FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Alexandre Ananin e Silvio de Alencastro Pregnolatto

À Guisa de Prefácio

Poderia parecer uma temeridade tentarmos apresentar ao público mais um livro-texto de Análise Complexa. Assim, devemos nossas desculpas e uma explicação ao leitor.

Nos livros-textos para Graduação o conceito de homotopia de caminhos é pouco tratado, o que cria uma lacuna na compreensão do assunto. O tema não é novidade e já era hora de apresentá-lo em um curso básico. Por outro lado, a grande maioria dos textos utiliza o Teorema de Jordan, sem demonstração. Entretanto, nas aplicações habituais não é necessária toda a sua potência que se justificaria para curvas arbitrárias. Na verdade, o que se usa é a visualização de que uma curva simples fechada divide o plano em duas regiões. Por estas razões, incluímos o primeiro e excluímos o segundo.

A definição usual de função analítica, em termos de derivada, não transmite ao estudante, como ocorreu no caso dos autores,[1] a verdadeira característica dessa função, ou seja, a sua essência. Esperamos que a definição, apresentada neste texto, de função cuja integral é invariante em relação à homotopia de caminhos, dê ao estudante, logo ao entrar em contato com o conceito, a idéia adequada de sua natureza e importância. Essa decisão provocou uma alteração na ordem de exposição. E, não só: a preparação é bem mais volumosa abrangendo questões topológicas e de integração, as quais não são exclusivas da Análise Complexa.[2] A passada lenta no início da caminhada conduz a uma maior rapidez no percurso.

Da mesma forma que no livro de J. Conway[3] exige-se, do leitor deste, apenas conhecimentos básicos de limites, continuidade, derivação e integração de funções de uma variável real.

Desconsiderando-se o último Capítulo "Exemplos de Aplicação", o texto abrange o conteúdo essencial dessa disciplina, obedecendo as ementas consagradas nos programas das Universidades Brasileiras, e pode ser apresentado em cursos de um semestre, seguindo-se a ordem sugerida. Entretanto, e esse é nosso conselho, o profissional, ou o estudante mais experiente, poderá lê-lo a partir do último capítulo, buscando nos demais apenas a teoria e a fundamentação necessárias à compreensão.

O livro ideal ensina a pensar ... Embora longe de pretender atingir esse ideal, tivemos em mente essa orientação. Apenas o leitor poderá dizer se nossa tentativa teve ou não êxito.

O espírito de qualquer disciplina matemática reside nas idéias que buscam explicar e elucidar o objeto do estudo. Assim, consideramos ser uma boa prática a de preceder as demonstrações rigorosas com considerações preliminares, informais, discutindo os conceitos envolvidos.[4] Procuramos, ao longo do texto, seguir tal preceito. Desta maneira, o leitor poderá constatar que o presente livro não é uma sucessão de receitas. Seu estudo será bem sucedido se for um estudo ativo: as pequenas lacunas em demonstrações e as perguntas no texto deverão ser preenchidas e respondidas pelo estudante.

---

[1] Por que a derivada real não tem as ricas consequências da complexa?

[2] O resultado mais visível é que a definição de função analítica só aparece na página 48.

[3] "This book is intended as a textbook for a first course in the theory of functions of one complex variable for students who are mathematically mature enough to understand and execute ε-δ arguments," J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics **11**, `Springer-Verlag`, 1978.

[4] A seguinte anedota, contada pelo Prof. I. M. Gelfand em seu seminário, é ilustrativa:
Dois amigos, um dos quais cego, estão num bar. O que vê pergunta ao cego:
"Você quer café com leite?" — O que é leite?
"É um líquido branco." — O que é branco?
"É a cor da garça." — Garça??
"Sim, aquela ave com pescoço comprido, assim como este braço. Apalpe para perceber."
Falando isto colocou o cotovelo sobre a mesa, dobrou o punho, imitando o pescoço e a cabeça da garça. O cego apalpou e exclamou: — Já sei o que é café com leite!

Os exercícios sugeridos objetivam contribuir para consolidar os conceitos e são em número que consideramos um mínimo para todo estudante. Há excelentes livros de exercícios que devem ser consultados.

O Capítulo **0**, como o próprio número, se introduz à ordem natural. Se 0 (zero) fosse natural, o Capítulo **0** também o seria e preencheria possíveis lacunas na manipulação da Teoria de Conjuntos.

Já o Capítulo **1** é uma "recordação" do segundo grau, onde se acentua a utilização que se fará, no texto, dos números complexos.

Os Capítulos **2** e **3** abordam conceitos topológicos e de integração (para funções de várias variáveis reais) com ênfase em demonstrações que visam familiarizar o leitor com o assunto.

O Capítulo **4** marca exatamente o início do tratamento do tema do livro: a Homotopia.

No Capítulo **5**, encontramos, enfim, a definição e as primeiras propriedades da função holomorfa.

As séries (de potências), sua convergência uniforme, suas relações com as funções holomorfas (inclusive a Fórmula de Cauchy), constituem o conteúdo do Capítulo **6**.

O Capítulo **7** é dedicado à derivação complexa e às equações de Cauchy-Riemann.

No Capítulo **8** apresentamos os teoremas principais do curso.

Finalmente, o Capítulo **9** foi planejado como uma coleção de "pérolas" de aplicações da Teoria de Variável Complexa. Destacamos dentre elas as transformações conformes e a integração real através da variável complexa. Certamente, o leitor não encontrará muitas das atraentes aplicações da Teoria, e isso para não nos afastarmos da concepção inicial do texto e porque, ao fim e ao cabo, percebemos que era inescapável o ponto final$\bullet$

O núcleo do livro são as notas de aula do curso MA044 (Matemática IV: Análise de Uma Variável Complexa), noturno, ministrado na UNICAMP em 1998. Assim, cabe aqui um agradecimento aos alunos que assistiram pacientemente ao curso.

Não podemos deixar de externar nosso reconhecimento agradecido a Yuri Bozhkov, um dos iniciadores e incentivadores do projeto, a Marcelo Muniz e a Rodney Carlos Bassanezi pelas valiosas sugestões e críticas que muito enriqueceram o livro apresentado.

Agradecemos ao João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Joni) por sua existência, embora seja um matemático (pessoa, etc.) de primeira.

20 de dezembro de 2000, Campinas *Alexandre Ananin e Silvio de Alencastro Pregnolatto*

Batize o Bicho Papão para domesticá-lo
Sabedoria infantil

0. Em vez de toda a Teoria de Conjuntos ...

Não é nossa intenção amargurar, logo de início, a vida do leitor inocente, mas devemos advertir que trataremos todos os tipos de conjuntos, inclusive os infinitos e os não-enumeráveis. Em particular, poderão ser não-enumeráveis os conjuntos de índices que se atribuem a famílias de conjuntos. No entanto, nisso não há nada temível ou difícil. É apenas uma questão de se habituar.

Assim, veremos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, incluindo o zero, $0 \in \mathbb{N}$; o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros; o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais; o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Destes conjuntos citados, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos e enumeráveis, no sentido que têm a mesma "quantidade" de elementos (= cardinalidade) que $\mathbb{N}$. O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável. Dentre os conjuntos infinitos, os enumeráveis são os "menores": eles têm a menor cardinalidade.

Seja A_i, $i \in I$, uma família (possivelmente não enumerável) de subconjuntos de um conjunto dado X. A união da família, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, é o conjunto formado por todos os elementos de X que pertencem a pelo menos um dos membros da família. Em notação simbólica, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I\ x \in A_i\}$. Analogamente, definimos a interseção da família como $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I\ x \in A_i\}$, isto é, o conjunto formado por todos os elementos de X que pertencem a todos os A_i, simultaneamente. (Pode ser que não exista nenhum elemento com esta propriedade; neste caso, chegamos ao conjunto vazio $\varnothing$, sem elementos.)

Como lidar com essas (e outras) definições? Pura e simplesmente através de raciocínio lógico elementar. Demonstremos, para exemplificar, a fórmula dos complementos:

$$X \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i).$$

Para mostrar a igualdade de dois conjuntos, normalmente verificamos a dupla inclusão: que o primeiro conjunto está incluído no segundo e que o segundo está incluído no primeiro.

No caso, iremos provar as inclusões $X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$ e $X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) \supset \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$. Para verificarmos a primeira, tomemos um elemento $x \in X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big)$ qualquer, isto é, $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, e provemos que $x \in \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$. De $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ segue, pela definição da união de família de conjuntos, que $\forall i \in I$ $x \notin A_i$, ou seja, $\forall i \in I\ x \in X \setminus A_i$. Pela definição da interseção de família de conjuntos, constatamos $x \in \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$. Quanto à segunda, tomemos um elemento $x \in \bigcap\limits_{i\in I}(X \setminus A_i)$ qualquer. Temos $\forall i \in I$ $x \notin A_i$. Portanto, x não pertence à união, $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ e, assim, $x \in X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big)$. A demonstração está completa.

Da mesma maneira, podemos provar as fórmulas:

$$X \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i), \qquad A \cap \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i), \qquad A \cup \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i).$$

Seja dada uma família de conjuntos $A_i \subset X$, $i \in I$. Qualquer subconjunto $I' \subset I$ determina uma nova família A_i, $i \in I'$, chamada subfamília da original. Podemos considerar também uma família de subfamílias. Formalmente, seja $I_j \subset I$, $j \in J$, uma família de subconjuntos de índices que induzirá a família com índices $j \in J$, cujo j-ésimo membro é a família A_i, $i \in I_j$. Fazendo $I' = \bigcup_{j\in J} I_j$, obtemos as fórmulas:

$$\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in I_j} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I'} A_i, \qquad \bigcap_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I_j} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I'} A_i.$$

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre conjuntos e sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$, dois subconjuntos. Definimos $f(A)$, *imagem* de A, como $f(A) = \big\{f(x) \mid x \in A\big\}$. Obviamente, $f(A) \subset Y$. Definimos $f^{-1}(B)$, *pré-imagem* ou *imagem inversa* de B, pela fórmula $f^{-1}(B) = \big\{x \in X \mid f(x) \in B\big\}$. Temos $f^{-1}(B) \subset X$. Para famílias de subconjuntos $A_i \subset X$, $i \in I$, e $B_j \subset Y$, $j \in J$, são válidas as seguintes fórmulas:

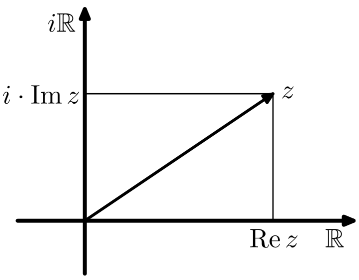
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j), \qquad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

O leitor não experiente nessa matéria pode considerar todas as fórmulas apresentadas acima (e outras semelhantes que encontrará nos proximos capítulos) como exercícios de demonstrações. Enquanto isso, tente a seguinte demonstração (não-vazia): todos os conjuntos vazios são iguais.

As coisas mais úteis possível são as imaginárias

1. Aritmética e Geometria Elementares dos Números Complexos



Qualquer definição formal não reflete a natureza do objeto. Mesmo assim, introduzimos os números complexos dizendo que um *número complexo* z é uma expressão formal do tipo $z = a+ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são números reais e i é a assim chamada *unidade imaginária.* Por definição, dois números complexos $a+ib$ e $c+id$ são iguais se e só se $a = c$ e $b = d$. Qualquer número real pode ser visto como um número complexo: $a = a + i \cdot 0$. Vamos também escrever ib no lugar de $0 + ib$ e i no lugar de $i \cdot 1$.

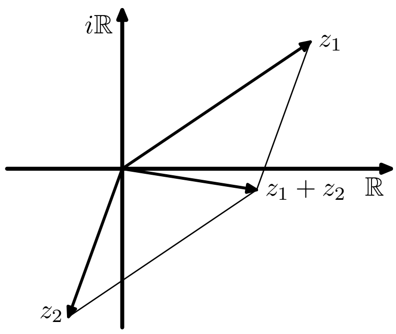
Para $z = a + ib$, designamos respectivamente $a = \operatorname{Re} z$ e $b = \operatorname{Im} z$, as *partes real* e *imaginária* de z.

Embora todo número complexo seja formado por dois números reais, pensaremos em número complexo como uma entidade.

A *adição* de números complexos pode ser obtida usando a adição dos reais:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

É facil verificar que a adição é comutativa e associativa; que existe um elemento neutro da adição $0 = 0 + i \cdot 0$; que cada número complexo $z = a + ib$ tem um oposto $-z = (-a) + i(-b)$ em relação à adição, isto é, $z + (-z) = 0$. Podemos definir a subtração de números complexos como $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ ou $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$. Observemos que a adição e a subtração de números complexos aplicadas aos números reais (complexos com a parte imaginária nula) induzem os resultados conhecidos.



Representando os números complexos como pontos do plano $\mathbb{R}^2$, vemos que a adição é simplesmente a adição de vetores e geometricamente pode ser realizada pela conhecida regra do paralelogramo.

Então trataremos os números complexos como pontos do *plano complexo* $\mathbb{C}$ munido dos *eixos real* e *imaginário,* $\mathbb{R}$ e $i\mathbb{R}$.

A multiplicação de números complexos é uma aplicação da multiplicação de binômios com coeficientes reais, observando-se apenas que, por definição,

$$i \cdot i = -1.$$

Isto implica a fórmula para a multiplicação:

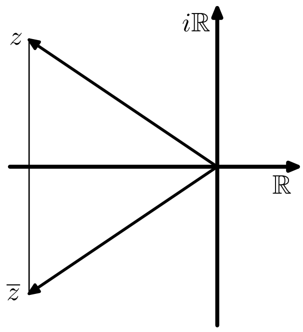
$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Uma verificação direta mostra que a multiplicação de números complexos, definida por essa regra, é comutativa e associativa, possui um elemento neutro 1, e que a adição é distributiva relativamente à multiplicação. Obviamente, o produto dos números reais considerados como complexos é o usual. Ainda mais, para multiplicar um número complexo por um número real é necessário apenas multiplicar as partes real e imaginária do número complexo pelo número real.

O *complexo conjugado* de $z = a + ib$ é, por definição, $\overline{z} = a - ib$. É claro que

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Geometricamente, $\overline{z}$ é a imagem de z refletida no eixo real (imagem especular[5]). Portanto, um número complexo z é real se e só se $\overline{z} = z$. A *conjugação* (operação que fornece o conjugado de um número complexo) preserva as operações de adição, subtração e multiplicação:



$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2.$$

Você comprovou? Insistimos, caro leitor, que é importante você verificar todas as afirmações do texto que não estejam claras.[6] Estamos certos de que tal verificação não gastará mais de 20 folhas.

O número $N(z) = z \cdot \overline{z}$ chama-se *norma* do número complexo $z = a + ib$. Como $N(z) = z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, a norma é um número real não-negativo. Além disso, teremos $N(z) = 0$ se, e só se, $z = 0$. Portanto, se $z \neq 0$, então faz sentido escrever $\dfrac{1}{N(z)} \in \mathbb{R}$ e obtemos $z \cdot \left(\overline{z} \cdot \dfrac{1}{N(z)}\right) = 1$. Em outras palavras, todo número complexo não-nulo possui inverso em relação à multiplicação:

$$z^{-1} = \frac{1}{N(z)} \cdot \overline{z}, \qquad z \cdot z^{-1} = 1.$$

Uma vez conhecido o inverso, podemos definir, pelas relações abaixo, a divisão de um número complexo por um número complexo não-nulo:

$$z_1/z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{N(z_2)} \cdot z_1 \cdot \overline{z}_2.$$

Evidentemente, a relação $(z_1/z_2) \cdot z_2 = z_1$ é obedecida.

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número complexo $z = a + ib$ é $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Note que este conceito de valor absoluto é uma extensão de noção do valor absoluto de números reais.) O valor absoluto de z é um número real não-negativo que descreve a distância do ponto z à origem 0. Consequentemente, a distância entre os pontos z_1 e z_2 é igual a $|z_1 - z_2|$.

