

Categorias, álgebra homológica, categorias derivadas

slides de aula

Sasha Anan'in

ICMC, USP, São Carlos

14/10/2015 – 11/11/2015

3. Cohomologias

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k ,

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k .

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X .

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Seja $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X . Se $f : X \rightarrow X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$,

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Seja $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X . Se $f : X \rightarrow X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$, obtendo assim um **functor** $\mathbf{Esp} \xrightarrow{S_k} \mathbf{Ab}$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X . Se $f : X \rightarrow X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$, obtendo assim um **functor** $\mathbf{Esp} \xrightarrow{S_k} \mathbf{Ab}$. Em seguida, frequentemente escrevemos f no lugar de $S_k f$.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X . Se $f : X \rightarrow X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$, obtendo assim um **funtor** $\mathbf{Esp} \xrightarrow{S_k} \mathbf{Ab}$. Em seguida, frequentemente escrevemos f no lugar de $S_k f$. Os elementos de $S_k X$ são ditos **k -cadeias**.

3. Cohomologias

3.1. Exemplo introdutório: homologias singulares. Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $e_0, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Um **k -simplexo (padrão)** Δ_k é o **envelope convexo** dos e_0, \dots, e_k , isto é, o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém os e_0, \dots, e_k . O simplexo Δ_k pode ser descrito usando **coordenadas baricêntricas** $\Delta_k = \{ \sum_{i=0}^k x_i e_i \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, x_0, \dots, x_k \geq 0 \}$. Sejam $0 \leq i \leq k$ com $k \geq 1$. Denotemos por $\partial_k^i : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ a função da **i -ésima face** dada pela fórmula $\partial_k^i : (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$ em termos de coordenadas baricêntricas. É óbvio que $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$ se $k \geq 1$ e $0 \leq i < j \leq k + 1$.

Seja X um espaço topológico. Um **k -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Denotamos por $S_k X := \{ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \mid \sigma \in \mathbf{Esp}(\Delta_k, X), c_{\sigma} \in \mathbb{Z} \}$ o grupo abeliano livremente gerado por todos os k -simplexos singulares em X . Se $f : X \rightarrow X'$ é uma seta em **Esp**, podemos definir $(S_k f)(\sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma) := \sum_{\sigma} c_{\sigma} f \sigma$, obtendo assim um **functor** $\mathbf{Esp} \xrightarrow{S_k} \mathbf{Ab}$. Em seguida, frequentemente escrevemos f no lugar de $S_k f$. Os elementos de $S_k X$ são ditos **k -cadeias**. Por definição, $S_k := 0$ para $k < 0$.

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo**

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$).

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$.

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\partial_k \partial_{k+1} \sigma = \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i =$$

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i \end{aligned}$$

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i \end{aligned}$$

e, em vista de $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$,

$$\sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1} =$$

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i \end{aligned}$$

e, em vista de $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1} = \\ &= - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^j, \end{aligned}$$

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i \end{aligned}$$

e, em vista de $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1} = \\ &= - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^j, \end{aligned}$$

mostrando que $\partial^2 = 0$

A regra $\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \partial_k^i$ define a transformação natural $\partial_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$, chamada **operador de bordo** (por definição, $\partial_k := 0$ se $k \leq 0$). Verifiquemos que $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Seja $\sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ um $(k+1)$ -simplexo singular, então

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma \partial_{k+1}^j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1}} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i \end{aligned}$$

e, em vista de $\partial_{k+1}^j \partial_k^i = \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^j \partial_k^i &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^{j-1} = \\ &= - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \partial_{k+1}^i \partial_k^j, \end{aligned}$$

mostrando que $\partial^2 = 0$ (em seguida, frequentemente omitimos índices caso isto não cause confusões).

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$.*

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$.*

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ um simplexo singular.

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ um simplexo singular. Definamos $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0) \sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \\ c & \text{se } x_0 = 1 \end{cases}$$

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ um simplexo singular. Definamos $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0) \sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \\ c & \text{se } x_0 = 1 \end{cases}$$

É fácil ver que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^{j+1} = c_{k-1} \cdot (\sigma \partial_k^j)$ se $k > 0$ e $0 \leq j \leq k$, que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^0 = \sigma$ se $k \geq 0$ e que $(c_0 \cdot \sigma) \partial_1^1 = c$, onde c denota o simplexo singular $\Delta_0 \rightarrow X$ com a imagem c .

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ um simplexo singular. Definamos $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0) \sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \\ c & \text{se } x_0 = 1 \end{cases}$$

É fácil ver que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^{j+1} = c_{k-1} \cdot (\sigma \partial_k^j)$ se $k > 0$ e $0 \leq j \leq k$, que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^0 = \sigma$ se $k \geq 0$ e que $(c_0 \cdot \sigma) \partial_1^1 = c$, onde c denota o simplexo singular $\Delta_0 \rightarrow X$ com a imagem c . Daí segue a primeira afirmação.

Temos também uma transformação natural $\text{deg} : S_0 \rightarrow \Delta_{\mathbb{Z}}$, chamada **grau** e dada por $\sigma \mapsto 1$, onde $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ denota o funtor constante: $\Delta_{\mathbb{Z}}X := \mathbb{Z}$ e $\Delta_{\mathbb{Z}}f := 1_{\mathbb{Z}}$.

3.1.1. Lema. *Seja $c \in X$ um ponto num conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Então existem homomorfismos $c_k : S_k X \rightarrow S_{k+1} X$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial c_k + c_{k-1} \partial = 1_{S_k X}$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 X} - \text{deg}_X \cdot c$. Em particular, $\text{Im } \partial_{k+1} = \text{Ker } \partial_k$ para todo $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ um simplexo singular. Definamos $c_k \cdot \sigma : \Delta_{k+1} \rightarrow X$ pela fórmula

$$(c_k \cdot \sigma)(x_0, \dots, x_{k+1}) := \begin{cases} x_0 c + (1 - x_0) \sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{k+1}}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \\ c & \text{se } x_0 = 1 \end{cases}$$

É fácil ver que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^{j+1} = c_{k-1} \cdot (\sigma \partial_k^j)$ se $k > 0$ e $0 \leq j \leq k$, que $(c_k \cdot \sigma) \partial_{k+1}^0 = \sigma$ se $k \geq 0$ e que $(c_0 \cdot \sigma) \partial_1^1 = c$, onde c denota o simplexo singular $\Delta_0 \rightarrow X$ com a imagem c . Daí segue a primeira afirmação.

A segunda é um fato geral: se $\partial_k X = 0$, então $X = \partial c_k X + c_{k-1} \partial X = \partial c_k X$ ■

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\text{deg } f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$.

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$ para todo $i < k$.

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1}\partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução.

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em \mathbb{R}^n .

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1}\partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1}\partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em \mathbb{R}^n .

Consideremos o caso $k = 0$.

3.1.2. Lema. *Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em \mathbb{R}^n .

Consideremos o caso $k = 0$. De $\deg f_0 = 0$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 \Delta_0} - \deg \cdot c$ para qualquer $c \in \Delta_1 \times \Delta_0 \simeq \Delta_1$ (vide o Lema 3.1.1), obtemos

$$f_0 1_{\Delta_0} - s_{-1} \partial 1_{\Delta_0} = f_0 1_{\Delta_0} = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} + \deg(f_0 1_{\Delta_0}) c = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} = \partial f_1 c_0 1_{\Delta_0}$$

3.1.2. Lema. Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em \mathbb{R}^n .

Consideremos o caso $k = 0$. De $\deg f_0 = 0$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 \Delta_0} - \deg \cdot c$ para qualquer $c \in \Delta_1 \times \Delta_0 \simeq \Delta_1$ (vide o Lema 3.1.1), obtemos

$$f_0 1_{\Delta_0} - s_{-1} \partial 1_{\Delta_0} = f_0 1_{\Delta_0} = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} + \deg(f_0 1_{\Delta_0}) c = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} = \partial f_1 c_0 1_{\Delta_0}$$

e definamos $b_0 := f_1 c_0 1_{\Delta_0} \in S_1(\Delta_1 \times \Delta_0)$.

