $\Delta_c : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um **funtor constante** relacionado com c (isto significa que Δ_c manda todos os objetos para c e todos os morfismos para 1_c). Descreva de um modo simples todos as transformações naturais do tipo $\Delta_c \to F$. (Será que já encontramos este animal?)

10. Uma categoria $\mathcal{C}$ é **pré-ordem** se, para todos $c, c' \in \mathcal{C}$, existe no máximo um morfismo $c \to c'$. Denotemos por **Preord** a subcategoria completa de **Cat** formada por todos as pré-ordens. Mostre que **Preord** é fechada relativamente a produtos.

11. Descreva os (co)produtos nas categorias Matr_k e **Preord**.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \rightarrow B$ setas em $\mathbf{CRng}$. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \rightarrow B$ setas em $\mathbf{CRng}$. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.
13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\mathrm{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \to B$ setas em $\mathbf{CRng}$. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.
13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\mathrm{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.
14. Sejam $G, G' \in \mathcal{C}$ grupos em $\mathcal{C}$. Defina um homomorfismo $G \to G'$.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \rightarrow B$ setas em $\mathbf{CRng}$. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.
13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\mathrm{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.
14. Sejam $G, G' \in \mathcal{C}$ grupos em $\mathcal{C}$. Defina um homomorfismo $G \to G'$.
15. Um **monoide** é um conjunto M munido de uma operação binária $\cdot$ associativa que possui unidade. Dizemos que um monoide M **age** sobre um conjunto S quando é dada uma operação binária $M \times S \xrightarrow{\circ} S$ tal que $1 \circ s = s$ e $m_1 \circ (m_2 \circ s) = (m_1 \cdot m_2) \circ s$ para todos $m_1, m_2 \in M$ e $s \in S$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina monoide em $\mathcal{C}$. Defina ação de monoide em $\mathcal{C}$ sobre um objeto de $\mathcal{C}$.

12. Sejam $A, B, C \in \mathbf{CRng}$ e $A \leftarrow C \to B$ setas em $\mathbf{CRng}$. Então $A, B \in \mathbf{Mod}_C$. Prove que $A \otimes_C B \in \mathbf{CRng}$ é o pushout.

13. Encontre uma definição adequada da multiplicação em $\mathrm{Sym}_A^\bullet M$ e em $\bigwedge_A^\bullet M$.

14. Sejam $G, G' \in \mathcal{C}$ grupos em $\mathcal{C}$. Defina um homomorfismo $G \to G'$.

15. Um **monoide** é um conjunto M munido de uma operação binária $\cdot$ associativa que possui unidade. Dizemos que um monoide M **age** sobre um conjunto S quando é dada uma operação binária $M \times S \xrightarrow{\circ} S$ tal que $1 \circ s = s$ e $m_1 \circ (m_2 \circ s) = (m_1 \cdot m_2) \circ s$ para todos $m_1, m_2 \in M$ e $s \in S$. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina monoide em $\mathcal{C}$. Defina ação de monoide em $\mathcal{C}$ sobre um objeto de $\mathcal{C}$.

16. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Defina uma categoria em $\mathcal{C}$.