Como a conjugação preserva a multiplicação, então $N(z_1 \cdot z_2) = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = N(z_1) \cdot N(z_2)$. Daí podemos concluir que a norma e, portanto, o módulo (como a conjugação) são multiplicativos, isto é,

$$N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2), \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Aplicando esta propriedade à igualdade $(z_1/z_2) \cdot z_2 = z_1$ (onde $z_2 \neq 0$), concluímos que

$$N(z_1/z_2) = N(z_1)/N(z_2), \qquad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \qquad \overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2.$$

A operação de conjugação possibilita expressar da seguinte maneira as partes real e imaginária de um número complexo z:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{1}$$

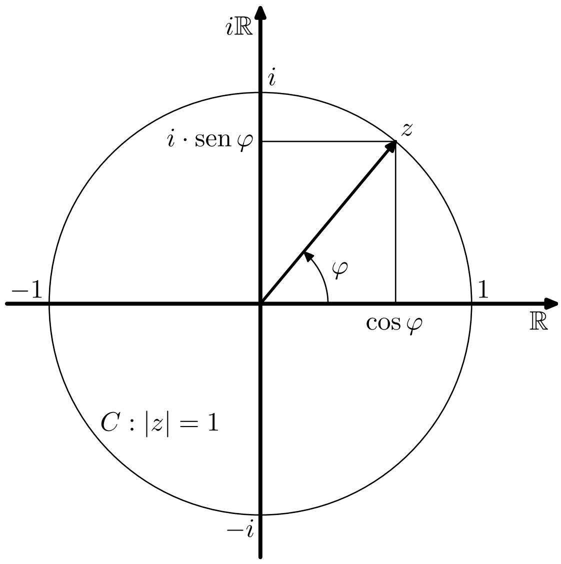
Já vimos a interpretação geométrica dos números complexos e de sua soma. Para entendermos o sentido geométrico da multipicação, sabendo que o módulo do produto é o produto dos módulos, vamos procurar uma outra caracterização dos números complexos. O conjunto

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

[5]Não esqueçamos que para a imagem o objeto é imagem (vide "*Alice no Pais das Maravilhas*" de Lewis Carroll).

[6]Caso não prefira algo mastigado por outrem.

é simplesmente a circunferência unitária com centro na origem. Isto porque qualquer ponto da circunferência é extremidade de um vetor (= número complexo) cujo módulo é 1. Qualquer número complexo z sobre tal circunferência, $z \in C$, pode ser escrito como $z = \cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi$, onde φ é o ângulo orientado que vai do eixo real positivo ao vetor z. Assim o ângulo φ caracteriza o número complexo z sobre a circunferência unitária. Tomemos $z_1, z_2 \in C$. É fácil verificar que $z_1 \cdot z_2 \in C$: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$. Multiplicando-se $z_1 = \cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi$ e $z_2 = \cos\psi + i \cdot \operatorname{sen}\psi$, obtemos $z_1 \cdot z_2 = (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\psi) + i \cdot (\operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\psi)$. Como

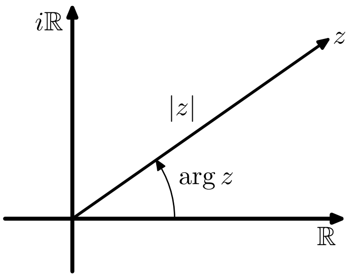


$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi \cdot \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\psi,$$
$$\operatorname{sen}(\varphi + \psi) = \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\psi,$$

então

$$(\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi) \cdot (\cos\psi + i \cdot \operatorname{sen}\psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \psi). \qquad (2)$$

Em palavras: para calcular o produto de pontos da circunferência unitária, precisamos apenas somar os ângulos correspondentes.



Dado um número complexo arbitrário não-nulo, $z \neq 0$, então o número $\frac{z}{|z|}$ pertence à circunferência unitária C e, portanto, $\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi$, para um ângulo φ apropriado. Este ângulo φ chama-se *argumento* de z, $\varphi = \arg z$. Só tem sentido falar em argumento de z para $z \neq 0$. A bem da verdade, o argumento de z é determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π, ou seja, $\arg z = \varphi \mod 2\pi$. Se não levarmos em conta essa observação, teríamos, para o número real 1, $\arg 1 = 0$. Mas, $\arg 1 = \arg\big((-1) \cdot (-1)\big) = \arg(-1) + \arg(-1) = \pi + \pi = 2\pi$. Ou seja, $0 = 2\pi$, um absurdo.

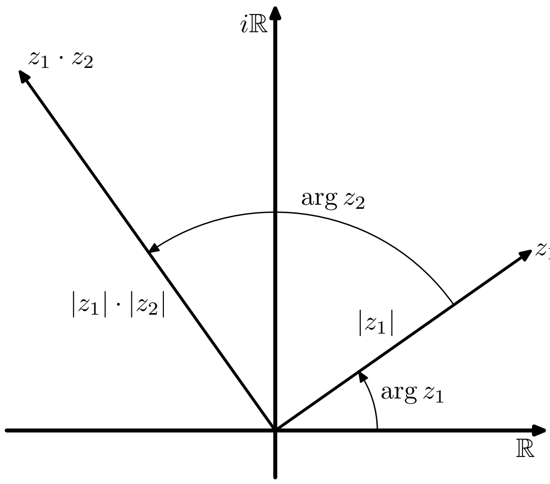
Com os conceitos de módulo e de argumento, chegamos à *forma trigonométrica* ou à *representação polar* (pois de fato usamos coordenadas polares no plano) de um número complexo:

$$z = |z| \cdot (\cos\arg z + i \cdot \operatorname{sen}\arg z)$$

As fórmulas

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi$$

expressam o sentido geométrico da multiplicação. A segunda destas fórmulas necessita ser demonstrada. Quando z_1 e z_2 têm módulo 1, estamos diante de uma versão da fórmula (2). O caso geral poderá ser deduzido do particular, substituindo-se z_1 e z_2 por $\frac{z_1}{|z_1|}$ e $\frac{z_2}{|z_2|}$ respetivamente, pois o argumento de z é o mesmo que o de $\frac{z}{|z|}$.



Com os argumentos anteriores, prova-se que, para $z_1, z_2 \neq 0$,

$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \mod 2\pi.$$

Usando a fórmula que fornece o inverso de um número complexo z, temos que $z^{-1} = \overline{z}$ quando $|z| = 1$. Daí, $(\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i \cdot \operatorname{sen}\varphi = \cos(-\varphi) + i \cdot \operatorname{sen}(-\varphi)$. Logo, por indução sobre n, obtemos a *fórmula* de *Moivre*

$$(\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \operatorname{sen} n\varphi,$$

onde n é um número inteiro arbitrário.

Analisemos as fórmulas de multiplicação na forma trigonométrica. Elas são: uma multiplicação (envolvendo módulos) e uma adição (envolvendo argumentos). Como poderíamos entendê-las de maneira unificada? Poderia nos ajudar nesse intento uma função que leve soma a produto. Haveria alguma com esta característica? Exponencial?!

Tentar não custa nada: para $a, \varphi \in \mathbb{R}$ façamos[7]

$$e^{a+i\varphi} = e^a \cdot (\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi),$$

onde e^a designa a exponencial usual (real) de a. Em particular, chegamos à relação mágica[8] entre os números e, i, π e (-1) :

$$e^{i\pi} = -1.$$

Avançando neste terreno, vemos que é válida a identidade básica dos expoentes

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

para quaisquer números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. De fato, para $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, temos $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \operatorname{sen} b) \cdot e^c \cdot (\cos d + i \cdot \operatorname{sen} d) = e^{a+c} \cdot \big(\cos(b+d) + i \cdot \operatorname{sen}(b+d)\big) = e^{(a+c)+i\cdot(b+d)} = e^{z_1+z_2}$. Da definição de exponencial e da fórmula de Moivre seguem as seguintes propriedades

$$e^z \neq 0, \qquad e^{-z} = 1/e^z, \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad (e^z)^n = e^{nz}$$

para todos $z \in \mathbb{C}$ e n inteiro qualquer.

Para quais z teremos $e^z = 1$? Seja $z = a + ib$. Então $1 = |e^z| = e^a$ e, portanto, $a = 0$. Agora, $\cos b + i \cdot \operatorname{sen} b = 1$ significa que $\cos b = 1$ e $\operatorname{sen} b = 0$, isto é, $b = 2k\pi$ com k inteiro. Logo, $e^z = 1$ se, e só se, z é múltiplo de $2\pi i$. (Em particular, a função $z \mapsto e^z$ é periódica com periodo $2\pi i$.) Para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, as *fórmulas* de *Euler*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

decorrem imediatamente das fórmula (1), da igualdade $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi$ e da identidade $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.

Encontremos, a seguir, todas as soluções da equação $x^n = a$, onde a é complexo e n natural, isto é, as *raízes n-ésimas* de $a \in \mathbb{C}$. Da equação segue imediatamente que $|x|^n = |a|$. Como $x = |x| \cdot (\cos\psi + i \cdot \operatorname{sen}\psi)$,[9] temos $x = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos\psi + i \cdot \operatorname{sen}\psi) = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\psi}$, onde $\sqrt[n]{|a|}$ é a n-ésima raíz aritmética de $|a|$ e $\psi \in \mathbb{R}$. Escrevendo a nesta mesma forma, ou seja, $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$ com $\varphi \in \mathbb{R}$, obtemos $|a| \cdot e^{i\varphi} = a = x^n = |a| \cdot e^{in\psi}$. Daí, $e^{i\varphi} = e^{in\psi}$ quando $a \neq 0$, pois, neste caso $|a| \neq 0$. Portanto $e^{i(n\psi-\varphi)} = 1$ e $n\psi - \varphi = 2k\pi$ para k inteiro, apropriado. Em consequência, $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ e

$$x = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)/n}.$$

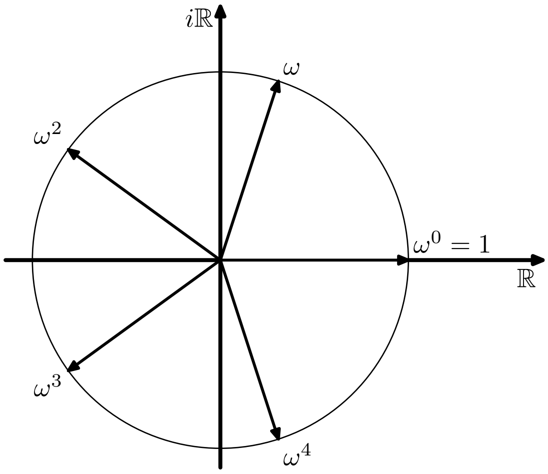
Um cálculo imediato mostra que x dado por uma fórmula como esta, onde k é qualquer inteiro e $\varphi = \arg a$, $a \neq 0$, é solução da equação $x^n = a$. Adicionando-se ou subtraindo-se de k o natural n, obtemos o mesmo x, porque $e^{i(\varphi+2(k\pm n)\pi)/n} = e^{(i(\varphi+2k\pi)/n)\pm 2\pi i} = e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$, pela periodicidade. Assim, para

[7]Posteriormente esta definição formal obterá mais conteúdo.

[8]Estão envolvidas quatro constantes (imagináveis e inimagináveis). Essa fórmula está gravada na lápide de Euler em Köningsberg (atual Kaliningrad).

[9]$\psi = \arg x$ para $x \neq 0$. Caso contrário, ψ é qualquer número real.

listarmos todas as soluções, é suficiente darmos a k, sucessivamente, os valores $0, 1, \ldots, (n-1)$. No caso particular de $a = 1$, chegamos às *raízes n-ésimas* da *unidade*



as raízes quíntuplas da unidade

$$\omega_k = e^{2k\pi i/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n},$$
$$k = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

que são distintas para k's diferentes. Com efeito, se $e^{2k\pi i/n} = e^{2l\pi i/n}$ para $0 \le k < l < n$, teríamos $e^{2(l-k)\pi i/n} = 1$ e $\dfrac{l-k}{n}$ seria inteiro. Mas $0 < l - k < n$ implicam $0 < \dfrac{l-k}{n} < 1$.

Seja

$$\omega = e^{2\pi i/n}.$$

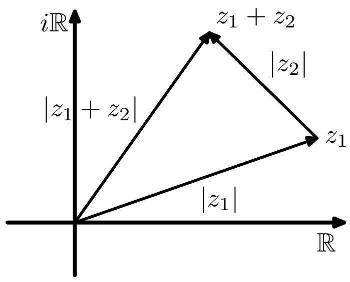
Então $\omega_k = \omega^k$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Com esta notação todas as soluções da equação $x^n = a$ para $a \neq 0$ se escrevem na forma

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\varphi/n} \cdot \omega^k,$$
$$k = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

onde $\varphi = \arg a$. Observemos que as soluções apresentadas são distintas, pois ω^k's são distintos.

Se tentássemos estabelecer alguma relação de ordem em $\mathbb{C}$, enfrentaríamos sérias dificuldades, senão vejamos. Para o número i, por exemplo, teríamos, ou $i > 0$, ou $i < 0$. Caso fosse $i > 0$, deveríamos ter $i^2 > 0$, isto é, $-1 > 0$. No outro caso, $-i > 0$ implica $-1 = (-i)^2 > 0$.



Portanto, quando escrevemos desigualdades do tipo $a > b$ ou $a \ge b$ entre números a e b, pressupomos que a e b sejam números (pelo menos) reais, pois, como vimos, não tem sentido qualquer desigualdade entre números complexos, não reais.

Para todos números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ é válida a desigualdade

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

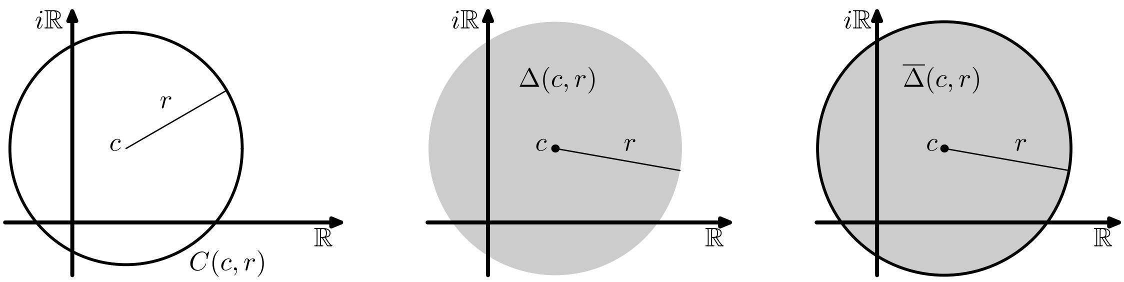
Para prová-la, basta observar que essa é a desigualdade entre os lados do triângulo com vértices em 0, z_1 e $z_1 + z_2$.

A desigualdade óbvia $a^2 \le a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, implica as desigualdades

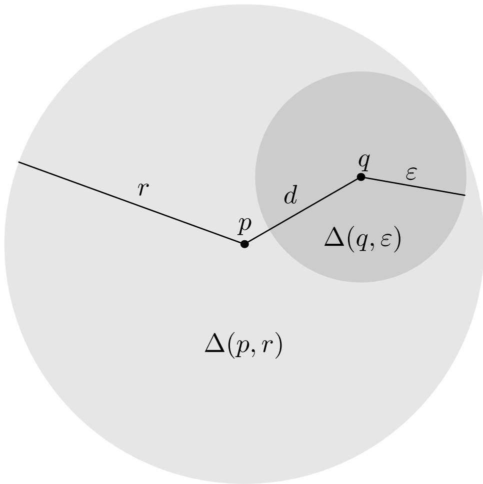
$$-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|, \qquad -|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|, \qquad |\operatorname{Re} z| \le |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \le |z| \tag{3}$$

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$.

Dados um número complexo $c \in \mathbb{C}$ e um número real positivo $r \in \mathbb{R}$, então, como fizemos com a circunferência unitária, o conjunto $C(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$ é uma circunferência de raio r e centro em c. Os conjuntos $\Delta(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$ e $\overline{\Delta}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \le r\}$ são respetivamente ditos *disco aberto* e *disco fechado* de raio r e centro em c. Obviamente, $C(c, r) = \overline{\Delta}(c, r) \setminus \Delta(c, r)$. O plano



complexo $\mathbb{C}$ pode ser visto como um disco aberto de raio infinito, $\mathbb{C} = \Delta(c, +\infty)$.



É fácil verificar as seguintes propriedades dos discos:

1.1. Se $0 < r_1 \leq r_2$, então $\Delta(p, r_1) \subset \Delta(p, r_2)$ e $\overline{\Delta}(p, r_1) \subset \overline{\Delta}(p, r_2)$.

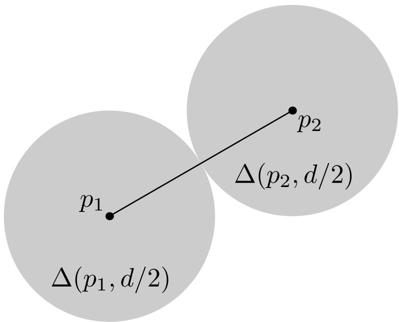
1.2. Sejam $r > 0$ e $p \in \mathbb{C}$. Para qualquer $q \in \Delta(p, r)$, fazemos $d = |q - p|$ e $\varepsilon = r - d$. Então $d < r$, $\varepsilon > 0$ e $\Delta(q, \varepsilon) \subset \Delta(p, r)$. (Veja a figura ao lado.)