3.1.2. Lema. Sejam $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, transformações naturais tais que $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $i < 0$, definamos $s_i := 0$. Por indução sobre k , já construímos transformações naturais $s_i : S_i \rightarrow S_{i+1}(\Delta_1 \times -)$ tais que $f_i = \partial s_i + s_{i-1} \partial$ para todo $i < k$.

Para o simplexo singular $1_{\Delta_k} \in S_k \Delta_k$, temos

$$\begin{aligned} \partial(f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (\partial s_{k-1}) \partial 1_{\Delta_k} = \\ &= f_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} - (f_{k-1} - s_{k-2} \partial) \partial 1_{\Delta_k} = 0 \end{aligned}$$

devido a $\partial^2 = 0$ e pela hipótese de indução. Claro que $\Delta_1 \times \Delta_k$ é convexo em \mathbb{R}^n .

Consideremos o caso $k = 0$. De $\deg f_0 = 0$ e $\partial c_0 = 1_{S_0 \Delta_0} - \deg \cdot c$ para qualquer $c \in \Delta_1 \times \Delta_0 \simeq \Delta_1$ (vide o Lema 3.1.1), obtemos

$$f_0 1_{\Delta_0} - s_{-1} \partial 1_{\Delta_0} = f_0 1_{\Delta_0} = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} + \deg(f_0 1_{\Delta_0}) c = f_0 \partial c_0 1_{\Delta_0} = \partial f_1 c_0 1_{\Delta_0}$$

e definamos $b_0 := f_1 c_0 1_{\Delta_0} \in S_1(\Delta_1 \times \Delta_0)$. Temos $f_0 1_{\Delta_0} = \partial b_0 + s_{-1} \partial 1_{\Delta_0}$.

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que

$$\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k},$$

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente.

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X .

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$,

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k .

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k .

Finalmente, pela naturalidade de f_k e de s_{k-1} , obtemos $f_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k$ e $(1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} = s_{k-1} \sigma$ para qualquer função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k .

Finalmente, pela naturalidade de f_k e de s_{k-1} , obtemos $f_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k$ e $(1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} = s_{k-1} \sigma$ para qualquer função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ (que é nada mais do que um k -simplexo singular em X).

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k .

Finalmente, pela naturalidade de f_k e de s_{k-1} , obtemos $f_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k$ e $(1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} = s_{k-1} \sigma$ para qualquer função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ (que é nada mais do que um k -simplexo singular em X). Agora,

$$\begin{aligned} f_k \sigma &= f_k \sigma 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma)(\partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) = \\ &= \partial(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k + (1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \sigma \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \partial \sigma, \end{aligned}$$

pois $(1_{\Delta_1} \times \sigma) \partial = \partial(1_{\Delta_1} \times \sigma)$ e $\sigma \partial = \partial \sigma$

Caso $k \neq 0$, pelo Lema 3.1.1, existe $b_k \in S_{k+1}(\Delta_1 \times \Delta_k)$ tal que $\partial b_k = f_k 1_{\Delta_k} - s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$, ou seja, $f_k 1_{\Delta_k} = \partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}$ novamente. Definamos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ pela fórmula $s_k \sigma := (1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k$, onde $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ é um k -simplexo singular em X . Então, para quaisquer seta $f : X \rightarrow X'$ em **Esp** e k -simplexo singular $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ em X , temos $(1_{\Delta_1} \times f) s_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times f)(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k = (1_{\Delta_1} \times f \sigma) b_k = s_k(f \sigma)$, mostrando assim a naturalidade de s_k .

Finalmente, pela naturalidade de f_k e de s_{k-1} , obtemos $f_k \sigma = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k$ e $(1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} = s_{k-1} \sigma$ para qualquer função contínua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ (que é nada mais do que um k -simplexo singular em X). Agora,

$$\begin{aligned} f_k \sigma &= f_k \sigma 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma) f_k 1_{\Delta_k} = (1_{\Delta_1} \times \sigma)(\partial b_k + s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k}) = \\ &= \partial(1_{\Delta_1} \times \sigma) b_k + (1_{\Delta_1} \times \sigma) s_{k-1} \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \sigma \partial 1_{\Delta_k} = \partial s_k \sigma + s_{k-1} \partial \sigma, \end{aligned}$$

pois $(1_{\Delta_1} \times \sigma) \partial = \partial(1_{\Delta_1} \times \sigma)$ e $\sigma \partial = \partial \sigma$ (usamos aqui o fato que ∂ é uma transformação natural) ■

Introduzimos a categoria **Esp**⁽²⁾ de pares “espaço topológico e seu subespaço”.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X .

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.
Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$)

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \xhookrightarrow{i} X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \xhookrightarrow{i} S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$*

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \hookrightarrow X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \hookrightarrow S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado ***k-homologia singular*** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ (isto é, uma seta $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$ em \mathbf{Esp} tal que $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$).*

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \hookrightarrow X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \hookrightarrow S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ (isto é, uma seta $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$ em \mathbf{Esp} tal que $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$). Então $H_k h^0 = H_k h^1$, onde $h^t : (X, S) \rightarrow (X', S')$ é dado por $h^t x := h(t, x)$.*

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \hookrightarrow X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \hookrightarrow S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ (isto é, uma seta $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$ em \mathbf{Esp} tal que $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$). Então $H_k h^0 = H_k h^1$, onde $h^t : (X, S) \rightarrow (X', S')$ é dado por $h^t x := h(t, x)$.*

Demonstração. Seja $t \in \Delta_1$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \hookrightarrow X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \hookrightarrow S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ (isto é, uma seta $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$ em \mathbf{Esp} tal que $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$). Então $H_k h^0 = H_k h^1$, onde $h^t : (X, S) \rightarrow (X', S')$ é dado por $h^t x := h(t, x)$.*

Demonstração. Seja $t \in \Delta_1$. A função contínua $g^t : X \rightarrow \Delta_1 \times X$, definida pela regra $g^t : x \mapsto (t, x)$, é uma transformação natural em X tal que $hg^t = h^t$.

Introduzimos a categoria $\mathbf{Esp}^{(2)}$ de pares “espaço topológico e seu subespaço”. Os objetos de $\mathbf{Esp}^{(2)}$ são pares (X, S) , onde $X \in \mathbf{Esp}$ é um espaço topológico e $S \hookrightarrow X$ é um subespaço em X . Uma seta $(X, S) \xrightarrow{f} (X', S')$ em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ é simplesmente uma seta $X \xrightarrow{f} X'$ em \mathbf{Esp} tal que $fS \subset S'$.

Seja $(X, S) \in \mathbf{Esp}^{(2)}$. Então temos $S_k S \hookrightarrow S_k X$ e definimos $S_k(X, S) := S_k X / S_k S$. Sendo ∂ uma transformação natural, obtemos um homomorfismo induzido $\partial_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k-1}(X, S)$. É fácil ver que tal ∂_k (que é mais geral do que o anterior: tome $S = \emptyset$) é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Definamos $H_k(X, S; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. É imediato que $H_k : \mathbf{Esp}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é um funtor, chamado **k -homologia singular** de par.