Com efeito, a última inclusão pode ser lida como

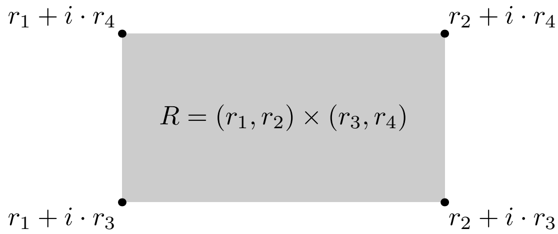
$$\varepsilon > |z - q\,| \implies r > |z - p\,| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Podemos nos certificar da correção desta implicação simplesmente fazendo $z_1 = z - q$ e $z_2 = q - p$ na desigualdade $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$. De $\varepsilon > |z - q\,|$ e de $d = |q - p|$ segue $r = \varepsilon + d > |z - q\,| + |q - p\,| \geq |z - p\,|$.

1.3. Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ pontos distintos. Então $d = |p_1 - p_2| > 0$ e $\Delta(p_1, d/2) \cap \Delta(p_2, d/2) = \varnothing$.



Realmente, se existisse um ponto $p \in \Delta(p_1, d/2) \cap \Delta(p_2, d/2)$, então $d = |p_1 - p_2| = |p_1 - p + p - p_2| \leq |p_1 - p\,| + |p - p_2| < d/2 + d/2 = d$. Teríamos uma contradição.

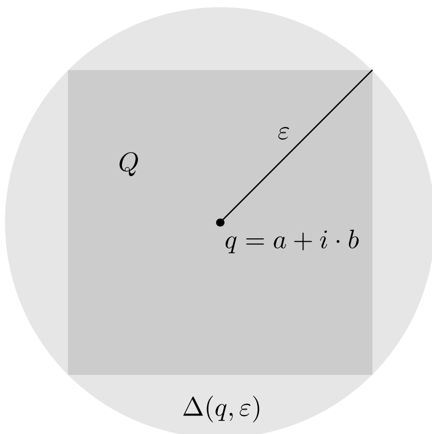


Sejam $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 < r_2$ e $r_3 < r_4$. Chamamos de *retângulo aberto* R (veja a figura à direita) o produto cartesiano de dois intervalos:

$$R = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4) = \{x + iy \mid r_1 < x < r_2,\ r_3 < y < r_4\}.$$

Temos as seguintes relações entre retângulos abertos e discos abertos:

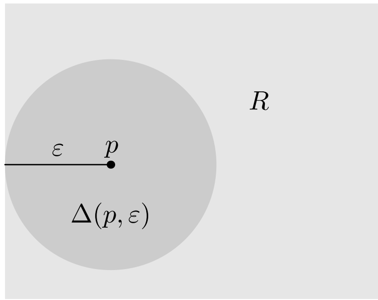
1.4. Sejam $r_1, r_2, r_3, r_4, r_1', r_2', r_3', r_4' \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \leq r_1' < r_2' \leq r_2$ e $r_3 \leq r_3' < r_4' \leq r_4$ (isto é, $(r_1', r_2') \subset (r_1, r_2)$ e $(r_3', r_4') \subset (r_3, r_4)$). Então, para os retângulos abertos $R' = (r_1', r_2') \times (r_3', r_4')$ e $R = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4)$, temos $R' \subset R$.



1.5. Sejam $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ e $q = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ponhamos $r_1 = a - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $r_2 = a + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $r_3 = b - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e $r_4 = b + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Então o retângulo aberto $Q = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4)$ (que, na verdade, é um *quadrado aberto*), está contido no disco $\Delta(q, \varepsilon)$, ou seja, $Q \subset \Delta(q, \varepsilon)$. (Veja a figura ao lado.)

De fato, seja $z = x + iy \in Q$, então $r_1 < x < r_2$ e $r_3 < y < r_4$. Portanto, $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e $|x - b\,| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Assim, $|z - q\,|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 < \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 = \varepsilon^2$. Portanto, $|z - q\,| < \varepsilon$, ou seja, $z \in \Delta(q, \varepsilon)$.

1.6. Sejam $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 < r_2$ e $r_3 < r_4$. Tomemos um ponto qualquer $p = x + iy$ no retangulo aberto $R = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4)$, $p \in R$. Temos $r_1 < x < r_2$ e $r_3 < y < r_4$. Ponhamos $\varepsilon = \min\{x - r_1, r_2 - x, y - r_3, r_4 - y\}$. Obviamente $\varepsilon > 0$. Comprovemos que $\Delta(p, \varepsilon) \subset R$.



Com efeito, seja $q = u + iv \in \Delta(p, \varepsilon)$, então $\varepsilon^2 > |q - p|^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 \geq (u - x)^2$. Daí temos $\varepsilon > |u - x|$. De forma semelhante, obtemos $\varepsilon > |v - y|$. Essas desigualdades significam que $x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$ e $y - \varepsilon < v < y + \varepsilon$. Pela escolha de ε, temos $r_1 \leq x - \varepsilon$, $x + \varepsilon \leq r_2$, $r_3 \leq y - \varepsilon$ e $y + \varepsilon \leq r_4$. Por sua vez, combinando as últimas desigualdades com as anteriores, chegamos a $r_1 < u < r_2$ e $r_3 < v < r_4$, ou seja, $q \in R$.

Exercícios. 1. Indique qual das seguintes relações são válidas: $1 = 2i$, $1 > 2i$, $1 < 2i$. Porque? Faça o mesmo para $1 \leq i$, $i \leq |i|$, $1 \leq |i|$.

2. Transforme para a forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, os seguintes números complexos:

$$(1+2i)^3, \quad \frac{5}{-3+4i}, \quad \frac{3-2i}{-1+i}, \quad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2, \quad (1+i)^n + (1-i)^n, \ n \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}, \quad \sqrt{1+i}, \quad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{-i}.$$

(Para os números da segunda linha, indique todas as variantes possíveis.)

3. Calcule os módulos dos seguintes números complexos:

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i), \qquad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}, \qquad \operatorname{sen} 2000 - i \cdot \cos 2000$$

4. Prove as três identidades abaixo para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (deve-se considerar $-$ com $-$ e $+$ com $+$: lé com lé, cré com cré ...)

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2), \qquad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big).$$

Qual é o sentido geométrico da última identidade?

5*. Dados dois números $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $|z_1|, |z_2| < 1$, prove que $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| < 1$.

6. Sejam $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Prove que $(x + iy)^2 = a + ib$ se, e somente se, $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ e $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ (lé com lé ...).

7. Qual é a relação entre os números $u, v, w \in \mathbb{C}$, para que o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid uz + v\overline{z} + w = 0\}$ seja uma reta?

8. Descreva geometricamente e nomeie (se não souber o nome, invente ...) os seguintes conjuntos (onde $0 < a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{C}$) :

$$\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\big\}, \quad \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\big\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 1/2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^2 = a\},$$

$$\big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + \operatorname{Re} z = 1\big\}, \quad \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z - u| + |z + u| = a\big\}, \quad \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| = a\big\},$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1\right\}, \quad \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-u}{z-v}\right| = 1\right\}.$$

9. Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos distintos. Prove que z_1, z_2, z_3 estão na mesma reta se, e somente se, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$.

10*. Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 números complexos distintos que estão na mesma circunferência. Prove que $\dfrac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)} \in \mathbb{R}$. Descreva os casos em que a recíproca não é verdadeira.

11*. Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos tal que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ e $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prove que z_1, z_2, z_3 são vértices de um triângulo equilátero.

12. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove as duas identidades

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \tbinom{n}{2} \cos^{n-2}\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha + \tbinom{n}{4} \cos^{n-4}\alpha \cdot \operatorname{sen}^4\alpha - \dots,$$
$$\operatorname{sen} n\alpha = \tbinom{n}{1} \cos^{n-1}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha - \tbinom{n}{3} \cos^{n-3}\alpha \cdot \operatorname{sen}^3\alpha + \tbinom{n}{5} \cos^{n-5}\alpha \cdot \operatorname{sen}^5\alpha - \dots$$

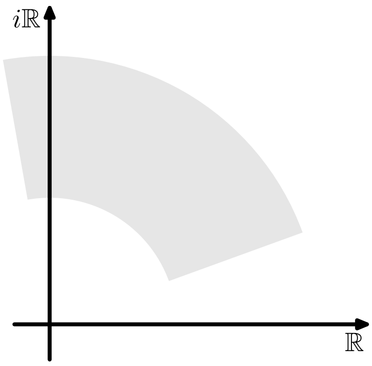
13. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k, n \in \mathbb{N}$. Simplifique as quatro expressões abaixo $(\omega = e^{2\pi i/n})$:

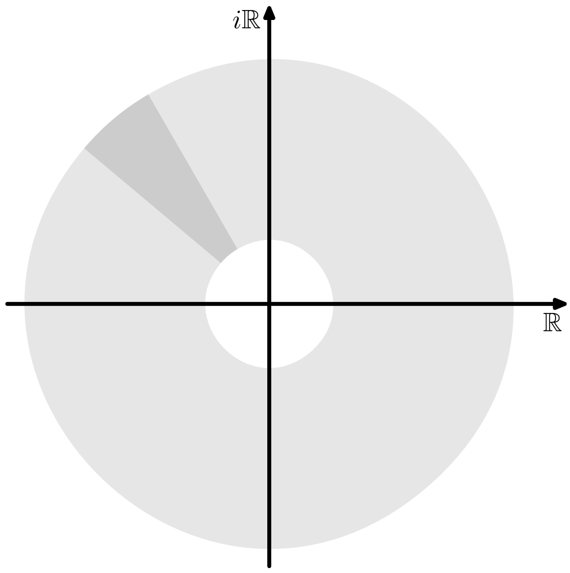
$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha, \qquad \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \dots + \operatorname{sen} n\alpha,$$
$$\tbinom{n}{0} - \tbinom{n}{2} + \tbinom{n}{4} - \tbinom{n}{6} + \dots, \qquad 1 - \omega^k + \omega^{2k} - \dots + (-1)^{n-1}\omega^{(n-1)k}.$$

Você imagina quando uma dessas relações simplificadas poderia ser útil?

14. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$, k não divide n. Sendo $\omega = e^{2\pi i/n}$, prove que $1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{(n-1)k} = 0$.

15. Sejam os números $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$, tais que $r_1 < r_2$ e $r_3 < r_4$. Mostre que a imagem do retângulo aberto $R = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4)$ pela função $z \mapsto e^z$ é algo como o indicado na figura à esquerda. Poderíamos obter como imagem de retângulo pela mesma função, algo como a figura à direita?





Como evitar a parte mais escura?

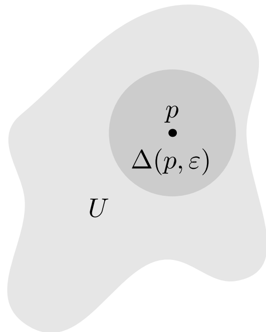
16. Se aproximamos o símbolo da UNICAMP por setores entre duas circunferências concêntricas, como seria sua descrição usando as ferramentas do Exercício **15**?

A mágica é uma criação humana que desafia o intelecto
e também aí reside o seu encanto.
Aprendiz de Feiticeiro

2. A Magia da Topologia Plana e uma Apresentação Compacta dos Compactos

Os conceitos topológicos que iremos discutir nesta seção funcionam tanto em $\mathbb{R}$, como em $\mathbb{C}$. Por isto consideraremos preferencialmente o caso complexo, observando que o caso real é bem semelhante, inclusive mais simples.

2.1. Definição.[10] Um conjunto $U \subset \mathbb{C}$ é dito *aberto* em $\mathbb{C}$ se, junto com todo ponto $p \in U$, contém um disco $\Delta(p, \varepsilon)$ de raio $\varepsilon > 0$ apropriado, ou seja, $\Delta(p, \varepsilon) \subset U$. Por definição, o conjunto vazio é aberto. Um conjunto *fechado* em $\mathbb{C}$ é simplesmente o complemento $\mathbb{C} \setminus U$ de um conjunto aberto.[11] Dado um ponto $p \in \mathbb{C}$, então qualquer conjunto aberto U em $\mathbb{C}$, que contém p, é dito *vizinhança aberta* de p em $\mathbb{C}$.



Os conjuntos abertos satisfazem as propriedades características, "axiomas":

A1. $\varnothing$ e $\mathbb{C}$ são abertos.

A2. Seja $U_\alpha \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in I$, uma família (possivelmente infinita) de conjuntos abertos. A união $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ é um conjunto aberto.

A3. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos. A interseção $U_1 \cap U_2$ é aberta.

A4. Dados dois pontos distintos $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, $p_1 \neq p_2$, existem $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$, abertos, disjuntos (isto é, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$), tais que $p_1 \in U_1$ e $p_2 \in U_2$.

Para verificarmos o axioma A2, tomemos um ponto p qualquer, $p \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Como $p \in U_\beta$ para algum $\beta \in I$ apropriado, e U_β é aberto, então $\Delta(p, \varepsilon) \subset U_\beta$ para algum raio $\varepsilon > 0$ e, portanto, $\Delta(p, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Para verificarmos o axioma A3, tomemos um ponto p qualquer, $p \in U_1 \cap U_2$. Como $p \in U_1$ e U_1 é aberto, existe um disco $\Delta(p, r_1)$ tal que $\Delta(p, r_1) \subset U_1$. De forma semelhante, obtemos um outro disco em torno de p, contido em U_2, $\Delta(p, r_2) \subset U_2$. É claro que, ou $r_1 \leq r_2$, ou $r_2 \leq r_1$. Por **1.1**, ou $\Delta(p, r_1) \subset \Delta(p, r_2) \subset U_2$, ou $\Delta(p, r_2) \subset \Delta(p, r_1) \subset U_1$. Consequentemente, ou $\Delta(p, r_1) \subset U_1 \cap U_2$, ou $\Delta(p, r_2) \subset U_1 \cap U_2$.

De **1.2** segue que qualquer disco aberto $\Delta(p, r)$, $r > 0$, é um conjunto aberto. Este fato, juntamente com **1.3**, verifica o axioma A4.

O axioma A4 é conhecido como *axioma* de *Hausdorff.* Ele permite que separemos pontos distintos por suas vizinhanças abertas disjuntas.

---

[10] Note as diferenças e semelhanças desta definição com a no campo real: um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ é dito *aberto* em $\mathbb{R}$ se, junto com todo ponto $p \in U$, contém um intervalo aberto $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ de raio $\varepsilon > 0$ apropriado, ou seja, $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset U$. Por definição, o conjunto vazio é aberto. Um conjunto *fechado* em $\mathbb{R}$ é simplesmente o complemento $\mathbb{R} \setminus U$ de um conjunto aberto. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}$, então qualquer conjunto aberto U em $\mathbb{R}$, que contém p, é dito *vizinhança aberta* de p em $\mathbb{R}$.

[11] As palavras "aberto" e "fechado" podem induzir a idéia de que qualquer subconjunto é ou aberto ou fechado. Mas existem conjuntos que não são nem abertos nem fechados. Por exemplo, o intervalo $[0, 1)$ considerado em $\mathbb{C}$ (ou em $\mathbb{R}$) não é aberto, pois $0 \in [0, 1)$, mas não há nenhum disco aberto em $\mathbb{C}$ (ou intervalo aberto em $\mathbb{R}$) com centro 0 que esteja contido em $[0, 1)$. O complemento de $[0, 1)$ (tanto em $\mathbb{C}$, como em $\mathbb{R}$) não é aberto, pois 1 pertence a este complemento, mas qualquer disco aberto (ou intervalo aberto), com centro em 1, contém pontos do intervalo $[0, 1)$ e, por isto, não está contido no complemento.

Note que, em geral, o axioma A3 não é válido para interseção infinita: por exemplo, o conjunto $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta\big(0, 1/(n+1)\big) = \{0\}$ não é aberto.

2.2. Já estamos em condições de **caracterizar** os conjuntos abertos: *um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, U é a união de uma família (possivelmente infinita) de discos abertos.* (Imagine um conjunto aberto. Tente "vê-lo" ou desenhá-lo formado pelos discos abertos.)

De fato: seja U um conjunto aberto. Por definição, para todo $p \in U$, existe um disco aberto $\Delta(p, r_p)$, $r_p > 0$, contido em U, $\Delta(p, r_p) \subset U$. Fazendo p percorrer todo U e, tendo em mente que $p \in \Delta(p, r_p)$, obtemos $\bigcup\limits_{p\in U} \Delta(p, r_p) = U$.

Seja agora U a união de uma família qualquer de discos abertos. Pelo axioma A2 e pelo fato de todo disco aberto ser um conjunto aberto, U é aberto.

2.3. Na visão topológica, os abertos, sob quaisquer formas, desfrutam de direitos iguais (ou quase iguais[12]). Termos usado discos abertos, em **2.2** e na Definição **2.1**, não deve obscurecer o conceito principal que é "conjunto aberto" em geral. Por exemplo, no lugar de discos abertos, poderíamos considerar retângulos abertos ou quadrados abertos (ou vários outros tipos de conjuntos), sem alteração do resultado. Vamos ver como é que isto funciona no caso de quadrados.

Por **1.6**, temos que todo retângulo aberto (em particular, quadrado aberto) é um conjunto aberto.

Em seguida verificamos que, para qualquer disco aberto $\Delta(p, r)$ e qualquer ponto $q \in \Delta(p, r)$, existe um quadrado aberto Q, tal que $q \in Q \subset \Delta(p, r)$: por **1.2**, já sabemos que existe um disco aberto $\Delta(q, \varepsilon)$, contido em $\Delta(p, r)$; por **1.5**, existe um quadrado aberto Q tal que $q \in Q \subset \Delta(q, \varepsilon)$; isto implica $q \in Q \subset \Delta(p, r)$.

Os fatos que acabamos de provar significam que qualquer conjunto aberto pode ser "formado" por quadrados abertos: *um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e só se, U é a união de uma família de quadrados abertos.*

Com efeito, pelo axioma A2, a união de qualquer família de quadrados abertos é um conjunto aberto. Reciprocamente: seja U um conjunto aberto qualquer. De **2.2**, sabemos que U é a união de uma família de discos abertos. Por sua vez, cada um destes discos, por exemplo $\Delta(p, r)$, é a união de todos os quadrados abertos, nele contidos, o que decorre dos fatos acima demonstrados.

(Volte a o aberto que você imaginou e veja-o agora como união de retângulos abertos. Entendeu a magia?)

2.4. Podemos reduzir a "fonte" de conjuntos abertos ao nível de uma família enumerável de retângulos abertos.

Dizemos que um retângulo aberto $R' = (r'_1, r'_2) \times (r'_3, r'_4)$ é *racional* se os números r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 forem racionais, ou seja, $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 \in \mathbb{Q}$. Por ser $\mathbb{Q}$ enumerável, a quantidade de retângulos racionais será enumerável.

Vamos mostrar que qualquer retângulo aberto $R = (r_1, r_2) \times (r_3, r_4)$ é a união de uma família de retângulos racionais. Lançamos mão aqui do conhecimento da natureza dos números reais, ou seja: todo número real é limite de uma sequência monótona de números racionais. Desta maneira, tomemos sequências de números racionais, $r_{1n}, r_{2n}, r_{3n}, r_{4n} \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $r_1 < r_{1n} < r_{2n} < r_2$ e $r_3 < r_{3n} < r_{4n} < r_4$ com $\lim\limits_{n\to\infty} r_{1n} = r_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n} = r_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{3n} = r_3$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{4n} = r_4$. Os retângulos $R_n = (r_{1n}, r_{2n}) \times (r_{3n}, r_{4n})$, $n \in \mathbb{N}$, são racionais.

Resta somente provar que $R = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Por **1.4**, $R_n \subset R$, portanto, $R \supset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Tomemos qualquer ponto $x + iy \in R$. Obviamente, $r_1 < x < r_2$ e $r_3 < y < r_4$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

[12]Infelizmente, continua sendo utópica a plena igualdade de direitos. Na topologia, a mágica tem limites.

teremos $r_1 < r_{1n} < x < r_{2n} < r_2$ e $r_3 < r_{3n} < y < r_{4n} < r_4$, isto é, $x + iy \in R_n$. Consequentemente, $R \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Em suma, $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

Podemos enumerar todos os retângulos racionais, R_n, $n \in \mathbb{N}$. Já sabemos que qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ é união de uma família de retângulos abertos. Como qualquer retângulo aberto é a união de uma família de retângulos racionais, então U é a união de uma família de retângulos racionais. Assim, podemos escrever $U = \bigcup_{n\in J} R_n$, onde $J \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto apropriado de índices.

2.5. As fórmulas $\mathbb{C}\setminus\Big(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in I}(\mathbb{C}\setminus U_\alpha)$ e $\mathbb{C}\setminus(U_1\cap U_2) = (\mathbb{C}\setminus U_1)\cup(\mathbb{C}\setminus U_2)$, os axiomas A1–A3 e a Definição **2.1**, mostram que os conjuntos fechados satisfazem os seguintes axiomas:

F1. $\varnothing$ e $\mathbb{C}$ são fechados.

F2. Seja $X_\alpha \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in I$, uma família (possivelmente infinita) de conjuntos fechados. A interseção $\bigcap_{\alpha\in I} X_\alpha$ é um conjunto fechado.

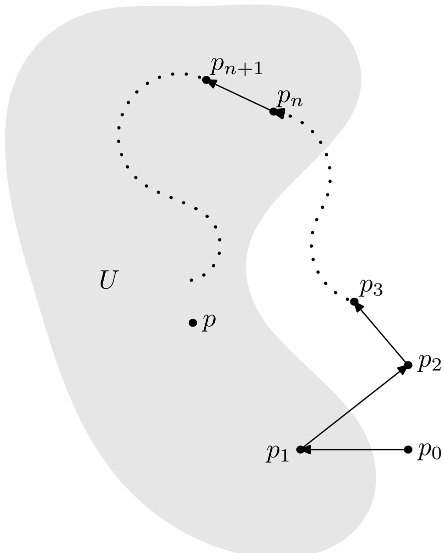
F3. Sejam $X_1, X_2 \subset \mathbb{C}$ conjuntos fechados. A união $X_1 \cup X_2$ é fechada.

F4. Seja $p \in \mathbb{C}$. O conjunto $\{p\}$ é fechado.

Verifiquemos o axioma F4. Para isto, precisamos provar que $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ é aberto. Seja $q \in \mathbb{C}\setminus\{p\}$; assim, $q \neq p$ e $d = |p - q| > 0$. Como $p \notin \Delta(q, d)$, concluímos que $\Delta(q, d) \subset \mathbb{C}\setminus\{p\}$.

2.6. Definição. Seja $p_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números complexos e seja $p \in \mathbb{C}$. Dizemos que a sequência p_n *converge ao ponto* p se $\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$. Neste caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

2.6′. Definição. Seja $p_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números complexos e seja $p \in \mathbb{C}$. Dizemos que a sequência p_n *converge ao ponto* p se, para qualquer vizinhança aberta U de p, a partir de um certo "momento", a sequência estará toda em U, isto é, existe $n = n(U) \in \mathbb{N}$ tal que $p_m \in U$ se $m \geq n(U)$.



Antes de mais nada verifiquemos que as Definições **2.6** e **2.6′** são equivalentes. Seja $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ no sentido da Definição **2.6**. Tomemos qualquer U, vizinhança aberta de p, $p \in U$. Assim, $\Delta(p, \varepsilon) \subset U$ para algum $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|p_m - p| < \varepsilon$ para $m \geq n(\varepsilon)$. Em outras palavras, $p_m \in \Delta(p, \varepsilon) \subset U$ para $m \geq n(U)$, fazendo $n(U) = n(\varepsilon)$.

Reciprocamente: seja $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ no sentido da Definição **2.6′**. Tomemos qualquer $\varepsilon > 0$. Então, para $U = \Delta(p, \varepsilon)$, existe $n(U) \in \mathbb{N}$ tal que $p_m \in U$ para $m \geq n(U)$. Isto é, $|p_m - p| < \varepsilon$ para $m \geq n(\varepsilon)$, onde $n(\varepsilon) = n(U)$. Assim, $\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$.

2.7. Proposição. *Sejam $p_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e $p = x + iy \in \mathbb{C}$. Então $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Em particular, o limite de uma sequência, se existir, é único. Além disso, para qualquer sequência convergente $p_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, são válidas as igualdades*:

$$\operatorname{Re}\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} p_n, \qquad \operatorname{Im}\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} p_n, \qquad \Big|\lim_{n\to\infty} p_n\Big| = \lim_{n\to\infty} |p_n|.$$

Demonstração. Seja $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Então $\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$. Usando as desigualdades (3), obtemos

$$|p_n - p| \geq \big|\operatorname{Re}(p_n - p)\big| = |\operatorname{Re} p_n - \operatorname{Re} p| \geq 0 \quad \text{e} \quad |p_n - p| \geq \big|\operatorname{Im}(p_n - p)\big| = |\operatorname{Im} p_n - \operatorname{Im} p| \geq 0.$$

Daí, $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Re} p_n - \operatorname{Re} p\,| = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Im} p_n - \operatorname{Im} p\,| = 0$, ou equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} p_n = \operatorname{Re} p \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} p_n = \operatorname{Im} p.$$

Reciprocamente: se $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} p_n = \operatorname{Re} p$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} p_n = \operatorname{Im} p$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Re} p_n - \operatorname{Re} p\,| = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{Im} p_n - \operatorname{Im} p\,| = 0$. Concluímos que

$$|p_n - p\,| = \sqrt{|\operatorname{Re} p_n - \operatorname{Re} p\,|^2 + |\operatorname{Im} p_n - \operatorname{Im} p\,|^2} \longrightarrow 0.$$

Provemos a última das igualdades da Proposição **2.7**. Para $p_n = x_n + iy_n$, temos

$$\Big|\lim_{n\to\infty} p_n\Big| = \sqrt{\Big(\operatorname{Re}\lim_{n\to\infty} p_n\Big)^2 + \Big(\operatorname{Im}\lim_{n\to\infty} p_n\Big)^2} = \sqrt{\Big(\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re} p_n\Big)^2 + \Big(\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im} p_n\Big)^2} =$$

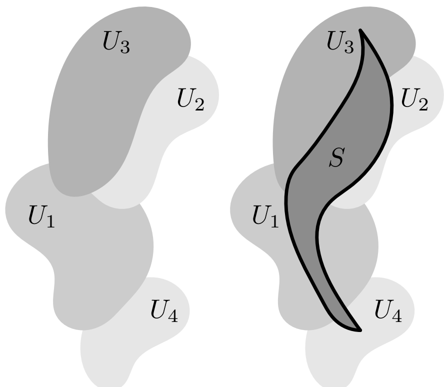
$$= \sqrt{\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)^2 + \Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big)^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty}|p_n|.$$

A demonstração está completa.

2.8. Critério de Fechamento. *Seja $X \subset \mathbb{C}$. A condição necessária e suficiente para X ser fechado é que o limite de qualquer sequência convergente, cujos termos estão em X, pertença a X (Simbolicamente, $(\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \in X) \wedge (\exists \lim\limits_{n\to\infty} p_n) \implies \lim\limits_{n\to\infty} p_n \in X$.)*[13]

Demonstração. Suponhamos que X seja fechado e tomemos $p_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente cujo limite p, $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, estivesse fora de X, isto é, $p \notin X$. O conjunto $U = \mathbb{C} \setminus X$ é aberto e $p \in U$. Desta maneira, U é uma vizinhança aberta de p. Pela Definição **2.6′**, para $m \geq n(U)$, $p_m \in U$, contradizendo o fato de que $p_m \in X$.

Reciprocamente: suponhamos que X satisfaça a condição do Critério de Fechamento **2.8**, mas que, apesar disso, não seja fechado. Portanto, o conjunto $U = \mathbb{C} \setminus X$ não é aberto, isto é,[14] existe $p \in U$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, temos $\Delta(p, \varepsilon) \not\subset U$. Em outras palavras, existe $p \notin X$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um ponto $p(\varepsilon) \in X$ tal que $|p(\varepsilon) - p\,| < \varepsilon$. Construímos a sequência $p_n = p\big(1/(n+1)\big) \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Por construção, ela tem o limite p, $p \notin X$. Chegamos a uma contradição e, portanto, X é fechado. A demonstração está completa.



2.9. Definição. Uma *cobertura aberta* de um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ é uma família U_α, $\alpha \in I$, de conjuntos abertos, que cobre[15] S, isto é, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \supset S$. Um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ é dito *compacto* se de toda e qualquer cobertura aberta de K pudermos escolher uma subcobertura finita de K. Assim, K é um compacto se, para qualquer família U_α, $\alpha \in I$, de conjuntos abertos tal que $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \supset K$, pudermos escolher $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$, membros da família, em número finito, tais que $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k} \supset K$.

2.10. Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto arbitrário e seja U_α, $\alpha \in I$,

[13] Assim, "ser fechado" significa "ser fechado em relação à passagem ao limite".

[14] Usamos as seguintes regras para negação $\rceil$ de uma afirmação:
"$\rceil\,\exists a \in A$ tal que blá-blá-blá" = "$\forall a \in A\ \rceil$blá-blá-blá" e "$\rceil\,\forall a \in A$ blá-blá-blá" = "$\exists a \in A$ tal que $\rceil$blá-blá-blá".
No caso, a afirmação "U é aberto" pode ser escrita como "$\forall p \in U\ \exists\Delta(p,\varepsilon)$ tal que $\Delta(p,\varepsilon) \subset U$". A negação dessa afirmação é "$\exists p \in U$ tal que $\forall\Delta(p,\varepsilon),\ \Delta(p,\varepsilon) \not\subset U$".

[15] Tanto o termo "cobre", quanto a figura, podem iludir o leitor. No conceito cobertura não cabem as imagens "estar por cima" ou "estar por baixo". Nas figuras mostramos a cobertura U_1, U_2, U_2, U_4 sem o conjunto S e, ao lado, por baixo de S.

qualquer cobertura aberta de S, isto é, os U_α's são abertos e $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supset S$. Então podemos escolher uma subcobertura enumerável (ou finita) da cobertura.

Para provarmos este fato, apliquemos **2.4** para cada um dos conjuntos abertos U_α. De acordo com **2.4**, para todo U_α, existe um subconjunto apropriado de índices $J_\alpha \subset \mathbb{N}$ tal que $U_\alpha = \bigcup_{n\in J_\alpha} R_n$. (Lembre que R_n, $n \in \mathbb{N}$, é a família enumerável de todos os retângulos racionais.) Ponhamos $J = \bigcup_{\alpha\in I} J_\alpha \subset \mathbb{N}$. Assim,

$$S \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\Big(\bigcup_{n\in J_\alpha} R_n\Big) = \bigcup_{n\in J} R_n.$$

Obtemos uma cobertura aberta e enumerável (ou finita, se J for finito) de S pelos retângulos racionais R_n, $n \in J$.

Seja $n \in J$. Então, para algum $\alpha_n \in I$, temos $n \in J_{\alpha_n}$ e, portanto, $R_n \subset U_{\alpha_n}$ (recorde que $U_\alpha = \bigcup_{n\in J_\alpha} R_n$). Daí conclui-se facilmente que $\bigcup_{n\in J} U_{\alpha_n} \supset \bigcup_{n\in J} R_n \supset S$.

2.11. Critério de Compacidade. *Seja $K \subset \mathbb{C}$. Então K é compacto se, e somente se, de qualquer sequência $p_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$,* (não necessariamente convergente) *pudermos extrair uma subsequência p_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, $(n_0 < n_1 < n_2 < \dots)$, convergente, e cujo limite é um ponto de K.*

Será que de toda sequência se pode extrair uma subsequência convergente? Não. Veja que $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, não admite subsequência convergente alguma. Isto só se pode garantir quando a sequência estiver num compacto.

Demonstração. Suponhamos que K seja compacto e que $p_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, seja uma sequência que **não** possui nenhuma subsequência p_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, convergente a um ponto de K. Provemos que isso conduz a um absurdo.

Antes de mais nada, mostraremos que de nossa hipótese decorre o fato de que, em torno de um ponto qualquer $q \in K$, existe uma vizinhança aberta U_q de q que contém apenas um número finito de termos da sequência.[16] Imaginemos que isso não aconteça para algum ponto $q \in K$. Isto é: *toda vizinhança aberta de q contém um número infinito de termos da sequência.* Daí, poderíamos construir uma subsequência convergente a q, extraída da sequência original (se conseguirmos isto, obteremos o que precisamos). Concretamente: para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ apropriado, teremos $p_{n_0} \in \Delta(q,1)$, pois $\Delta(q,1)$ é uma vizinhança aberta de q e, assim, ela conterá um número infinito (portanto, pelo menos um) de termos da sequência ... Tendo sido escolhidos os termos $p_{n_0}, \dots, p_{n_k}$ com $n_0 < \dots < n_k$, de forma que $p_{n_j} \in \Delta\big(q, 1/(j+1)\big)$ $(j = 0, \dots, k)$, escolhemos $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_k < n_{k+1}$ e $p_{n_{k+1}} \in \Delta\big(q, 1/(k+2)\big)$. A passagem é correta, pois $\Delta\big(q, 1/(k+2)\big)$ é uma vizinhança aberta de q e, portanto, contém um número infinito de termos da sequência. Por nossa construção, $|p_{n_m} - q| < 1/(m+1)$, ou seja, $\lim_{m\to\infty} p_{n_m} = q$. Portanto, *para todo $q \in K$, existe uma vizinhança aberta U_q de q que contém apenas um número finito de termos da sequência.*

Com o fato obtido estamos muito próximos do referido absurdo. Fazendo q percorrer todo o K, teremos uma cobertura aberta de K : $\bigcup_{q\in K} U_q \supset K$. Pela Definição **2.9**, dessa cobertura, podemos extrair uma subcobertura finita de K : $U_{q_1} \cup \dots \cup U_{q_k} \supset K$. Cada um dos conjuntos $U_{q_1}, \dots, U_{q_k}$ e, consequentemente, sua união, contêm apenas um número finito de termos da sequência. Por outro lado, a união deles contém toda sequência, com sua infinitude de termos. Um absurdo.