3.1.3. Proposição. *Sejam $(X, S), (X', S') \in \mathbf{Esp}^{(2)}$ e seja $h : \Delta_1 \times (X, S) \rightarrow (X', S')$ uma homotopia em $\mathbf{Esp}^{(2)}$ (isto é, uma seta $h : \Delta_1 \times X \rightarrow X'$ em \mathbf{Esp} tal que $h(\Delta_1 \times S) \subset S'$). Então $H_k h^0 = H_k h^1$, onde $h^t : (X, S) \rightarrow (X', S')$ é dado por $h^t x := h(t, x)$.*

Demonstração. Seja $t \in \Delta_1$. A função contínua $g^t : X \rightarrow \Delta_1 \times X$, definida pela regra $g^t : x \mapsto (t, x)$, é uma transformação natural em X tal que $hg^t = h^t$. Temos transformações naturais induzidas

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos

$s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$,

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos

$s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ depende de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $h g^t = h^t$ segue

$h_k g_k^t = h_k^t$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos

$s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $h g^t = h^t$ segue

$h_k g_k^t = h_k^t$. Logo, $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1} \partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1} \partial$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $h g^t = h^t$ segue

$h_k g_k^t = h_k^t$. Logo, $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1} \partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1} \partial$. Seja

$z \in \text{Ker } \partial_k$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $h g^t = h^t$ segue

$h_k g_k^t = h_k^t$. Logo, $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1} \partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1} \partial$. Seja

$z \in \text{Ker } \partial_k$. Então $(h_k^1 - h_k^0)z = \partial h_{k+1} s_k z \in \text{Im } \partial_{k+1}$.

$g_k^t : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $\partial g_k^t = g_{k-1}^t \partial$. Já que $\deg g_0^t$ independe de t , definindo $f_k := g_k^1 - g_k^0$, obtemos transformações naturais $f_k : S_k \rightarrow S_k(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $\deg f_0 = 0$ e $\partial f_k = f_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.1.2, existem transformações naturais $s_k : S_k \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times -)$, $k \in \mathbb{Z}$, tais que $f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De $g^t S \subset \Delta_1 \times S$ segue $g_k^t(S_k S) \subset S_k(\Delta_1 \times S) \subset S_k(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $g_k^t : S_k X \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pela naturalidade dos

s_k 's aplicada ao morfismo $S \xrightarrow{i} X$, concluímos que

$s_k(S_k S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times S) \subset S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$ para os homomorfismos $s_k : S_k X \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos homomorfismos

induzidos $g_k^t : S_k(X, S) \rightarrow S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$, $f_k = g_k^1 - g_k^0$ e

$s_k : S_k(X, S) \rightarrow S_{k+1}(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S)$ e permanece válido

$f_k = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, isto é, $g_k^1 - g_k^0 = \partial s_k + s_{k-1} \partial$, $k \in \mathbb{Z}$.

O morfismo $h : (\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow (X', S')$ induz os homomorfismos

$h_k : S_k(\Delta_1 \times X, \Delta_1 \times S) \rightarrow S_k(X', S')$, $k \in \mathbb{Z}$. De $h g^t = h^t$ segue

$h_k g_k^t = h_k^t$. Logo, $h_k^1 - h_k^0 = h_k \partial s_k + h_k s_{k-1} \partial = \partial h_{k+1} s_k + h_k s_{k-1} \partial$. Seja

$z \in \text{Ker } \partial_k$. Então $(h_k^1 - h_k^0)z = \partial h_{k+1} s_k z \in \text{Im } \partial_{k+1}$. Isto implica

$H_k h^0 = H_k h^1$ ■

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, sequências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

\emptyset nada.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, sequências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

\emptyset nada.

$+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{j-1}} C^j \xrightarrow{d_{C^\bullet}^j} C^{j+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{j+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s,

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i .

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem).

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria se definirmos $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria se definirmos $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$. Ela possui biprodutos $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^i := C^i \oplus D^i$ com projeções e injeções óbvias.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os **$*$ -complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria se definirmos $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$. Ela possui biprodutos $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^i := C^i \oplus D^i$ com projeções e injeções óbvias. Ela tem objeto nulo $0^i := 0$.

3.2. Complexos, cobordos, cociclos e cohomologias. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os ***-complexos**, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\bullet: \dots \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i+1}} \dots$$

com a condição:

- \emptyset nada.
- $+$ existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.
- $-$ existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.
- b existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos $d_{C^\bullet}^i$'s chamam-se **operadores de bordo** do complexo. Um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i: C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com os $d_{C^\bullet}^i$'s, isto é, $h^{i+1} d_{C^\bullet}^i = d_{D^\bullet}^i h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $hd = dh$ (os índices se sabem). A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria se definirmos $(h^\bullet + f^\bullet)^i := h^i + f^i$. Ela possui biprodutos $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^i := C^i \oplus D^i$ com projeções e injeções óbvias. Ela tem objeto nulo $0^i := 0$. Possui núcleos e conúcleos:

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet: \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$.

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso).

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo.

$$\begin{array}{ccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\
 \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i
 \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\
 \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i
 \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$. Temos a decomposição de $d_{C^\bullet}^{i-1}$ no diagrama à direita com j_C^i mono (vide a Definição 2.18).

$$\begin{array}{ccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet \\
 \pi_C^i \uparrow & \text{ker } d_C^i \downarrow & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i
 \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$. Temos a decomposição de $d_{C^\bullet}^{i-1}$ no diagrama à direita com $j_{C^\bullet}^i$ mono (vide a Definição 2.18). Façamos $H^i C^\bullet := \text{Co } j_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\
 \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i
 \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$. Temos a decomposição de $d_{C^\bullet}^{i-1}$ no diagrama à direita com $j_{C^\bullet}^i$ mono (vide a Definição 2.18). Fazemos $H^i C^\bullet := \text{Co } j_{C^\bullet}^i$. Em outras palavras, a sequência

$$0 \rightarrow B^i C^\bullet \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} Z^i C^\bullet \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} H^i C^\bullet \rightarrow 0$$

é exata.

$$\begin{array}{ccc} B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\ \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow & \\ C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$. Temos a decomposição de $d_{C^\bullet}^{i-1}$ no diagrama à direita com $j_{C^\bullet}^i$ mono (vide a Definição 2.18). Fazemos $H^i C^\bullet := \text{Coj}_{C^\bullet}^i$. Em outras palavras, a sequência

$$0 \rightarrow B^i C^\bullet \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} Z^i C^\bullet \xrightarrow{\text{coj}_{C^\bullet}^i} H^i C^\bullet \rightarrow 0$$

é exata.

Seja $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ um morfismo entre complexos.

$$\begin{array}{ccc} B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\ \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow & \\ C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i \end{array}$$

por exemplo, $(\text{Ker } h^\bullet)^i := \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\bullet : \text{Ker } h^\bullet \rightarrow C^\bullet$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\bullet}^i$ induzido por $d_{C^\bullet}^i$ e $d_{D^\bullet}^i$. Obviamente, h^\bullet é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* C$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\bullet um complexo. Denotemos $B^i C^\bullet := \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $Z^i C^\bullet := \text{Ker } d_{C^\bullet}^i$. Temos a decomposição de $d_{C^\bullet}^{i-1}$ no diagrama à direita com $j_{C^\bullet}^i$ mono (vide a Definição 2.18). Façamos $H^i C^\bullet := \text{Coj}_{C^\bullet}^i$. Em outras palavras, a sequência

$$\begin{array}{ccc} B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet \\ \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & \text{ker } d_{C^\bullet}^i \downarrow & \\ C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i \end{array}$$

$$0 \rightarrow B^i C^\bullet \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} Z^i C^\bullet \xrightarrow{\text{coj}_{C^\bullet}^i} H^i C^\bullet \rightarrow 0$$

é exata.