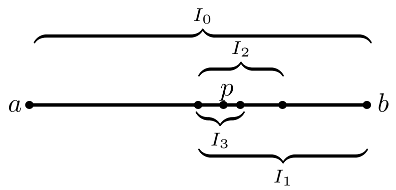
Provamos em seguida a recíproca. Seja $K \subset \mathbb{C}$ um conjunto que satisfaz a propriedade referida no Critério de Compacidade **2.11** e, seja U_α, $\alpha \in I$, uma cobertura aberta de K. Por **2.10**, reduzimos a

[16] Ao se falar de termos de uma sequência, é necessário distinguir os termos dos respetivos valores. Por exemplo, a sequência $0, 0, \dots$ tem um número infinito de termos, mas cada termo é o número 0. Assim, em princípio, em lugar de falarmos em termos, seria melhor falarmos em índices ...

cobertura dada a uma enumerável, isto é, podemos tomar $\mathbb{N}$ na função de I. Se, para algum $n \in \mathbb{N}$, tivermos $U_0 \cup \cdots \cup U_n \supset K$, conseguimos encontrar uma subcobertura finita. Suponhamos que isto não ocorra, isto é, $U_0 \cup \cdots \cup U_n \not\supset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, existe $p_n \in K$ que não pertence a $U_0 \cup \cdots \cup U_n$, ou seja, $p_n \notin U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Entretanto, a propriedade em questão garante a existência de uma subsequência p_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, convergente a um ponto $p \in K$, $\lim\limits_{m\to\infty} p_{n_m} = p$. Sendo U_j, $j \in \mathbb{N}$, uma cobertura aberta de K, $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j \supset K$, então $p \in U_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Pela Definição **2.6′**, existe $m \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que para todo $k \geq m$ teremos $p_{n_k} \in U_j$. Por outro lado, tomando um $k \geq m$ tal que $n_k \geq j$, chegaremos a $p_{n_k} \notin U_0 \cup \cdots \cup U_j \cup \cdots \cup U_{n_k}$. Daí, $p_{n_k} \notin U_j$, contradizendo a relação $p_{n_k} \in U_j$. A demonstração está completa.

2.12. Exemplo. O intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um compacto.

Para provarmos esta afirmação, aplicamos o Critério de Compacidade **2.11**. Tomamos uma sequência $p_n \in [a, b] = I_0$, $n \in \mathbb{N}$. Fazemos $n_0 = 0$. Dividimos o intervalo em dois intervalos iguais $\big[a, (a+b)/2\big]$ e $\big[(a+b)/2, b\big]$. Pelo menos um dos intervalos, $\big[a, (a+b)/2\big]$ ou $\big[(a+b)/2, b\big]$, contém um número infinito de termos da sequência. Denotâmo-lo I_1 e escolhamos $p_{n_1} \in I_1$, $n_1 > n_0$. Dividimos, de maneira similar, o intervalo I_1 e obtemos um intervalo I_2 que contém um número infinito de termos da sequência. Escolhemos $n_2 > n_1$ tal que $p_{n_2} \in I_2 \ldots$ Enfim obtemos uma cadeia de intervalos $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset \ldots$ cuja interseção $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é o conjunto unitário $\{p\}$.[17] Obtemos também uma subsequência $p_{n_m} \in I_m$, $m \in \mathbb{N}$. O ponto p é o limite da subsequência, pois $|p_{n_m} - p\,| \leq \dfrac{b-a}{2^m}$. (Note que $\dfrac{b-a}{2^m}$ é o comprimento do intervalo I_m e $p, p_{n_m} \in I_m$.)



2.13. Qualquer subconjunto fechado S de um compacto K, $S \subset K$, é um compacto.

Com efeito: dada uma cobertura aberta de S, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \supset S$, fazemos $U = \mathbb{C} \setminus S$. O conjunto U é aberto e os conjuntos U e U_α, $\alpha \in I$, formam uma cobertura aberta de K. Logo, podemos escolher uma subcobertura finita $U, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ de K, $U \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k} \supset K$. Como $K \supset S$ e $S \cap U = \varnothing$, concluímos que $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k} \supset S$.

Dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é *limitado* se existir uma constante $L > 0$ tal que $|p| \leq L$ para todo $p \in S$.

2.14. Critério de Compacidade. *Um conjunto $K \subset \mathbb{C}$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.*

Demonstração. Seja K um compacto. Toda subsequência de qualquer sequência convergente é convergente e tem o mesmo limite. Portanto, pelos Critério de Fechamento **2.8** e Critério de Compacidade **2.11**, K é fechado. Suponhamos que, entretanto, K não seja limitado. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in K$ tal que $|p_n| > n$. Pelo Critério de Compacidade **2.11**, existe uma subsequência p_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, convergente a um ponto $p \in K$, $\lim\limits_{m\to\infty} p_{n_m} = p$. Pela Proposição **2.7**, $|p| = \Big|\lim\limits_{m\to\infty} p_{n_m}\Big| = \lim\limits_{m\to\infty} |p_{n_m}|$. Mas $|p_{n_m}| > n_m$. Esta contradição implica que K é limitado.

Recíproca. Seja dado um conjunto K, fechado e limitado. Neste caso, $K \subset [-L, L] \times [-L, L]$ para algum $L > 0$. Por **2.13**, é suficiente provar que $[-L, L] \times [-L, L]$ é compacto, pois K é fechado.

[17] Quando você recebe um presente muito bem embrulhado em sucessivas camadas, existe a esperança, sempre realizada, de encontrar algo no final, se os pacotes estiverem fechados. (Essa é uma conhecida propriedade dos números reais: a interseção de intervalos fechados encaixados não é vazia.) A esperança diminui muito, se os pacotes estivessem abertos — o presente poderia ter sido “roubado”. Mostre que isto pode ocorrer.

Tomamos qualquer sequência $p_n = x_n + iy_n \in [-L, L] \times [-L, L]$, $n \in \mathbb{N}$. Pelo Exemplo **2.12**, o intervalo $[-L, L]$ é compacto em $\mathbb{R}$. Consequentemente, podemos encontrar uma subsequência x_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, com $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = x \in [-L, L]$. Aplicando o mesmo argumento à sequência y_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma subsequência $y_{n_{m_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, com $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_{m_k}} = y \in [-L, L]$. Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{m_k}} = x$ e $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_{m_k}} = y$. Pela Proposição **2.7**, $\lim\limits_{k\to\infty} p_{n_{m_k}} = x + iy \in [-L, L] \times [-L, L]$. A demonstração está completa.

2.15. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto e U_α, $\alpha \in I$, uma cobertura aberta de S. Dizemos que a cobertura possui *raio* de *Lebesgue*[18] $r > 0$ se, para todo ponto $p \in S$, existir um membro da cobertura U_α que contém o disco aberto de raio r centrado em p, $\Delta(p, r) \subset U_\alpha$.

2.16. Lema. *Qualquer cobertura aberta de qualquer compacto possui raio de Lebesgue.*

Demonstração. Sejam $K \subset \mathbb{C}$ um compacto e U_α, $\alpha \in I$, uma cobertura aberta de K. Sabendo que $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, constatamos que, para todo $q \in K$, existe $\alpha(q) \in I$ tal que $q \in U_{\alpha(q)}$. Sendo aberto, $U_{\alpha(q)}$ contém um disco centrado em q : existe $0 < r(q) \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta\big(q, r(q)\big) \subset U_{\alpha(q)}$. A inclusão $K \subset \bigcup\limits_{q\in K} \Delta\big(q, r(q)/2\big)$ produz uma cobertura aberta de K. Existe $\Delta\big(q_1, r(q_1)/2\big), \dots, \Delta\big(q_k, r(q_k)/2\big)$ que é uma sua subcobertura finita de K, $K \subset \Delta\big(q_1, r(q_1)/2\big) \cup \dots \cup \Delta\big(q_k, r(q_k)/2\big)$. Seja $r = \min\big\{r(q_1)/2, \dots, r(q_k)/2\big\}$. Obviamente, $r > 0$. Provaremos que r é raio de Lebesgue da cobertura original U_α, $\alpha \in I$. Tomando um ponto $p \in K$ qualquer, teremos $p \in \Delta\big(q_j, r(q_j)/2\big)$ para algum j, $1 \le j \le k$. Resta apenas concluir que $\Delta(p, r) \subset U_{\alpha(q_j)}$. Seja $q \in \Delta(p, r)$ um ponto arbitrário: $|q - p| < r$. É válida a sucessão de desigualdades $|q - q_j| \le |q - p| + |p - q_j| < r + r(q_j)/2 \le r(q_j)/2 + r(q_j)/2 = r(q_j)$. Daí, $q \in \Delta\big(q_j, r(q_j)\big) \subset U_{\alpha(q_j)}$. Portanto, $\Delta(p, r) \subset U_{\alpha(q_j)}$ e a demonstração está completa.

2.17. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ (ou $S \subset \mathbb{R}$), seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função e sejam $c, p \in \mathbb{C}$. Dizemos que $f(s)$ *tende a* c *quando* $s \in S$ *tende a* p, e escrevemos $\lim\limits_{S\ni s\to p} f(s) = c$ (ou simplesmente $\lim\limits_{s\to p} f(s) = c$), se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que a desigualdade $\big|f(s) - c\big| < \varepsilon$ vale toda vez que $s \in S$ satisfaz a desigualdade $|s - p| < \delta(\varepsilon)$.

2.18. Critério. *Seja $S \subset \mathbb{C}$ (ou $S \subset \mathbb{R}$), seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função e sejam $c, p \in \mathbb{C}$. Então $\lim\limits_{S\ni s\to p} f(s) = c$ se, e somente se, para qualquer sequência $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, convergente a p, temos $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = c$.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim\limits_{S\ni s\to p} f(s) = c$. Seja $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$. Devemos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = c$. Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Pela Definição **2.17**, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\big|f(s) - c\big| < \varepsilon$ para todo $s \in S$ com $|s - p| < \delta(\varepsilon)$. Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$, podemos encontrar $n\big(\delta(\varepsilon)\big) \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - p| < \delta(\varepsilon)$ para todo $n \ge n\big(\delta(\varepsilon)\big)$. Portanto, para os mesmos n's, $\big|f(s_n) - c\big| < \varepsilon$. Isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = c$.

Reciprocamente: suponhamos que, para qualquer sequência $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$, vale $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = c$. Argumentando por absurdo, suponhamos que, entretanto, $f(s)$ não tenda a c, quando $s \in S$ tende a p. Neste caso, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, podemos encontrar $s(\delta) \in S$, para o qual $\big|s(\delta) - p\big| < \delta$, mas $\Big|f\big(s(\delta)\big) - c\Big| \ge \varepsilon$. Pela liberdade de escolha, tomemos δ da forma $\delta = 1/(n+1)$. Façamos $s_n = s\big(1/(n+1)\big)$ $\big(= s(\delta)\big)$. Obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$, pois $|s_n - p| = \big|s(\delta) - p\big| < \delta = 1/(n+1)$.

[18] Note que raio de Lebesgue é estritamente positivo.

Entretanto, $\left|f(s_n) - c\right| \geq \varepsilon > 0$. Uma contradição com o fato assumido de que $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = c$. A demonstração está completa.

2.19. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ (ou $S \subset \mathbb{R}$), seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função e seja $p \in S$. A função $f : S \to \mathbb{C}$ é dita *contínua no ponto* $p \in S$ se $\lim\limits_{S \ni s \to p} f(s) = f(p)$. A função $f : S \to \mathbb{C}$ é dita *contínua* se for contínua em todos os pontos de S.

Um exemplo trivial: qualquer função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ é contínua. Realmente, para verificarmos a Definição **2.19** com o uso do Critério **2.18**, tomaríamos uma sequência convergente de inteiros. A verificação então seria trivial, pois não existe nenhuma sequência convergente de inteiros além das triviais.[19]

2.20. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ (ou $S \subset \mathbb{R}$). Qualquer subconjunto $V \subset S$ do tipo $V = S \cap U$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é aberto, é dito (*relativamente*) *aberto em* S. Qualquer subconjunto $Y \subset S$ do tipo $Y = S \cap X$, onde $X \subset \mathbb{C}$ é fechado, é dito (*relativamente*) *fechado em* S. Seja $p \in S$. Qualquer subconjunto $V \subset S$ do tipo $V = S \cap U$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é uma vizinhança aberta de p, é dito *vizinhança de* p *aberta em* S.

É fácil verificar que conjuntos abertos (fechados) em S satisfazem os análogos dos axiomas A1–A4 (F1–F4). Também os conjuntos fechados e abertos em S são complementares uns dos outros em S.

Um exemplo trivial: caso $S = \mathbb{Z}$, todo subconjunto de S é fechado e é aberto.

2.21. Critérios de Continuidade. 1. *Seja* $S \subset \mathbb{C}$ *(ou* $S \subset \mathbb{R}$*), seja* $f : S \to \mathbb{C}$ *uma função e seja* $p \in S$*. Então as seguintes propriedades são equivalentes*:

(1) f *é contínua em* p.

(2) *A* f*-pré-imagem de qualquer vizinhança aberta de* $f(p)$ *contém uma vizinhança de* p *aberta em* S.

(3) *Para qualquer sequência* $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, *convergente a* p, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$, *a sequência* $f(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *converge a* $f(p)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = f(p)$.

2. *Seja* $S \subset \mathbb{C}$ *(ou* $S \subset \mathbb{R}$*) e seja* $f : S \to \mathbb{C}$ *uma função. Então as seguintes propriedades são equivalentes*:

(1) f *é contínua.*

(2) *A* f*-pré-imagem de qualquer conjunto aberto é um subconjunto aberto em* S.

(3) *A* f*-pré-imagem de qualquer conjunto fechado é um subconjunto fechado em* S.

(4) *Para qualquer sequência* $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, *convergente a um ponto de* S, *a sequência* $f(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *é convergente e* $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = f\big(\lim\limits_{n\to\infty} s_n\big)$.

Demonstração. 1. (1) $\Longrightarrow$ (2). Seja $W \subset \mathbb{C}$ uma vizinhança aberta de $f(p)$, $f(p) \in W$. Tomemos $\Delta\big(f(p), \varepsilon\big) \subset W$, sendo $\varepsilon > 0$. Por f ser contínua em p, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|s - p| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \big|f(s) - f(p)\big| < \varepsilon$ para todo $s \in S$. Em outras palavras: se $q \in S \cap \Delta\big(p, \delta(\varepsilon)\big)$, então $f(q) \in \Delta\big(f(p), \varepsilon\big)$. Ou seja, $f\Big(S \cap \Delta\big(p, \delta(\varepsilon)\big)\Big) \subset \Delta\big(f(p), \varepsilon\big)$. Assim, $f\Big(S \cap \Delta\big(p, \delta(\varepsilon)\big)\Big) \subset W$. Isto é, $p \in S \cap \Delta\big(p, \delta(\varepsilon)\big) \subset f^{-1}(W)$ e, portanto, $S \cap \Delta\big(p, \delta(\varepsilon)\big)$ é a vizinhança desejada.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Tomemos uma sequência $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p \in S$. Para demonstrarmos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = f(p)$, partindo da propriedade (2), usaremos a Definição **2.6′**. Seja $W \ni f(p)$ uma vizinhança aberta de $f(p)$. Pela propriedade (2), existe V, uma vizinhança de p aberta em S, $p \in V \subset S$, tal que $V \subset f^{-1}(W)$, isto é, $f(V) \subset W$. Pela Definição **2.20**, $V = S \cap U$, onde U é uma vizinhança aberta de p. Logo, $f(S \cap U) \subset W$. Como U é uma vizinhança aberta de p e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$, então $s_n \in U$ para todo $n \geq n(U)$. Daí, $f(s_n) \in W$ para todo $n \geq n(U)$. Assim, para qualquer vizinhança aberta

[19] Na Matemática, de uma afirmação falsa conclui-se qualquer tipo de afirmação. Por exemplo: por ser a baleia um peixe, conclui-se que ela é minha avó.

W de $f(p)$, encontramos $n(W)$ $(= n(U))$ exigido na Definição **2.6′**, quando aplicada à sequência $f(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\iff$ (1). Vejamos finalmente que a propriedade (3) é equivalente à propriedade (1). Isto decorre imediatamente da Definição **2.19** e do Critério **2.18**.[20]

2. (1) $\Longrightarrow$ (2). Seja $W \subset \mathbb{C}$ aberto. W é uma vizinhança aberta de $f(p)$ para qualquer $p \in f^{-1}(W)$. A função f é contínua em p. Pelo ítem **1** que acabamos de demonstrar, existe V_p, vizinhança de p aberta em S, tal que $p \in V_p \subset f^{-1}(W)$. Pela Definição **2.20**, V_p tem a forma $V_p = S \cap U_p$, onde U_p é uma vizinhança aberta de p. Como é aberto o conjunto $U = \bigcup\limits_{p \in f^{-1}(W)} U_p$, é suficiente provar que $f^{-1}(W) = S \cap U$, pois isto significa que $f^{-1}(W)$ é aberto em S de acordo com a Definição **2.20**. Primeiramente provaremos que $f^{-1}(W) \subset S \cap U$. As inclusões $f^{-1}(W) \subset S$ e $f^{-1}(W) \subset U$ são triviais; a segunda vale, pois, para qualquer $p \in f^{-1}(W)$, temos $p \in U_p \subset U$. Portanto, $f^{-1}(W) \subset S \cap U$. Agora provaremos que $f^{-1}(W) \supset S \cap U$. Tomemos $q \in S \cap U$, qualquer. De $q \in U$ segue que $q \in U_p$ para algum $p \in f^{-1}(W)$. Daí, $q \in S \cap U_p = V_p$. A inclusão, conhecida, $V_p \subset f^{-1}(W)$ implica $q \in f^{-1}(W)$. Assim, $f^{-1}(W) \supset S \cap U$. De $f^{-1}(W) \subset S \cap U$ e de $f^{-1}(W) \supset S \cap U$ concluímos que $f^{-1}(W) = S \cap U$.

(2) $\iff$ (3) segue das fórmulas $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus U) = f^{-1}(\mathbb{C}) \setminus f^{-1}(U) = S \setminus f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus X) = f^{-1}(\mathbb{C}) \setminus f^{-1}(X) = S \setminus f^{-1}(X)$ aplicadas aos conjuntos U (aberto) e X (fechado).

(2) $\Longrightarrow$ (4) e (4) $\Longrightarrow$ (1). Essas implicações decorrem imediatamente de uma aplicação direta do ítem **1**.

A demonstração está completa.

2.22. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função. A função f é formada por suas partes real e imaginária, $f_0 = \operatorname{Re} f : S \to \mathbb{R}$ e $f_1 = \operatorname{Im} f : S \to \mathbb{R}$, isto é, $f(s) = f_0(s) + i \cdot f_1(s)$ para todo $s \in S$. Pela Proposição **2.7** e pelo Critério **2.18**, fica claro que $\lim\limits_{S \ni s \to p} f(s) = c$ se, e somente se, $\lim\limits_{S \ni s \to p} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} c$ e $\lim\limits_{S \ni s \to p} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} c$. Em particular, a função f é contínua (em $p \in S$) se, e somente se, $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são contínuas (em p).

2.23. Proposição. *Sejam duas funções $f : S \to \mathbb{C}$ e $g : T \to \mathbb{C}$, $S, T \subset \mathbb{C}$; seja $p \in S$ e seja $f(S) \subset T$. Suponhamos que f seja contínua em p e que g seja contínua em $q = f(p)$. Então a* composição $g \circ f : S \to \mathbb{C}$, *definida pela regra $g \circ f : s \mapsto g\big(f(s)\big)$, será contínua em p. Se f e g forem contínuas, a composição será contínua.*

Demonstração. Apliquemos o Critério de Continuidade **2.21.1**(2). Seja W uma vizinhança aberta de $g\big(f(p)\big)$, $g\big(f(p)\big) \in W$. Sendo g contínua em $q = f(p)$, existe V, vizinhança de q aberta em T, $q \in V \subset T$, tal que $q = f(p) \in V \subset g^{-1}(W)$. Pela Defnição **2.20**, $V = T \cap U$, onde U é uma vizinhança aberta de q. Uma vez que f é contínua em p e que $f(p) \in U$, existe H, vizinhança de p aberta em S, tal que $p \in H \subset f^{-1}(U)$. Assim, $f(H) \subset T \cap U = V$ e $g(V) \subset W$. Logo, $g\big(f(H)\big) \subset W$. Isto é, $p \in H \subset (g \circ f)^{-1}(W)$ e H é a desejada vizinhança de p aberta em S. A segunda afirmação obviamente segue da primeira e da Definição **2.19**. A demonstração está completa.

Sejam dados: um conjunto $S \subset \mathbb{C}$, uma função $f : S \to \mathbb{C}$ e um subconjunto $S' \subset S$. Chama-se *restrição de f a S'* a função $f|_{S'} : S' \to \mathbb{C}$ definida por $f|_{S'} : s' \mapsto f(s')$.

2.24. Proposição. *Sejam dados $S \subset \mathbb{C}$ e $f : S \to \mathbb{C}$; seja $S = S' \cup S''$, onde S' e S'' são fechados em S. Se as restrições $f|_{S'}$ e $f|_{S''}$ forem contínuas, f será contínua.*

Demonstração. Pela Definição **2.20**, $S' = S \cap X'$ e $S'' = S \cap X''$, onde $X', X'' \subset \mathbb{C}$ são fechados. Apliquemos o Critério de Continuidade **2.21.2**(4). Seja $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a

[20] Aqui vai uma dica, que é útil em geral, para o leitor que possa ter dúvidas ao completar a verificação: procure extrair a essência, o sentido integral, ou seja, a síntese de cada um dos critérios, definições e afirmações envolvidos.

um ponto s de S, $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in S$. Enfrentamos duas alternativas evidentes: ou apenas um número finito de termos da sequência pertence a S', ou um número infinito de termos pertence a S'. As mesmas alternativas valem para S''. O caso em que ambos S' e S'' contêm um número finito de termos da sequência não é possível. Portanto, consideraremos as variantes seguintes (sem perda de generalidade, podemos trocar os papéis de S' e S'') :

(1) ambos S' e S'' contêm um número infinito de termos da sequência; denotemos por $s'_m \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, e $s''_m \in S''$, $m \in \mathbb{N}$, as respetivas subsequências.
(2) S' contém um número infinito de termos da sequência, mas S'' contém apenas um número finito de termos da sequência; denotemos por $s'_m \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, a respetiva subsequência.

(1) Temos $s'_m \in X'$ e $\lim_{m\to\infty} s'_m = s$. Sendo X' fechado, $s \in X'$. Como $s \in S$, obtemos $s \in S \cap X' = S'$. Pelo Critério de Continuidade **2.21.2**(4), o fato de $f|_{S'}$ ser contínua implica $\lim_{m\to\infty} f(s'_m) = f(s)$. De maneira semelhante, obtemos $\lim_{m\to\infty} f(s''_m) = f(s)$. A sequência $f(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sendo a junção das suas subsequências $f(s'_m)$, $m \in \mathbb{N}$, e $f(s''_m)$, $m \in \mathbb{N}$, convergentes a $f(s)$, também convergirá e $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$.

(2) Como acima, concluímos que $\lim_{m\to\infty} f(s'_m) = f(s)$. Sendo distintas somente por um número finito de termos, as sequências $f(s'_m)$, $m \in \mathbb{N}$, e $f(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, têm o mesmo limite, $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$.

A demonstração está completa.

Demonstração mágica. Pela Definição **2.20**, $S' = S \cap X'$ e $S'' = S \cap X''$, onde $X', X'' \subset \mathbb{C}$ são fechados. Apliquemos o Criterio de Continuidade **2.21.2**(3). Seja $Z \subset \mathbb{C}$ fechado. Temos que $\big(f|_{S'}\big)^{-1}(Z) = S' \cap f^{-1}(Z)$ é fechado em S' e que $\big(f|_{S''}\big)^{-1}(Z) = S'' \cap f^{-1}(Z)$ é fechado em S''. Pela Definição **2.20**, $S' \cap f^{-1}(Z) = S' \cap Y'$ e $S'' \cap f^{-1}(Z) = S'' \cap Y''$, onde $Y', Y'' \subset \mathbb{C}$ são fechados. De $f^{-1}(Z) = S \cap f^{-1}(Z) = (S' \cup S'') \cap f^{-1}(Z) = \big(S' \cap f^{-1}(Z)\big) \cup \big(S'' \cap f^{-1}(Z)\big)$, conclui-se que $f^{-1}(Z) = (S' \cap Y') \cup (S'' \cap Y'') = (S \cap X' \cap Y') \cup (S \cap X'' \cap Y'') = S \cap \big((X' \cap Y') \cup (X'' \cap Y'')\big)$. Pelos axiomas F2–F3, $(X' \cap Y') \cup (X'' \cap Y'')$ é fechado. Portanto, $f^{-1}(Z)$ é fechado em S.

A demonstração mágica está completa.

2.25. Proposição. *Seja $S \subset \mathbb{C}$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função. Suponhamos que, para todo $p \in S$, exista uma vizinhança V_p de p aberta em S, $p \in V_p \subset S$, tal que a restrição $f|_{V_p} : V_p \to \mathbb{C}$ seja uma função contínua em V_p. Então a função f será contínua em S.*[21]

Demonstração. Temos $S = \bigcup_{p\in S} V_p$. Existem conjuntos abertos $U_p \subset \mathbb{C}$, $p \in S$, tais que $V_p = S \cap U_p$. Daí, $S \subset \bigcup_{p\in S} U_p$. Vamos aplicar o Critério de Continuidade **2.21.2**(2). Para tanto, tomamos um conjunto aberto qualquer $U \subset \mathbb{C}$ e provaremos que $f^{-1}(U)$ é aberto em S. Para todo $p \in S$, a função $f|_{V_p} : V_p \to \mathbb{C}$ é contínua. Pelo mesmo Critério de Continuidade **2.21.2**(2), $\big(f|_{V_p}\big)^{-1}(U) = V_p \cap f^{-1}(U) = S \cap U_p \cap f^{-1}(U)$ é aberto em V_p. Consequentemente, $\big(f|_{V_p}\big)^{-1}(U) = V_p \cap W_p$ para um conjunto aberto apropriado $W_p \subset \mathbb{C}$. Portanto, $S \cap U_p \cap f^{-1}(U) = S \cap U_p \cap W_p$ para todo $p \in S$. Finalmente, de $f^{-1}(U) \subset S \subset \bigcup_{p\in S} U_p$ segue $f^{-1}(U) = S \cap \Big(\bigcup_{p\in S} U_p\Big) \cap f^{-1}(U) = \bigcup_{p\in S} S \cap U_p \cap f^{-1}(U) = \bigcup_{p\in S} S \cap U_p \cap W_p = S \cap \Big(\bigcup_{p\in S} U_p \cap W_p\Big)$, onde $\bigcup_{p\in S} U_p \cap W_p$ é aberto pelos axiomas A2–A3. A demonstração está completa.

2.26. Exercícios. 1. Seja $c \in \mathbb{C}$. Prove que é contínua a *função constante* $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $c : z \mapsto c$.

[21] Isto indica que a propriedade "ser contínua" é local.

2. Prove que é contínua a *função idéntidade* $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} : z \mapsto z$.

3. Prove que é contínua a função "parte real" $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Re} : z \mapsto \mathrm{Re}\, z$.

4. Prove que é contínua a função "parte imaginária" $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im} : z \mapsto \mathrm{Im}\, z$.

5. Prove que é contínua a função "módulo" $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $|\ | : z \mapsto |z|$.

6. Seja $S \subset \mathbb{C}$, seja $p \in S$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas em $p \in S$. Prove que é contínua em p a função $f + g : S \to \mathbb{C}$ definida por $f + g : s \mapsto f(s) + g(s)$.

7. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas. Prove que é contínua a função $f + g : S \to \mathbb{C}$.

8. Seja $S \subset \mathbb{C}$, seja $p \in S$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas em $p \in S$. Prove que é contínua em p a função $f \cdot g : S \to \mathbb{C}$ definida por $f \cdot g : s \mapsto f(s) \cdot g(s)$.

9. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas. Prove que é contínua a função $f \cdot g : S \to \mathbb{C}$.

10. Prove que é contínua a função "conjugação" $\overline{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\overline{\ } : z \to \overline{z}$.

11. Prove que é contínua a função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp : z \to e^z$.

12. Seja $S \subset \mathbb{C}$, seja $p \in S$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua em $p \in S$. Denotemos por $\overline{f} : S \to \mathbb{C}$ a função *conjugada de* f definida por $\overline{f} : s \mapsto \overline{f(s)}$. Prove que $\overline{f}$ é contínua em p.

13. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Prove que é contínua a função $\overline{f} : S \to \mathbb{C}$.

14. Seja $S \subset \mathbb{C}$, seja $p \in S$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas em $p \in S$. Suponhamos que $g(s) \neq 0$ para todo $s \in S$. Prove que é contínua em p a função $f/g : S \to \mathbb{C}$ definida por $f/g : s \mapsto f(s)/g(s)$.

15. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam $f, g : S \to \mathbb{C}$ funções contínuas. Suponhamos que $g(s) \neq 0$ para todo $s \in S$. Prove que é contínua a função $f/g : S \to \mathbb{C}$.

16. Sejam $S' \subset S \subset \mathbb{C}$, seja $p \in S'$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua em p. Prove que é contínua em p a restrição $f|_{S'}$ de f a S'.

17. Sejam $S' \subset S \subset \mathbb{C}$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Prove que a restrição $f|_{S'} : S' \to \mathbb{C}$ é contínua.

Para ilustrar, apresentamos uma sugestão de resolução do Exercício **2.26.14**.

Uma vez que $f/g = f \cdot \overline{g} \cdot \dfrac{1}{g \cdot \overline{g}}$ e, usando os Exercícios **2.26.8** e **2.26.12**, é suficiente provarmos que a função $\dfrac{1}{g \cdot \overline{g}}$ é contínua em p. Essa função é a composição da função $g \cdot \overline{g} : S \to \mathbb{C}$ com a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h : x \mapsto 1/x$. A função $u = g \cdot \overline{g}$ é contínua em p, resultado dos Exercícios **2.26.8** e **2.26.12**. É fato conhecido que a função h é contínua. Resta só observar que $u(S) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (o que é válido, pois $g(s) \neq 0$ para todo $s \in S$) e aplicar a Proposição **2.23**.

As afirmações dos Exercícios **2.26** serão utilizadas a seguir e em toda exposição posterior. Sugerimos, assim, que o leitor as recorde.

2.27. A união de dois compactos é um compacto pelo axioma F3 e pelo Critério de Compacidade **2.14**.

2.28. O disco fechado $\overline{\Delta}(p, r)$ é compacto.

Com efeito, $\overline{\Delta}(p, r)$ é obviamente limitado. Pelo Critério de Compacidade **2.14**, resta provar que $\overline{\Delta}(p, r)$ é fechado. Consideremos a função $|* - p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $|* - p| : z \mapsto |z - p|$. Pelos Exercícios **2.26.1**, **2.26.9**, **2.26.7** e **2.26.5** essa função é contínua. A pré-imagem do intervalo $[0, r]$ com relação à função "módulo" é exatamente $\overline{\Delta}(p, r)$. Pelo Exemplo **2.12**, $[0, r]$ é compacto. Pelo Critério de Compacidade **2.14**, $[0, r]$ é fechado. Pelo Critério de Continuidade **2.21.2**(3), $\overline{\Delta}(p, r)$ é fechado.

2.29. Lema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $K \subset D$ um compacto. Então existem um conjunto aberto $D' \subset \mathbb{C}$ e um compacto $K' \subset \mathbb{C}$ tais que $K \subset D' \subset K' \subset D$.*

Demonstração. Para qualquer $p \in K$ existe um disco aberto contido em D com centro p, isto é, $\Delta\big(p, r(p)\big) \subset D$ com $r(p) > 0$. Obviamente, os discos abertos $\Delta\big(p, r(p)/2\big)$, $p \in K$, formam uma cobertura aberta de K, $\bigcup\limits_{p \in K} \Delta\big(p, r(p)/2\big) \supset K$. Existe uma subcobertura finita de K: para $p_1, \dots, p_n \in K$ apropriados, obtemos $K \subset \Delta\big(p_1, r(p_1)/2\big) \cup \dots \cup \Delta\big(p_n, r(p_n)/2\big) = D'$. O conjunto D' é aberto como união de discos abertos. Por **2.27**, a união finita de compactos é um compacto. Assim, por **2.28**, o conjunto $K' = \overline{\Delta}\big(p_1, r(p_1)/2\big) \cup \dots \cup \overline{\Delta}\big(p_n, r(p_n)/2\big)$ é compacto. Obviamente, $D' = \Delta\big(p_1, r(p_1)/2\big) \cup \dots \cup \Delta\big(p_n, r(p_n)/2\big) \subset \overline{\Delta}\big(p_1, r(p_1)/2\big) \cup \dots \cup \overline{\Delta}\big(p_n, r(p_n)/2\big) = K'$ e $K' = \overline{\Delta}\big(p_1, r(p_1)/2\big) \cup \dots \cup \overline{\Delta}\big(p_n, r(p_n)/2\big) \subset \Delta\big(p_1, r(p_1)\big) \cup \dots \cup \Delta\big(p_n, r(p_n)\big) \subset D$. A demonstração está completa.