Seja $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ um morfismo entre complexos. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{cccccccccccc} C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{ker } d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\ h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & & & & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\ D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{ker } d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 \\
 \downarrow h^{i-1} & & & & \downarrow h^i & & \downarrow g \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0
 \end{array}$$

As setas h^i e h^{i+1} induzem o morfismo $Z^i h^\bullet : Z^i C^\bullet \rightarrow Z^i D^\bullet$ que faz o diagrama à direita comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow Z^i h^\bullet & & \downarrow h^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 \\
 \downarrow h^{i-1} & & & & \downarrow h^i & & \downarrow g \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0
 \end{array}$$

As setas h^i e h^{i+1} induzem o morfismo $Z^i h^\bullet : Z^i C^\bullet \rightarrow Z^i D^\bullet$ que faz o diagrama à direita comutativo. As setas h^{i-1} e h^i induzem o morfismo $g : \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1}$ que faz o diagrama acima comutativo, onde

$$\begin{array}{ccccc}
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow Z^i h^\bullet & & \downarrow h^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$m_{C^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) : B^i C^\bullet = \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) \rightarrow C^i$ e $m_{D^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) : B^i D^\bullet = \text{Im } d_{D^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) \rightarrow D^i$ são os monomorfismos participando nas decomposições dos morfismos $d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $d_{D^\bullet}^{i-1}$ (vide a Definição 2.17).

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0 \\
 \downarrow h^{i-1} & & & & \downarrow h^i & & \downarrow g \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \rightarrow 0
 \end{array}$$

As setas h^i e h^{i+1} induzem o morfismo $Z^i h^\bullet : Z^i C^\bullet \rightarrow Z^i D^\bullet$ que faz o diagrama à direita comutativo. As setas h^{i-1} e h^i induzem o morfismo $g : \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} \rightarrow \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1}$ que faz o diagrama acima comutativo, onde

$$\begin{array}{ccccc}
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow Z^i h^\bullet & & \downarrow h^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$m_{C^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) : B^i C^\bullet = \text{Im } d_{C^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}) \rightarrow C^i$ e $m_{D^\bullet}^i = \ker(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) : B^i D^\bullet = \text{Im } d_{D^\bullet}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}) \rightarrow D^i$ são os monomorfismos participando nas decomposições dos morfismos $d_{C^\bullet}^{i-1}$ e $d_{D^\bullet}^{i-1}$ (vide a Definição 2.17). Assim, as setas h^i e g induzem o morfismo

$$\begin{array}{ccccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow B^i h^\bullet & & \downarrow h^i & & \downarrow g & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

Consequentemente, no diagrama à direita temos $m_{D^\bullet}^i \cdot (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i = h^i m_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = m_{D^\bullet}^i \cdot \pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

Consequentemente, no diagrama à direita temos $m_{D^\bullet}^i \cdot (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i = h^i m_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = m_{D^\bullet}^i \cdot \pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1}$.

Sendo $m_{D^\bullet}^i$ mono, concluímos que $\pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1} = (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$, isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

Consequentemente, no diagrama à direita temos $m_{D^\bullet}^i \cdot (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i = h^i m_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = m_{D^\bullet}^i \cdot \pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1}$.

Sendo $m_{D^\bullet}^i$ mono, concluímos que $\pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1} = (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$, isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo. Resumindo, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

(3.2.1)

$$\begin{array}{cccccccc}
 C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & Z^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\
 D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$B^i h^\bullet : B^i C^\bullet \rightarrow B^i D^\bullet$ que faz o diagrama acima comutativo.

Consequentemente, no diagrama à direita temos $m_{D^\bullet}^i \cdot (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i = h^i m_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = m_{D^\bullet}^i \cdot \pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1}$.

Sendo $m_{D^\bullet}^i$ mono, concluímos que $\pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1} = (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$, isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo. Resumindo, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{m_{C^\bullet}^i} & C^i \\ h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow \\ D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{m_{D^\bullet}^i} & D^i \end{array}$$

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccccccccccc} C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\ h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & B^i h^\bullet \downarrow & & Z^i h^\bullet \downarrow & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\ D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1} \end{array}$$

O quadrado central é comutativo, pois $\ker d_{D^\bullet}^i \cdot (Z^i h^\bullet) j_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = h^i (\ker d_{C^\bullet}^i) j_{C^\bullet}^i \cdot \pi_{C^\bullet}^i = (\ker d_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i \cdot \pi_{D^\bullet}^i \cdot h^{i-1} = (\ker d_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i \cdot (B^i h^\bullet) \pi_{C^\bullet}^i$, com

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\ & B^i h^\bullet \downarrow & & Z^i h^\bullet \downarrow & & H^i h^\bullet \downarrow & \\ 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0 \end{array}$$

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_C^i = h^i \ker d_C^i + f^i \ker d_C^i = (\ker d_D^i) Z^i h^\bullet + (\ker d_D^i) Z^i f^\bullet = \ker d_D^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$,

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_C^i = h^i \ker d_C^i + f^i \ker d_C^i = (\ker d_D^i) Z^i h^\bullet + (\ker d_D^i) Z^i f^\bullet = \ker d_D^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_C^i = h^i \ker d_C^i + f^i \ker d_C^i = (\ker d_D^i) Z^i h^\bullet + (\ker d_D^i) Z^i f^\bullet = \ker d_D^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$. Daí, Z^i é aditivo.

$\pi_{C^\bullet}^i$ epi e $\ker d_{D^\bullet}^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{C^\bullet}^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{C^\bullet}^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_{D^\bullet}^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_{D^\bullet}^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_{C^\bullet}^i = h^i \ker d_{C^\bullet}^i + f^i \ker d_{C^\bullet}^i = (\ker d_{D^\bullet}^i)Z^i h^\bullet + (\ker d_{D^\bullet}^i)Z^i f^\bullet = \ker d_{D^\bullet}^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$. Daí, Z^i é aditivo. Analogamente, $\pi_{D^\bullet}^i(h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi_{D^\bullet}^i h^{i-1} + \pi_{D^\bullet}^i f^{i-1} = (B^i h^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i + (B^i f^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i = (B^i h^\bullet + B^i f^\bullet)\pi_{C^\bullet}^i$.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_C^i = h^i \ker d_C^i + f^i \ker d_C^i = (\ker d_D^i)Z^i h^\bullet + (\ker d_D^i)Z^i f^\bullet = \ker d_D^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$. Daí, Z^i é aditivo. Analogamente, $\pi_D^i(h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi_D^i h^{i-1} + \pi_D^i f^{i-1} = (B^i h^\bullet)\pi_C^i + (B^i f^\bullet)\pi_C^i = (B^i h^\bullet + B^i f^\bullet)\pi_C^i$. Logo, pela unicidade de $B^i(h^\bullet + f^\bullet)$, concluímos que $B^i(h^\bullet + f^\bullet) = B^i h^\bullet + B^i f^\bullet$.

π_C^i epi e $\ker d_D^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo acima e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Chamaremos H^i de ***i*-cohomologia de complexo**.