2.30. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ (ou $S \subset \mathbb{R}$). Uma função $f : S \to \mathbb{C}$ é dita *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\big|f(s_1) - f(s_2)\big| < \varepsilon$ desde que $s_1, s_2 \in S$ satisfaçam $|s_1 - s_2| < \delta(\varepsilon)$. (Note que $\delta(\varepsilon)$ não depende de $s_1, s_2 \in S$.)

2.31. Teorema. *Sejam $K \subset \mathbb{C}$ (ou $K \subset \mathbb{R}$) um compacto e $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para qualquer ponto $p \in K$, existe $\delta(p, \varepsilon) > 0$ tal que $\big|f(q) - f(p)\big| < \varepsilon/2$ se $q \in K$ e $|q - p| < \delta(p, \varepsilon)$. Os discos $\Delta\big(p, \delta(p, \varepsilon)\big)$, $p \in K$, formam uma cobertura aberta de K. Pelo Lema **2.16**, a cobertura possui raio de Lebesgue $\delta > 0$. Sejam $q_1, q_2 \in K$ com $|q_1 - q_2| < \delta$. Provemos que $\big|f(q_1) - f(q_2)\big| < \varepsilon$. Pela Definição **2.15**, aplicada ao ponto $q_2 \in K$, existe um membro da cobertura $\Delta\big(p, \delta(p, \varepsilon)\big)$ tal que $\Delta(q_2, \delta) \subset \Delta\big(p, \delta(p, \varepsilon)\big)$. Como $q_1, q_2 \in \Delta(q_2, \delta)$ e a desigualdade $\big|f(q) - f(p)\big| < \varepsilon/2$ é válida para todo ponto $q \in \Delta\big(p, \delta(p, \varepsilon)\big)$, então $\big|f(q_1) - f(p)\big| < \varepsilon/2$ e $\big|f(p) - f(q_2)\big| < \varepsilon/2$, o que implica $\big|f(q_1) - f(q_2)\big| \leq \big|f(q_1) - f(p)\big| + \big|f(p) - f(q_2)\big| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. A demonstração está completa.

2.32. Proposição. *Seja $K \subset \mathbb{C}$ (ou $K \subset \mathbb{R}$) um compacto e seja $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então a imagem $f(K)$ é compacta.*

Demonstração. Seja W_α, $\alpha \in I$, uma cobertura aberta de $f(K)$, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha \supset f(K)$. O conjunto $V_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$ é aberto em K pelo Critério de Continuidade **2.21.2**(2) e, portanto, tem a forma $V_\alpha = K \cap U_\alpha$ com U_α aberto. Como $\bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha \supset f(K)$, então (vide Capítulo **0**) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(W_\alpha) \supset K$ e $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \supset K$. Em outras palavras, U_α, $\alpha \in I$, é uma cobertura aberta de K. Seja $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}$ uma subcobertura finita de K. Provemos que $W_{\alpha_1} \cup \dots \cup W_{\alpha_k} \supset f(K)$. Dado $q \in f(K)$, então $q = f(p)$ para algum $p \in K$. Como $p \in U_{\alpha_j}$ para j apropriado, então $p \in K \cap U_{\alpha_j} = V_{\alpha_j} = f^{-1}(W_{\alpha_j})$. Isto é, $q = f(p) \in W_{\alpha_j}$. A demonstração está completa.

2.33. Teorema. *Seja $K \subset \mathbb{C}$ (ou $K \subset \mathbb{R}$) um compacto não-vazio e seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $p_0, p_1 \in K$ tais que $f(p_0) \leq f(p) \leq f(p_1)$ para qualquer $p \in K$.*

Demonstração. Pela Proposição **2.32**, $f(K) \subset \mathbb{R}$ é um compacto. Pelo Critério de Compacidade **2.14**, $f(K)$ é fechado e limitado. Portanto, $M = \sup\{a \in f(K)\} < \infty$ e $f(p) \leq M$ para todo $p \in K$. Existe uma sequência $q_n \in f(K)$, $n \in \mathbb{N}$, convergente a M, $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = M$.[22] Sendo $f(K)$ fechado, $M \in f(K)$ pelo Critério de Fechamento **2.8**, isto é, $M = f(p_1)$ para algum $p_1 \in K$. Assim, $f(p) \leq f(p_1)$ para todo $p \in K$. De maneira semelhante, provamos existência de p_0. A demonstração está completa.

2.34. Qualquer triângulo $T \subset \mathbb{C}$ é compacto.

Obviamente, T é limitado. Pelo Critério de Compacidade **2.14**, é suficiente provar que T é fechado. Se os semiplanos forem fechados, T, sendo interseção de três semiplanos, será fechado pelo axioma F2.

[22] O supremo sempre é limite.

Qualquer semiplano S pode ser descrito como $S = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid ax + by + c \leq 0\}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pelo Critério de Continuidade **2.21.2**(3), concluímos que $S = f^{-1}(\mathbb{R}_-)$ é fechado, desde que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f : x + iy \mapsto ax + by + c$, seja contínua e desde que $\mathbb{R}_- = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$ seja fechado.

Exercícios. 1. Indique quais são fechados e quais são compactos entre os conjuntos indicados no Exercício **8** do Capítulo **1**.[23]

2. Verifique se existem os limites abaixo e calcule-os caso existam. Considere $u \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{(z+u)^n - u^n}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{e^{z+u} - e^u}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\overline{z+u} - \overline{u}}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{|z+u| - |u|}{z},$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\operatorname{Re}(z+u) - \operatorname{Re} u}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\operatorname{Im}(z+u) - \operatorname{Im} u}{z}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{z^2}{|z|}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{z}{\overline{z}}, \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\operatorname{Re} z - i \cdot \operatorname{Im} z}{\overline{z}}.$$

3. Prove que a circunferência é compacta.

4. Quais dentre as funções reais $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^2$ são uniformemente contínuas. Justifique.

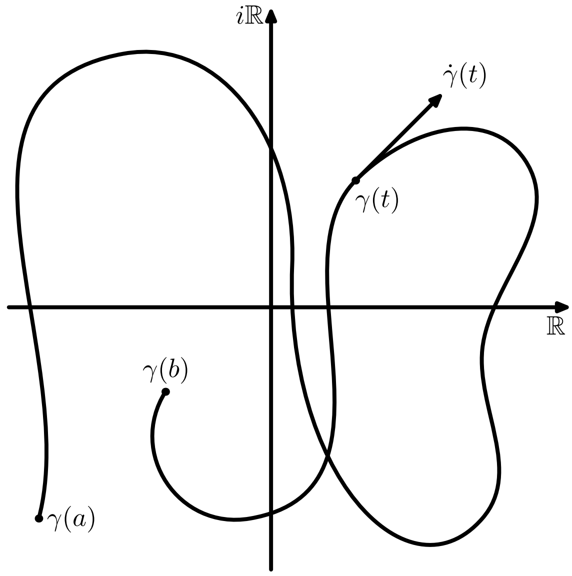
---

[23] Diz-se que o matemático é preguiçoso; provavelmente, isto se deve à constatação de que, antes de se lançar ao trabalho, ele se dedica a sonhar em “resolver sem fazer”, preferindo “pensar” 10 minutos evitando “trabalhar” duas horas. Normalmente, as pessoas, inclusive os matemáticos, gastam muito tempo trabalhando mecanicamente, evitando pensar. Este é, caro leitor, um bom momento para exercitar sua “preguiça”.

Preparai o caminho do Senhor,
endireitai as suas veredas.
Mateus 3.2

3. Nossos Caminhos para Integrar

3.1. Definição. Uma função contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ se chama *linha parametrizada* ou *caminho parametrizado.* Escrevendo $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, dizemos que t é *parâmetro.* Por **2.22**, um caminho parametrizado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é nada mais que um par de funções reais contínuas $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, onde $\gamma_0 = \operatorname{Re}\gamma$ e $\gamma_1 = \operatorname{Im}\gamma$ (isto é, $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$). Um caminho parametrizado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é dito *simples* se γ é injetiva.



Às vezes vale à pena pensar no parâmetro t como se t fosse o tempo. Com esta visão, o valor $\gamma(t)$ indica no plano a posição do ponto no momento t. Fazendo-se t variar, $\gamma(t)$ descreve o movimento do ponto no plano e, em particular, a trajetória do ponto. O limite $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ (quando existir) pode ser considerado como o *vetor velocidade* no momento $t_0 \in [a,b]$. Escrevendo $\gamma(t)$ em termos de suas partes real e imaginária, $\gamma(t) = \gamma_0(t) + i\gamma_1(t)$, vemos, por **2.22**, que o limite $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ existe se, e somente se, as derivadas

$$\frac{d\gamma_0}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma_0(t)-\gamma_0(t_0)}{t-t_0},$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma_1(t)-\gamma_1(t_0)}{t-t_0}$$

existirem. Neste caso,
$\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \dfrac{d\gamma_0}{dt}(t_0) + i\cdot\dfrac{d\gamma_1}{dt}(t_0)$. Assim, justifica-se escrevermos $\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0) = \dfrac{d\gamma_0}{dt}(t_0) + i\cdot\dfrac{d\gamma_1}{dt}(t_0)$ ou $\dot\gamma(t_0) = \dot\gamma_0(t_0) + i\cdot\dot\gamma_1(t_0)$.

3.2. Definição. Um caminho parametrizado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é dito *suave* se existir $\dot\gamma(t)$ para todo $t \in [a,b]$ e for contínua a função (velocidade) $\dot\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, chamada *derivada em t*, e definida pela regra $\dot\gamma : t \mapsto \dot\gamma(t)$. Por **2.22**, um caminho suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ não é nada mais que um par de funções reais suaves $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Um caminho suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é dito *regular* se $\dot\gamma(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Da mesma forma como fizemos para derivada, podemos extender o conceito de integral: para o caminho parametrizado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$, onde γ_0 e γ_1 são as partes real e imaginária respetivamente, façamos

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b \gamma_0(t)\,dt + i\cdot\int_a^b \gamma_1(t)\,dt.$$

3.3. Proposição. (1) *Seja $t : [c,d] \to [a,b]$ uma função suave e seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho parametrizado suave. Então a composição $\gamma \circ t : [c,d] \to \mathbb{C}$ é um caminho parametrizado suave e*

$$\frac{d(\gamma\circ t)}{ds}(s)=\dot\gamma\big(t(s)\big)\cdot\dot t(s).$$

(2) *Sejam* $\gamma,\vartheta:[a,b]\to\mathbb{C}$ *dois caminhos parametrizados suaves. Então* $\gamma+\vartheta,\gamma\cdot\vartheta,\overline{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{C}$ *são caminhos suaves e são válidas as fórmulas*:

$$\operatorname{Re}\dot\gamma=\frac{d(\operatorname{Re}\gamma)}{dt},\qquad \operatorname{Im}\dot\gamma=\frac{d(\operatorname{Im}\gamma)}{dt},\qquad \frac{d(\gamma+\vartheta)}{dt}=\dot\gamma+\dot\vartheta,\qquad \frac{d(\gamma\cdot\vartheta)}{dt}=\dot\gamma\cdot\vartheta+\gamma\cdot\dot\vartheta,\qquad \dot{\overline{\gamma}}=\overline{\dot\gamma}.$$

Se $\vartheta(t)\neq 0$ *para todo* $t\in[a,b]$, *então o caminho* $\gamma/\vartheta:[a,b]\to\mathbb{C}$ *é suave e*

$$\frac{d(\gamma/\vartheta)}{dt}=\frac{\dot\gamma\cdot\vartheta-\gamma\cdot\dot\vartheta}{\vartheta^2}.$$

(3) *Sejam* $\gamma,\vartheta:[a,b]\to\mathbb{C}$ *dois caminhos parametrizados, seja* $d\in[a,b]$ *e seja* $c\in\mathbb{C}$. *Então*

$$\operatorname{Re}\int_a^b\gamma(t)\,dt=\int_a^b\operatorname{Re}\gamma(t)\,dt,\qquad \operatorname{Im}\int_a^b\gamma(t)\,dt=\int_a^b\operatorname{Im}\gamma(t)\,dt,\qquad \int_a^b c\gamma(t)\,dt=c\int_a^b\gamma(t)\,dt,$$

$$\int_a^b\big(\gamma(t)+\vartheta(t)\big)\,dt=\int_a^b\gamma(t)\,dt+\int_a^b\vartheta(t)\,dt,\qquad \int_a^b\gamma(t)\,dt=\int_a^d\gamma(t)\,dt+\int_d^b\gamma(t)\,dt.$$

(4) *Sejam* $\gamma,\vartheta:[a,b]\to\mathbb{C}$ *dois caminhos parametrizados suaves. Então*

$$\int_a^b\dot\gamma(t)\,dt=\gamma(b)-\gamma(a),\qquad \int_a^b\gamma(t)\cdot\dot\vartheta(t)\,dt=\gamma(b)\cdot\vartheta(b)-\gamma(a)\cdot\vartheta(a)-\int_a^b\dot\gamma(t)\cdot\vartheta(t)\,dt.$$

(5) *Seja* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ *um caminho parametrizado e seja* $t:[c,d]\to[a,b]$ *uma função real e suave tal que* $t(c)=a$ *e* $t(d)=b$. *Então*

$$\frac{d}{ds}\int_a^s\gamma(t)\,dt=\gamma(s),\qquad \int_c^d\gamma\big(t(s)\big)\cdot\dot t(s)\,ds=\int_a^b\gamma(t)\,dt.$$

(6) *Seja* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ *um caminho parametrizado. Então*

$$\Big|\int_a^b\gamma(t)\,dt\Big|\le\int_a^b\big|\gamma(t)\big|\,dt.$$

Demonstração. (1) Escrevendo-se $\gamma=\gamma_0+i\gamma_1$, vemos que $\gamma\circ t=\gamma_0\circ t+i\cdot(\gamma_1\circ t)$. Aplicando-se a regra da cadeia para funções reais, obtemos

$$\frac{d(\gamma\circ t)}{ds}(s)=\frac{d(\gamma_0\circ t)}{ds}(s)+i\cdot\frac{d(\gamma_1\circ t)}{ds}(s)=\dot\gamma_0\big(t(s)\big)\cdot\dot t(s)+i\cdot\dot\gamma_1\big(t(s)\big)\cdot\dot t(s)=\dot\gamma\big(t(s)\big)\cdot\dot t(s).$$

(2) As duas primeiras fórmulas já são conhecidas. Escrevendo-se $\gamma=\gamma_0+i\gamma_1$ e $\vartheta=\vartheta_0+i\vartheta_1$, vemos que

$$\gamma+\vartheta=(\gamma_0+\vartheta_0)+i\cdot(\gamma_1+\vartheta_1),\qquad \gamma\cdot\vartheta=(\gamma_0\cdot\vartheta_0-\gamma_1\cdot\vartheta_1)+i\cdot(\gamma_0\cdot\vartheta_1+\gamma_1\cdot\vartheta_0),\qquad \overline{\gamma}=\gamma_0-i\gamma_1.$$

Logo,

$$\frac{d(\gamma+\vartheta)}{dt}=\frac{d(\gamma_0+\vartheta_0)}{dt}+i\cdot\frac{d(\gamma_1+\vartheta_1)}{dt}=(\dot\gamma_0+\dot\vartheta_0)+i\cdot(\dot\gamma_1+\dot\vartheta_1)=\dot\gamma+\dot\vartheta,$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\gamma\cdot\vartheta)}{dt}&=\frac{d(\gamma_0\cdot\vartheta_0-\gamma_1\cdot\vartheta_1)}{dt}+i\cdot\frac{d(\gamma_0\cdot\vartheta_1+\gamma_1\cdot\vartheta_0)}{dt}=\\&=(\dot\gamma_0\cdot\vartheta_0+\gamma_0\cdot\dot\vartheta_0-\dot\gamma_1\cdot\vartheta_1-\gamma_1\cdot\dot\vartheta_1)+i\cdot(\dot\gamma_0\cdot\vartheta_1+\gamma_0\cdot\dot\vartheta_1+\dot\gamma_1\cdot\vartheta_0+\gamma_1\cdot\dot\vartheta_0)=\\&=(\dot\gamma_0+i\dot\gamma_1)\cdot(\vartheta_0+i\vartheta_1)+(\gamma_0+i\gamma_1)\cdot(\dot\vartheta_0+i\dot\vartheta_1)=\dot\gamma\cdot\vartheta+\gamma\cdot\dot\vartheta,\end{aligned}$$

$$\dot{\overline{\gamma}} = \dot{\gamma}_0 - i\dot{\gamma}_1 = \overline{\dot{\gamma}}.$$

Suponhamos que $\vartheta(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Como $\dfrac{d(\vartheta \cdot \overline{\vartheta})}{dt} = \dot{\vartheta} \cdot \overline{\vartheta} + \vartheta \cdot \dot{\overline{\vartheta}}$ e a função $\dfrac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}}$ é a composição de duas funções reais, $h : x \mapsto 1/x$ e $\vartheta \cdot \overline{\vartheta} : t \mapsto N\bigl(\gamma(t)\bigr)$, então