3.2.3. Lema. *Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.*

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^\bullet, f^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$. O morfismo $h^\bullet + f^\bullet$ determina, para todo i , o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\ker d_C^i} & C^i \\
 h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & Z^i(h^\bullet + f^\bullet) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\ker d_D^i} & D^i
 \end{array}$$

comutativo, onde $Z^i(h^\bullet + f^\bullet)$ é o único morfismo que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_C^i = h^i \ker d_C^i + f^i \ker d_C^i = (\ker d_D^i) Z^i h^\bullet + (\ker d_D^i) Z^i f^\bullet = \ker d_D^i (Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^\bullet + f^\bullet) = Z^i h^\bullet + Z^i f^\bullet$. Daí, Z^i é aditivo. Analogamente, $\pi_D^i(h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi_D^i h^{i-1} + \pi_D^i f^{i-1} = (B^i h^\bullet) \pi_C^i + (B^i f^\bullet) \pi_C^i = (B^i h^\bullet + B^i f^\bullet) \pi_C^i$. Logo, pela unicidade de $B^i(h^\bullet + f^\bullet)$, concluímos que $B^i(h^\bullet + f^\bullet) = B^i h^\bullet + B^i f^\bullet$. Daí, B^i é aditivo. Da unicidade do morfismo

entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$.*

entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos $\alpha_{C^\bullet}^i$ e $\beta_{C^\bullet}^i$ que fazem o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & 0 \\
 & & & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i \\
 & & & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1}
 \end{array}$$

comutativo.

entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos $\alpha_{C^\bullet}^i$ e $\beta_{C^\bullet}^i$ que fazem o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} 0 \\
 & & & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i \\
 & & & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1}
 \end{array}$$

comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas.

entre conúcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos $\alpha_{C^\bullet}^i$ e $\beta_{C^\bullet}^i$ que fazem o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} 0 \\
 & & & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i \\
 & & & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1}
 \end{array}$$

comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é functorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).

entre núcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos $\alpha_{C^\bullet}^i$ e $\beta_{C^\bullet}^i$ que fazem o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} 0 \\
 & & & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i \\
 & & & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1}
 \end{array}$$

comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é functorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).

Demonstração. Sendo $d_{C^\bullet}^i \cdot d_{C^\bullet}^{i-1} = 0$, obtemos $d_{C^\bullet}^i = \beta_{C^\bullet}^i \cdot (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})$ para um único $\beta_{C^\bullet}^i$.

entre núcleos segue a aditividade de H^i (vide (3.2.2)) ■

3.2.4. Lema. *Seja $C^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos $\alpha_{C^\bullet}^i$ e $\beta_{C^\bullet}^i$ que fazem o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_{C^\bullet}^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow \pi_{C^\bullet}^i & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i \\
 & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & 0 \\
 & & & & \downarrow d_{C^\bullet}^i & & \downarrow \beta_{C^\bullet}^i \\
 & & & & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1}
 \end{array}$$

comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é funtorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).

Demonstração. Sendo $d_{C^\bullet}^i \cdot d_{C^\bullet}^{i-1} = 0$, obtemos $d_{C^\bullet}^i = \beta_{C^\bullet}^i (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})$ para um único $\beta_{C^\bullet}^i$. De $0 = (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(d_{C^\bullet}^{i-1}) = (\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(\ker d_{C^\bullet}^i) j_{C^\bullet}^i \pi_{C^\bullet}^i$ e de $\pi_{C^\bullet}^i$ ser epi, concluímos que $(\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1})(\ker d_{C^\bullet}^i) j_{C^\bullet}^i = 0$.

Logo, existe um único α_C^i que faz o diagrama do lema comutativo.

Logo, existe um único α_C^i que faz o diagrama do lema comutativo.
Por caça em diagrama, é fácil provar que α_C^i é mono e que $\alpha_C^i = \ker \beta_C^i$.

Logo, existe um único $\alpha_{C^\bullet}^i$ que faz o diagrama do lema comutativo.

Por caça em diagrama, é fácil provar que

$\alpha_{C^\bullet}^i$ é mono e que $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 h^{i-1} \downarrow & & h^i \downarrow & & \bar{h}^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & Z^i h^\bullet \nearrow & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & \nearrow H^i h^\bullet & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & \nearrow h^i & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i & \nearrow \bar{h}^i & \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & & \\
 & & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1}
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos.

Logo, existe um único $\alpha_{C^\bullet}^i$ que faz o diagrama do lema comutativo.

Por caça em diagrama, é fácil provar que

$\alpha_{C^\bullet}^i$ é mono e que $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{C^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow h^{i-1} & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{D^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & Z^i h^\bullet \nearrow & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & \nearrow H^i h^\bullet & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{D^\bullet}^{i-1} \\
 & \nearrow h^i & D^i & & \nearrow \bar{h}^i \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{C^\bullet}^{i-1} & &
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}$ é epi.

Logo, existe um único $\alpha_{C^\bullet}^i$ que faz o diagrama do lema comutativo.

Por caça em diagrama, é fácil provar que

$\alpha_{C^\bullet}^i$ é mono e que $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{C^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow h^{i-1} & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{D^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & Z^i h^\bullet \nearrow & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & \nearrow H^i h^\bullet & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{D^\bullet}^{i-1} \\
 & \nearrow h^i & D^i & & \nearrow \bar{h}^i \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C \circ d_{C^\bullet}^{i-1} & &
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}$ é epi. Utilizando as comutatividades obtidas anteriormente, constatamos que resta provar a comutatividade da face direita no diagrama acima à direita.

Logo, existe um único $\alpha_{C^\bullet}^i$ que faz o diagrama do lema comutativo.

Por caça em diagrama, é fácil provar que

$\alpha_{C^\bullet}^i$ é mono e que $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^{i+1} \\
 \downarrow h^{i-1} & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^{i+1} \\
 & & & & & & \beta_{D^\bullet}^i
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & & \downarrow H^i h^\bullet \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & & \\
 & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & \\
 & & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^0 & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}}
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}$ é epi. Utilizando as comutatividades obtidas anteriormente, constatamos que resta provar a comutatividade da face direita no diagrama acima à direita. As comutatividades das faces de cima, de baixo, frontal, do fundo e da esquerda são já conhecidas (vide a primeira parte do lema).

Logo, existe um único $\alpha_{C^\bullet}^i$ que faz o diagrama do lema comutativo. Por caça em diagrama, é fácil provar que $\alpha_{C^\bullet}^i$ é mono e que $\alpha_{C^\bullet}^i = \ker \beta_{C^\bullet}^i$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow h^{i-1} & & \downarrow h^i & & \downarrow \bar{h}^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\beta_{D^\bullet}^i} & D^{i+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet \\
 & Z^i h^\bullet \nearrow & \downarrow \ker d_{D^\bullet}^i & & \downarrow H^i h^\bullet \\
 Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co } j_{C^\bullet}^i} & H^i C^\bullet & & \downarrow \alpha_{D^\bullet}^i \\
 \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \downarrow D^i & \xrightarrow{\text{co } d_{D^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{D^\bullet}^{i-1} \\
 & C^i \nearrow h^i & \downarrow \alpha_{C^\bullet}^i & & \downarrow \bar{h}^i \\
 C^i & \xrightarrow{\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}} & \text{Co } d_{C^\bullet}^{i-1} & &
 \end{array}$$

Para provar que o diagrama do lema é funtorial, tomemos um morfismo $h^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ entre complexos. Então o diagrama acima à esquerda é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\text{co } d_{C^\bullet}^{i-1}$ é epi. Utilizando as comutatividades obtidas anteriormente, constatamos que resta provar a comutatividade da face direita no diagrama acima à direita. As comutatividades das faces de cima, de baixo, frontal, do fundo e da esquerda são já conhecidas (vide a primeira parte do lema). A comutatividade da face direita segue da comutatividade das outras faces e de $\text{co } j_{C^\bullet}^i$ ser epi ■

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos.

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas.

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1^\bullet}^i \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3^\bullet}^{i-1} = 0$ (pois $\pi_{C_3^\bullet}^{i-1}$ e p^{j-2} são epis).

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1}^i \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$ (pois $\pi_{C_3}^{i-1}$ e p^{i-2} são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4, $\alpha_{C_1}^i = \ker \beta_{C_1}^i$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1}^i \Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$.

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1}^i \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$ (pois $\pi_{C_3}^{i-1}$ e p^{i-2} são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4, $\alpha_{C_1}^i = \ker \beta_{C_1}^i$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1}^i \Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono, concluímos que $\Delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$.

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1}^i \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$ (pois $\pi_{C_3}^{i-1}$ e p^{i-2} são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4, $\alpha_{C_1}^i = \ker \beta_{C_1}^i$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1}^i \Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono, concluímos que $\Delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$. Assim, obtemos $\delta_E^{i-1} : H^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$ tal que $\Delta^{i-1} = \delta_E^{i-1} (\text{co} j_{C_3}^{i-1})$ (vide o diagrama (3.3.1) abaixo à direita;

3.3. Sequência longa exata. Seja $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$ uma sequência exata de complexos. Pelo Lema 2.22 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo (3.3.1) abaixo à esquerda com linhas exatas. Usando a definição (2.22.2) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1}^i \cdot \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$ (pois $\pi_{C_3}^{i-1}$ e p^{i-2} são epis). Sendo, pelo Lema 3.2.4, $\alpha_{C_1}^i = \ker \beta_{C_1}^i$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1}^i \cdot \Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono, concluímos que $\Delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$. Assim, obtemos $\delta_E^{i-1} : H^{i-1} C_3^\bullet \rightarrow H^i C_1^\bullet$ tal que $\Delta^{i-1} = \delta_E^{i-1} (\text{co} j_{C_3}^{i-1})$ (vide o diagrama (3.3.1) abaixo à direita; note que δ_E^{i-1} é o único morfismo que faz este diagrama comutativo).

(3.3.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & C_2^{i-2} & \xrightarrow{p^{i-2}} & C_3^{i-2} & \longrightarrow & 0 \\
& & \pi_{C_2^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \pi_{C_3^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \\
& & B^{i-1} & \xrightarrow{p^{i-1}} & B^{i-1} & & C_3^\bullet \\
& & j_{C_2^\bullet}^{i-1} \downarrow & & j_{C_3^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta^{i-1}} \\
& & \ker d_{C_1^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_2^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_3^\bullet}^{i-1} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_1^{i-1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i-1}} & C_2^{i-1} & \xrightarrow{p^{i-1}} & C_3^{i-1} \longrightarrow 0 \\
& & d_{C_1^\bullet}^{i-1} \downarrow & & d_{C_2^\bullet}^{i-1} \downarrow & & d_{C_3^\bullet}^{i-1} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_1^i & \xrightarrow{\varepsilon^i} & C_2^i & \xrightarrow{p^i} & C_3^i \longrightarrow 0 \\
& & \text{co } d_{C_1^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_2^\bullet}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_3^\bullet}^{i-1} \downarrow \\
& \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2^\bullet}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{p}^i} & \text{Co } d_{C_3^\bullet}^{i-1} \longrightarrow 0 \\
& & \beta_{C_1^\bullet}^i \downarrow & & \beta_{C_2^\bullet}^i \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_1^{i+1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i+1}} & C_2^{i+1} & &
\end{array}$$

(3.3.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_2^{i-2} & \xrightarrow{p^{i-2}} & C_3^{i-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \pi_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \pi_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\
 & & B^{i-1} C_2 & \xrightarrow{B^{i-1} p} & B^{i-1} C_3 & & \\
 & & j_{C_2}^{i-1} \downarrow & & j_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^{i-1} C_1 & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon} & Z^{i-1} C_2 & \xrightarrow{Z^{i-1} p} & Z^{i-1} C_3 \xrightarrow{\delta^{i-1}} \\
 \ker d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \ker d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1^{i-1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i-1}} & C_2^{i-1} & \xrightarrow{p^{i-1}} & C_3^{i-1} \longrightarrow 0 \\
 d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1^i & \xrightarrow{\varepsilon^i} & C_2^i & \xrightarrow{p^i} & C_3^i \longrightarrow 0 \\
 \text{co } d_{C_1}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \text{co } d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\
 \delta^{i-1} & \longrightarrow & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{p}^i} & \text{Co } d_{C_3}^{i-1} \longrightarrow 0 \\
 \beta_{C_1}^i \downarrow & & \beta_{C_2}^i \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1^{i+1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i+1}} & C_2^{i+1} & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta^{i-1} E} & H^i C_1 \\
 \uparrow \text{co } j_{C_3}^{i-1} & \nearrow \Delta^{i-1} & \downarrow \alpha_{C_1}^i \\
 Z^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} \\
 \uparrow j_{C_3}^{i-1} & & \downarrow \beta_{C_1}^i \\
 B^{i-1} C_3 & & C_1^{i+1}
 \end{array}$$

Mostremos que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata.

Mostremos que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} & H^i C_2^\bullet \\
 & \text{co } j_{C_1}^{i-1} \uparrow & & & \text{co } j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow & & \alpha_{C_2}^i \downarrow \\
 & & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & C_0 d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & C_0 d_{C_2}^{i-1} \\
 & & & & j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & & & \\
 & & & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{B^{i-1} p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & \rightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

onde a sequência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-sequência (2.22.1) e as colunas são exatas.

Mostremos que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} & H^i C_2^\bullet \\
 & & \uparrow \text{co } j_{C_1}^{i-1} & & \uparrow \text{co } j_{C_2}^{i-1} & & \uparrow \text{co } j_{C_3}^{i-1} & & \downarrow \alpha_{C_1}^i & & \downarrow \alpha_{C_2}^i \\
 & & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & C_0 d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & C_0 d_{C_2}^{i-1} \\
 & & & & \uparrow j_{C_2}^{i-1} & & \uparrow j_{C_3}^{i-1} & & & & \\
 & & & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{B^{i-1} p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & \rightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

onde a sequência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-sequência (2.22.1) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata.

Mostremos que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} & H^i C_2^\bullet \\
 & \text{co } j_{C_1}^{i-1} \uparrow & & & \text{co } j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow & & \alpha_{C_2}^i \downarrow \\
 & & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & C_0 d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & C_0 d_{C_2}^{i-1} \\
 & & & & j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & & & \\
 & & & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{B^{i-1} p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & \rightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

onde a sequência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-sequência (2.22.1) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata. Com efeito, $(B^{i-1} p^\bullet) \pi_{C_2}^{i-1} = \pi_{C_3}^{i-1} p^{i-2}$ (vide o segundo quadrado comutativo em (3.2.1)).

Mostremos que a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} & H^i C_2^\bullet \\
 & \text{co } j_{C_1}^{i-1} \uparrow & & & \text{co } j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow & & \alpha_{C_2}^i \downarrow \\
 & & Z^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} \varepsilon^\bullet} & Z^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{Z^{i-1} p^\bullet} & Z^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & C_0 d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & C_0 d_{C_2}^{i-1} \\
 & & & & j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & & & \\
 & & & & B^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{B^{i-1} p^\bullet} & B^{i-1} C_3^\bullet & \rightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

onde a seqüência na segunda linha é exata pela exatidão de Ker-Coker-seqüência (2.22.1) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata. Com efeito, $(B^{i-1} p^\bullet) \pi_{C_2}^{i-1} = \pi_{C_3}^{i-1} p^{i-2}$ (vide o segundo quadrado comutativo em (3.2.1)). Sendo $B^{i-1} p^\bullet$ divisor à esquerda de um epimorfismo, ele é epi. Por caça usual em diagrama, podemos provar que a primeira linha do diagrama é exata nos termos $H^{i-1} C_2^\bullet$, $H^{i-1} C_3^\bullet$ e $H^i C_1^\bullet$.

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana.

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\text{Esc } \mathcal{C}$, cujos objetos são seqüências curtas exatas de complexos

$$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0, \text{ com } C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C},$$

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\text{Esc } \mathcal{C}$, cujos objetos são seqüências curtas exatas de complexos

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$, com $C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$, e cujos morfismos são dados por diagramas comutativos do tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 E : & 0 & \rightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \rightarrow & 0 \\
 & h \downarrow & & h_1^\bullet \downarrow & & h_2^\bullet \downarrow & & h_3^\bullet \downarrow & & \\
 E' : & 0 & \rightarrow & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\text{Esc } \mathcal{C}$, cujos objetos são seqüências curtas exatas de complexos

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$, com $C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$, e cujos morfismos são dados por diagramas comutativos do tipo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 E : & 0 & \longrightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow h_1^\bullet & & \downarrow h_2^\bullet & & \downarrow h_3^\bullet & & \\
 & & & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow h & & & & & & \\
 E' : & 0 & \longrightarrow & C_1'^\bullet & \longrightarrow & C_2'^\bullet & \longrightarrow & C_3'^\bullet & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Obviamente, temos três funtores

$F_k : \text{Esc } \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}^* \mathcal{C}$, $k = 1, 2, 3$, onde,

para $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$,

definimos $F_k E = C_k^\bullet$.

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\text{Esc } \mathcal{C}$, cujos objetos são seqüências curtas exatas de complexos

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$, com $C_1^\bullet, C_2^\bullet, C_3^\bullet \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$, e cujos morfismos são dados por diagramas comutativos do tipo

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \rightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \rightarrow & 0 \\ & h \downarrow & & h_1^\bullet \downarrow & & h_2^\bullet \downarrow & & h_3^\bullet \downarrow & & \\ & E' : & 0 & \rightarrow & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Obviamente, temos três funtores

$F_k : \text{Esc } \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}^* \mathcal{C}$, $k = 1, 2, 3$, onde, para $E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \rightarrow C_2^\bullet \rightarrow C_3^\bullet \rightarrow 0$, definimos $F_k E = C_k^\bullet$.

$$\begin{array}{ccc} H^i C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^i} & H^{i+1} C_1^\bullet \\ H^i h_3^\bullet \downarrow & & \downarrow H^{i+1} h_1^\bullet \\ H^i C_3'^\bullet & \xrightarrow{\delta_{E'}^i} & H^{i+1} C_1'^\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Co } d_{C_1^\bullet}^i & \xleftarrow{\alpha_{C_1^\bullet}^{i+1}} & H^{i+1} C_1^\bullet \\ & \delta^i \nearrow & \downarrow \bar{h}_1 & \text{co } j_{C_3^\bullet}^i & \delta_E^i \nearrow \\ Z^i C_3^\bullet & \xrightarrow{\quad} & H^i C_3^\bullet & & H^{i+1} C_1^\bullet \\ & \delta^{i'} \nearrow & \downarrow H^i h_3 & \alpha_{C_1'^\bullet}^{i+1} & \downarrow H^{i+1} h_1 \\ Z^i C_3'^\bullet & \xrightarrow{\quad} & H^i C_3'^\bullet & \xleftarrow{\quad} & H^{i+1} C_1'^\bullet \\ & \text{co } j_{C_3'^\bullet}^i & & & \delta_{E'}^i \nearrow \end{array}$$

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^1 e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\text{co}j_{C_3}^i$ epi e sendo $\alpha_{C_1}^{i+1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\text{co}j_{C_3}^i$ epi e sendo $\alpha_{C_1}^{i+1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

3.4. Homotopias.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\text{co}j_{C_3}^i$ epi e sendo $\alpha_{C_1}^{i+1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

3.4. Homotopias. No exemplo introdutório 3.1, vimos como uma homotopia de funções contínuas entre espaços topológicos se transformou para uma homotopia entre os complexos S_{\bullet} de simplexes singulares.

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\text{co}j_{C_{\bullet}^3}$ epi e sendo $\alpha_{C_{\bullet}^1}^{i+1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

3.4. Homotopias. No exemplo introdutório 3.1, vimos como uma homotopia de funções contínuas entre espaços topológicos se transformou para uma homotopia entre os complexos S_{\bullet} de simplexes singulares.

3.4.1. Definição. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana e sejam $C_{\bullet}, D_{\bullet} \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ complexos.

$$\begin{array}{ccc}
 & C^i & \xrightarrow{d_{C_{\bullet}}^i} & C^{i+1} \\
 & \swarrow h^i & \downarrow f^i - g^i & \searrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D_{\bullet}}^{i-1}} & D^i &
 \end{array}$$

Vamos mostrar que o δ_{\bullet}^i obtido acima define uma transformação natural $\delta_{\bullet}^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado acima à esquerda é comutativo. De fato, este quadrado é a face direita do cubo acima à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_{\bullet}^i e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e do fundo já são conhecidas. Pela Observação 2.23, temos a comutatividade da face esquerda. Sendo $\text{co}j_{C_{\bullet}^3}$ epi e sendo $\alpha_{C_1^i}^{i+1}$ mono, pela comutatividade destas cinco faces obtemos a comutatividade da face direita.

3.4. Homotopias. No exemplo introdutório 3.1, vimos que uma homotopia de funções contínuas entre espaços topológicos se transformou para uma homotopia entre os complexos S_{\bullet} de simplexes singulares.

3.4.1. Definição. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana e sejam $C_{\bullet}, D_{\bullet} \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ complexos. Dizemos que morfismos $f_{\bullet}, g_{\bullet} : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$ são **homotópicos** se existe uma coleção de morfismos $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ em \mathcal{C} , chamada **homotopia** (os morfismos h^i 's não precisam comutar com d), tais que $f^i - g^i = d_{D_{\bullet}}^{i-1} h^i + h^{i+1} d_{C_{\bullet}}^i$ para todo i .

$$\begin{array}{ccc}
 & C^i & \xrightarrow{d_{C_{\bullet}}^i} & C^{i+1} \\
 & \swarrow h^i & \downarrow & \searrow h^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D_{\bullet}}^{i-1}} & D^i & \\
 & \swarrow f^i - g^i & &
 \end{array}$$

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$
(os índices se sabem).

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$
(os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um **“ideal”**, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo).

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo). Pela hipótese, $f^i = h^{i+1}d_C^i + d_D^{i-1}h^i$.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo). Pela hipótese, $f^i = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i$. Logo,

$$f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i(\ker d_{C^\bullet}^i) + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i).$$

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo). Pela hipótese, $f^i = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i$. Logo,
 $f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i(\ker d_{C^\bullet}^i) + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Sendo $Z^i f^\bullet$ o único morfismo que faz a comutatividade $f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)(Z^i f^\bullet)$, concluímos que $Z^i f^\bullet = j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo).

Pela hipótese, $f^i = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i$. Logo,

$$f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i(\ker d_{C^\bullet}^i) + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) =$$

$(\ker d_{D^\bullet}^i)j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Sendo $Z^i f^\bullet$ o único morfismo que faz a

comutatividade $f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)(Z^i f^\bullet)$, concluímos que

$Z^i f^\bullet = j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Obtemos o diagrama comutativo abaixo à

direita, onde $\varphi = \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$.

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo).

Pela hipótese, $f^i = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i$. Logo,

$$f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = h^{i+1}d_{C^\bullet}^i(\ker d_{C^\bullet}^i) + d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = d_{D^\bullet}^{i-1}h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) =$$

$(\ker d_{D^\bullet}^i)j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Sendo $Z^i f^\bullet$ o único morfismo que faz a

comutatividade $f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)(Z^i f^\bullet)$, concluímos que

$Z^i f^\bullet = j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Obtemos o diagrama comutativo abaixo à

direita, onde $\varphi = \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Agora,

$$(H^i f^\bullet)(\text{co}j_{C^\bullet}^i) = (\text{co}j_{D^\bullet}^i)j_{D^\bullet}^i \varphi = 0.$$

Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem).

Denotamos $f^\bullet \sim g^\bullet$ se f^\bullet e g^\bullet forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos a zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

3.4.2. Lema. *Se $f^\bullet, g^\bullet: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ são homotópicos, então $H^i f^\bullet = H^i g^\bullet$ para todo i .*

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama abaixo à esquerda (que não é necessariamente comutativo).

Pela hipótese, $f^i = h^{i+1} d_{C^\bullet}^i + d_{D^\bullet}^{i-1} h^i$. Logo,

$$f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = h^{i+1} d_{C^\bullet}^i(\ker d_{C^\bullet}^i) + d_{D^\bullet}^{i-1} h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = d_{D^\bullet}^{i-1} h^i(\ker d_{C^\bullet}^i) =$$

$(\ker d_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Sendo $Z^i f^\bullet$ o único morfismo que faz a

comutatividade $f^i(\ker d_{C^\bullet}^i) = (\ker d_{D^\bullet}^i)(Z^i f^\bullet)$, concluímos que

$Z^i f^\bullet = j_{D^\bullet}^i \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Obtemos o diagrama comutativo abaixo à

direita, onde $\varphi = \pi_{D^\bullet}^i h^i(\ker d_{C^\bullet}^i)$. Agora,

$(H^i f^\bullet)(\text{co}j_{C^\bullet}^i) = (\text{co}j_{D^\bullet}^i) j_{D^\bullet}^i \varphi = 0$. Sendo $\text{co}j_{C^\bullet}^i$ epi, $H^i f^\bullet = 0$. ■

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_{C^\bullet}^i \uparrow & & \downarrow \ker d_{C^\bullet}^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_{C^\bullet}^i} & C^{i+1} \\
 f^{i-1} \downarrow & \nearrow h^i & f^i \downarrow & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_{D^\bullet}^i} & D^{i+1} \\
 \pi_{D^\bullet}^i \downarrow & & \uparrow \ker d_{D^\bullet}^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & B^i f^\bullet \downarrow & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_{D^\bullet}^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_{D^\bullet}^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

φ (diagonal arrow from $B^i C^\bullet$ to $B^i D^\bullet$)

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f^\bullet & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$$\mathbf{K}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f^\bullet & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $K^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$K^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor “canônico de quociente” $\pi : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow K^* \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f & & \downarrow Z^i f & & \downarrow H^i f & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $K^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$K^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \text{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor “canônico de quociente” $\pi : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow K^* \mathcal{C}$. (Note que $K^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f^\bullet & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$\mathbf{K}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathbf{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor “canônico de quociente” $\pi : \mathbf{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{K}^* \mathcal{C}$. (Note que $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por $\mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$ a subcategoria completa de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos.

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f^\bullet & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$\mathbf{K}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathbf{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor “canônico de quociente” $\pi : \mathbf{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{K}^* \mathcal{C}$. (Note que $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por $\mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$ a subcategoria completa de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos. Assim, para qualquer $C^\bullet \in \mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$, obtemos $B^\bullet C^\bullet, Z^\bullet C^\bullet, H^\bullet C^\bullet \in \mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
 B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & & \\
 \pi_C^i \uparrow & & \downarrow \ker d_C^i & & \\
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\
 D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\
 \pi_D^i \downarrow & & \uparrow \ker d_D^i & & \\
 B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & B^i C^\bullet & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^\bullet & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow B^i f^\bullet & & \downarrow Z^i f^\bullet & & \downarrow H^i f^\bullet & \\
 & & \nearrow \varphi & & & & \\
 0 \rightarrow & B^i D^\bullet & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\bullet & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^\bullet & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Fazendo um “quociente” pelo “ideal” da Definição 3.4.1, obtemos a categoria $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é,

$\mathbf{K}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathbf{Kom}^* \mathcal{C}(C^\bullet, D^\bullet) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor “canônico de quociente” $\pi : \mathbf{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{K}^* \mathcal{C}$. (Note que $\mathbf{K}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por $\mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$ a subcategoria completa de $\mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$ formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos. Assim, para qualquer $C^\bullet \in \mathbf{Kom}^* \mathcal{C}$, obtemos $B^\bullet C^\bullet, Z^\bullet C^\bullet, H^\bullet C^\bullet \in \mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$ e podemos considerar B^\bullet, Z^\bullet e H^\bullet como funtores, $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \mathbf{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Kom}_0^* \mathcal{C}$.

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana.*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{K}^* \mathcal{C} \\ \mathbf{H}^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \mathrm{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbf{I}} & \mathrm{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a sequência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \text{K}^* \mathcal{C} \\
 H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\
 \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C}
 \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a sequência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$. O functor H^\bullet passa por $K^* \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\
 H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\
 \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C}
 \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a sequência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

O functor H^\bullet passa por $K^ \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma sequência curta exata de complexos,

$$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\ H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a seqüência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

O functor H^\bullet passa por $K^ \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\ H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma seqüência curta exata de complexos,

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$. Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata,

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a seqüência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

O functor H^\bullet passa por $K^ \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma seqüência curta exata de complexos,

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$. Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata, onde, para todo i , δ^i é uma transformação natural.

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\ H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a seqüência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

O functor H^\bullet passa por $K^ \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\ H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma seqüência curta exata de complexos,

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$. Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata, onde, para todo i , δ_i^i é uma transformação natural. Isto significa que, para qualquer morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc} \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 \rightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet \rightarrow 0 \\ & & \downarrow h_1^\bullet & & \downarrow h_2^\bullet & & \downarrow h_3^\bullet \\ h \downarrow & & & & & & \\ E' : & 0 \rightarrow & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet \rightarrow 0 \end{array}$$

3.5. Teorema. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^\bullet, Z^\bullet, H^\bullet : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a seqüência exata $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow H^\bullet \rightarrow 0$.*

O functor H^\bullet passa por $K^ \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um functor aditivo e I é a inclusão.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}^* \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & K^* \mathcal{C} \\ H^\bullet \downarrow & \nearrow h & \\ \text{Kom}_0^* \mathcal{C} & \xrightarrow{I} & \text{Kom}^* \mathcal{C} \end{array}$$

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma seqüência curta exata de complexos,

$E : 0 \rightarrow C_1^\bullet \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} C_2^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C_3^\bullet \rightarrow 0$. Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} H^{i-1} C_2^\bullet \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} H^{i-1} C_3^\bullet \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1^\bullet \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} \dots$$

é exata, onde, para todo i , δ_E^i é uma transformação natural. Isto significa que, para qualquer morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc} \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & C_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon^\bullet} & C_2^\bullet & \xrightarrow{p^\bullet} & C_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ h \downarrow & & & h_1^\bullet \downarrow & & h_2^\bullet \downarrow & & h_3^\bullet \downarrow & & \\ E' : & 0 & \longrightarrow & C_1'^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon'^\bullet} & C_2'^\bullet & \xrightarrow{p'^\bullet} & C_3'^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} & H^{i-1} C_1^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon^\bullet} & H^{i-1} C_2^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p^\bullet} & H^{i-1} C_3^\bullet & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon^\bullet} & \dots \\
 & & \downarrow H^{i-1} h_1^\bullet & & \downarrow H^{i-1} h_2^\bullet & & \downarrow H^{i-1} h_3^\bullet & & \downarrow H^i h_1^\bullet & & \\
 \dots & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-2}} & H^{i-1} C_1'^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon'^\bullet} & H^{i-1} C_2'^\bullet & \xrightarrow{H^{i-1} p'^\bullet} & H^{i-1} C_3'^\bullet & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-1}} & H^i C_1'^\bullet & \xrightarrow{H^i \varepsilon'^\bullet} & \dots
 \end{array}$$

é comutativo ■

Exercícios