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}}\Bigr) = -\frac{1}{\vartheta^2 \cdot \overline{\vartheta}^2} \cdot \frac{d(\vartheta \cdot \overline{\vartheta})}{dt} = -\frac{1}{\vartheta^2 \cdot \overline{\vartheta}^2} \cdot (\dot{\vartheta} \cdot \overline{\vartheta} + \vartheta \cdot \dot{\overline{\vartheta}}).$$

Por fatos já provados, obtemos

$$\frac{d(1/\vartheta)}{dt} = \frac{d}{dt}\Bigl(\overline{\vartheta} \cdot \frac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}}\Bigr) = \dot{\overline{\vartheta}} \cdot \frac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}} + \overline{\vartheta} \cdot \frac{d}{dt}\Bigl(\frac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}}\Bigr) =$$

$$= \dot{\overline{\vartheta}} \cdot \frac{1}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}} - \overline{\vartheta} \cdot \frac{1}{\vartheta^2 \cdot \overline{\vartheta}^2} \cdot (\dot{\vartheta} \cdot \overline{\vartheta} + \vartheta \cdot \dot{\overline{\vartheta}}) = \frac{\dot{\overline{\vartheta}}}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}} - \frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta^2} - \frac{\dot{\overline{\vartheta}}}{\vartheta \cdot \overline{\vartheta}} = -\frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta^2}.$$

Finalmente,

$$\frac{d(\gamma/\vartheta)}{dt} = \frac{d}{dt}\Bigl(\gamma \cdot \frac{1}{\vartheta}\Bigr) = \dot{\gamma} \cdot \frac{1}{\vartheta} + \gamma \cdot \frac{d}{dt}\Bigl(\frac{1}{\vartheta}\Bigr) = \dot{\gamma} \cdot \frac{1}{\vartheta} - \gamma \cdot \frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta^2} = \frac{\dot{\gamma} \cdot \vartheta - \gamma \cdot \dot{\vartheta}}{\vartheta^2}.$$

(3) De fato, as duas primeiras fórmulas constituem a definição de integral. As duas últimas são consequências óbvias dessa definição. Provemos a terceira. Não verificaremos a fórmula para $c = i$ ou para c real, pois tal verificação é imediata. Seja agora $c = u + iv$ com $u, v \in \mathbb{R}$. Então

$$\int_a^b c\gamma(t)\,dt = \int_a^b (u+iv)\gamma(t)\,dt = \int_a^b u\gamma(t)\,dt + \int_a^b iv\gamma(t)\,dt = u\int_a^b \gamma(t)\,dt + iv\int_a^b \gamma(t)\,dt = c\int_a^b \gamma(t)\,dt.$$

(4) e (5) seguem imediatamente das fórmulas correspondentes para funções de uma variável real e da definição de integral. Por exemplo, para provarmos a segunda fórmula de (4), é suficiente observarmos que a fórmula é bilinear em γ e ϑ. Assim, podemos considerar cada uma das funções γ e ϑ como sendo, ou puramente real ou puramente imaginária. A fórmula que queremos provar é conhecida no campo real. Dela deduzimos a fórmula desejada, pois a integral e a derivada comutam com a multiplicação por i.

(6) Podemos multiplicar qualquer número complexo por um outro de módulo unitário para obter um número real. Assim, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ e $c\int_a^b \gamma(t)\,dt \in \mathbb{R}$. É conhecida no campo real a desigualdade que iremos provar no campo complexo. Lançando mão dessa desigualdade e da desigualdade $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$, válida para funções reais contínuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, obtemos:

$$\Bigl|\int_a^b \gamma(t)\,dt\Bigr| = |c| \cdot \Bigl|\int_a^b \gamma(t)\,dt\Bigr| = \Bigl|c\int_a^b \gamma(t)\,dt\Bigr| = \Bigl|\mathrm{Re}\,\Bigl(c\int_a^b \gamma(t)\,dt\Bigr)\Bigr| = \Bigl|\int_a^b \mathrm{Re}\,\bigl(c\gamma(t)\bigr)\,dt\Bigr| \leq$$

$$\leq \int_a^b \Bigl|\mathrm{Re}\,\bigl(c\gamma(t)\bigr)\Bigr|\,dt \leq \int_a^b \bigl|c\gamma(t)\bigr|\,dt = \int_a^b |c| \cdot \bigl|\gamma(t)\bigr|\,dt = \int_a^b \bigl|\gamma(t)\bigr|\,dt$$

(recorde-se que $\Bigl|\mathrm{Re}\,\bigl(c\gamma(t)\bigr)\Bigr| \leq \bigl|c\gamma(t)\bigr|$ para todo $t \in [a,b]$).

A demonstração está completa.

Você pôde notar que praticamente toda a Proposição **3.3** é uma repetição de fatos conhecidos da Teoria de Funções de uma Variável Real. Não considere isso nossa culpa, pois acreditamos que "O conhecimento de qualquer objeto vem do costume de usá-lo."

3.4. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho parametrizado suave e simples. A integral

$$\mu(\gamma) = \int_a^b \bigl|\dot\gamma(t)\bigr|\, dt$$

deve fornecer o *comprimento do caminho* (intuitivamente, se consideramos t como tempo, isto é óbvio, pois $\bigl|\dot\gamma(t)\bigr|$ é o módulo de velocidade). É fácil ver que $\mu(\gamma)$ não depende da parametrização do caminho: tomemos uma função real e suave $t : [c, d] \to [a, b]$ tal que $t(c) = a$, $t(d) = b$ e $\dot t(s) \neq 0$ para todo $s \in [c, d]$ (ela define uma outra parametrização). Então $\dot t(s) > 0$ (justifique!) e, pela Proposição **3.3**(5),

$$\int_a^b \bigl|\dot\gamma(t)\bigr|\, dt = \int_c^d \Bigl|\dot\gamma\bigl(t(s)\bigr)\Bigr| \cdot \dot t(s)\, ds = \int_c^d \Bigl|\dot\gamma\bigl(t(s)\bigr) \cdot \dot t(s)\Bigr|\, ds = \int_c^d \Bigl|\frac{d\gamma\bigl(t(s)\bigr)}{ds}\Bigr|\, ds.$$

Note que, para que não haja dependência da parametrização, a condição $\dot t(s) \neq 0$ é necessária, pois, caminhando-se ao longo da linha $\gamma\bigl([a, b]\bigr)$, para diante e para trás, várias vezes, podemos atingir uma distância arbitrariamente grande. Portanto o valor $\mu(\gamma)$ (obtido pela aplicação da fórmula para qualquer caminho suave, não necessariamente simples) representa o comprimento da linha considerada com repetições induzidas pela variação do parâmetro.

Sejam $p, q \in \mathbb{C}$. Para $t \in [0, 1]$, ponhamos $\gamma(t) = p + t \cdot (q - p)$. Obtemos a *parametrização* (*linear*) *do intervalo* $[\overline{p, q}]$ que liga os pontos p e q no plano $\mathbb{C}$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Como $\dot\gamma(t) = q - p$, então $\mu(\gamma) = \int_0^1 \bigl|\dot\gamma(t)\bigr|\, dt = \int_0^1 |q - p\,|\, dt = |q - p\,|$, que, neste caso particular, é o comprimento conhecido.

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho parametrizado suave e simples. Iremos verificar que $\bigl|\gamma(b) - \gamma(a)\bigr| \leq \mu(\gamma)$, isto é, a distância entre as extremidades do caminho é menor ou igual ao comprimento do caminho: pela Proposição **3.3**(4,6), temos

$$\bigl|\gamma(b) - \gamma(a)\bigr| = \Bigl|\int_a^b \dot\gamma(t)\, dt\Bigr| \leq \int_a^b \bigl|\dot\gamma(t)\bigr|\, dt = \mu(\gamma).$$

Existem outras integrais independentes da parametrização:

3.5. Definição. Seja $\gamma : [a, b] \to D \subset \mathbb{C}$ um caminho parametrizado suave e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

é dita *integral de* f *sobre a linha* γ ou *integral de* f *sobre o caminho* γ[24]

Esta integral não depende da parametrização do caminho γ. Realmente, seja $t : [c, d] \to [a, b]$ uma função real e suave com $t(c) = a$ e $t(d) = b$. Pela Proposição **3.3**(5),

$$\int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_c^d f\Bigl(\gamma\bigl(t(s)\bigr)\Bigr) \cdot \dot\gamma\bigl(t(s)\bigr) \cdot \dot t(s)\, ds = \int_c^d f\Bigl(\gamma\bigl(t(s)\bigr)\Bigr) \cdot \frac{d\gamma\bigl(t(s)\bigr)}{ds}\, ds.$$

Embora a integral sobre a linha não dependa da parametrização e dê uma característica imanente à linha (e à função f), considerada como uma figura geométrica, essa integral depende da orientação da linha. Com efeito: a *parametrização oposta* $\gamma' : [a, b] \to D$ dada pela fórmula $\gamma'(s) = \gamma(a + b - s)$ define a linha γ' com *orientação oposta* à de γ. (Note que $\gamma'(a) = \gamma(b)$ e $\gamma'(b) = \gamma(a)$.) Daí resulta

[24]Encontram-se na literatura os termos “integral de linha”, “integral de contorno”, “integral curvilínea”.

$$\int\limits_{\gamma'} f(z)\,dz = \int\limits_a^b f\big(\gamma'(s)\big)\cdot \frac{d\gamma'(s)}{ds}\,ds = -\int\limits_a^b f\big(\gamma(a+b-s)\big)\cdot\dot\gamma(a+b-s)\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b f\big(\gamma(a+b-s)\big)\cdot\dot\gamma(a+b-s)\,d(a+b-s) =$$

$$= \int\limits_b^a f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = -\int\limits_a^b f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = -\int\limits_\gamma f(z)\,dz.$$

Assim, tornando precisa a regra com o conceito de orientação, diremos que a integral sobre a linha não depende da reparametrização quando a orientação for preservada. Além disso,[25] caso a orientação se alterar, a integral muda de sinal.

Como exercício, calculemos a integral da constante $c \in \mathbb{C}$ sobre $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, um caminho suave qualquer. Temos, aplicando a Proposição **3.3**(4),

$$\int\limits_\gamma c\,dz = \int\limits_a^b c\dot\gamma(t)\,dt = c\big(\gamma(b)-\gamma(a)\big)$$

Em particular, notamos que o resultado não depende do caminho, depende apenas do início e fim.

3.6. Definição. Para qualquer função $f : S \to \mathbb{C}$, a quantidade $\sup\Big\{\big|f(s)\big| \mid s \in S\Big\}$ se denomina *norma de f sobre S* e escrevemos

$$||f||_S = \sup\Big\{\big|f(s)\big| \mid s \in S\Big\}.$$

Dizendo que a norma de f sobre S "existe", enfatizamos apenas que $||f||_S < \infty$. Dado $r \in \mathbb{R}$: pela definição, a desigualdade $||f||_S \le r$ é válida se, e somente se, $\big|f(s)\big| \le r$ para todo $s \in S$

Seja $\gamma : [a,b] \to S$ um caminho e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Pela Proposição **2.32**, $\gamma = \gamma\big([a,b]\big)$ é compacto (escrevendo γ dessa forma, consideramos o caminho γ como um conjunto de pontos). Pelo Exercício **2.26.5** e pela Proposição **2.23**, a função $|f\circ\gamma| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \Big|f\big(\gamma(t)\big)\Big|$, é contínua. Pelo Teorema **2.33**, a norma $||f||_\gamma = \sup\Big\{\Big|f\big(\gamma(t)\big)\Big| \mid t \in [a,b]\Big\}$ existe e $||f||_\gamma = \big|f(p_1)\big|$ para algum p_1 apropriado, $p_1 \in \gamma$. Assim, neste caso, a norma $||f||_\gamma = \big|f(p_1)\big|$ é o máximo de $\big|f(p)\big|$, $p \in \gamma$. Particularmente, $||f||_\gamma$ não depende da parametrização da linha γ.

3.7. Lema. *Seja $\gamma \subset D$ uma linha suave simples e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então*

$$\Big|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\Big| \le ||f||_\gamma \cdot \mu(\gamma).$$

Demonstração. Pela Definição **3.5** e pela Proposição **3.3**(6),

$$\Big|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\Big| = \Big|\int\limits_a^b f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt\Big| \le \int\limits_a^b \Big|f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\Big|\,dt = \int\limits_a^b \Big|f\big(\gamma(t)\big)\Big|\cdot\big|\dot\gamma(t)\big|\,dt \le$$

$$\le \int\limits_a^b ||f||_\gamma\cdot\big|\dot\gamma(t)\big|\,dt = ||f||_\gamma\int\limits_a^b\big|\dot\gamma(t)\big|\,dt = ||f||_\gamma\cdot\mu(\gamma).$$

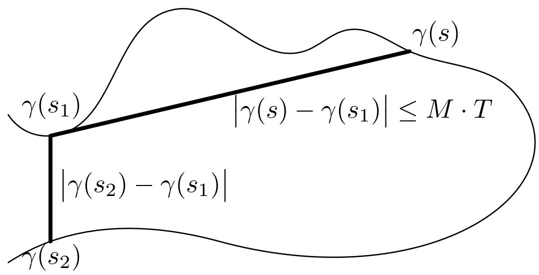
[25] Dizemos "além disso" sem que nunca tenhamos encontrado em textos matemáticos a expressão "aquém disso".

A demonstração está completa.

3.8. Definição. Seja $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ um caminho parametrizado e sejam $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$. Suponhamos que em cada intervalo $[q_j, q_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, o caminho γ seja suave, isto é, a restrição, ou *parte,* $\gamma_j = \gamma|_{[q_j,q_{j+1}]} : [q_j, q_{j+1}] \to D \subset \mathbb{C}$ é suave para $j = 0, 1, \ldots, n$. Neste caso, o caminho γ é dito *suave por partes.* A derivada $\dot\gamma(t)$ tem sentido para t diferente de $q_1, \ldots, q_n$. Para $t = q_j$, $1 \le j \le n$, existem dois valores (possivelmente distintos) da derivada $\dot\gamma(q_j)$: à esquerda e à direita, isto é, $\dot\gamma^-_{j-1}(q_j)$ e $\dot\gamma^+_j(q_j)$. Se cada parte de γ for regular (e/ou simples), então γ se chama *regular* (e/ou *simples*) *por partes.*

3.9. Lema. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho parametrizado regular. Então γ é simples por partes. Se γ for simples, então existem constantes*[26] $d(\gamma) > 0$ *e* $c(\gamma) > 1$ *tais que, para quaisquer* $s \in [s_1, s_2] \subset [a,b]$, *a desigualdade* $\big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big| \le d(\gamma)$ *implica a desigualdade* $\big|\gamma(s) - \gamma(s_1)\big| \le c(\gamma) \cdot \big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big|$.

Antes de iniciarmos a demonstração propriamente dita, procuremos entender o significado destas desigualdades e das cotas $d(\gamma)$ e $c(\gamma)$. As posições $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$ são as posições inicial e final respectivamente, e $\big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big|$ é a distância, não a percorrida, mas a entre as posições resultantes do movimento. Caberia a pergunta: como estimar a distância $\big|\gamma(s) - \gamma(s_1)\big|$ do início a um ponto intermediário do percurso em termos de $\big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big|$?



Se soubermos o máximo M (do módulo) da velocidade, poderíamos estimar a distância desejada fazendo-se $M \cdot T$, onde T é o valor máximo do tempo necessário para realizar o percurso. Entretanto, não é possível conseguirmos qualquer estimativa do tempo necessário, conhecendo-se apenas a distância entre as posições inicial e final, mesmo em se tratando de caminho simples sem parada, $\dot\gamma(t) \ne 0$.

Porém, tendo-se um dado caminho γ, há uma maneira de se indicar uma cota $d(\gamma)$ que, para quaisquer dois pontos $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$ (que serão nossos início e fim), situados a uma distância "pequena" $\big(\le d(\gamma)\big)$, nos permita estabelecer a estimativa $\big|\gamma(s) - \gamma(s_1)\big| \le c(\gamma) \cdot \big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big|$ para a distância de um ponto intermediário $\gamma(s)$ ao início $\gamma(s_1)$. Em outras palavras, esta propriedade é local. A grosso modo, podemos dizer que localmente a velocidade é quase constante (não-nula). Isto possibilita "controlar" a distância resultante: o ponto não pode se afastar muito. A demonstração seguirá o roteiro delineado por essas idéias.

Demonstração. Pelo Teorema **2.33**, existem $m, M > 0$ tais que $m \le \big|\dot\gamma(t)\big| \le M$. Pelo Teorema **2.31**, existe $\delta(m/2) > 0$ tal que $\big|\dot\gamma(s_1) - \dot\gamma(s_2)\big| < m/2$ para todos $s_1, s_2 \in [a,b]$ com $|s_1 - s_2| < \delta(m/2)$.

Sejam $t \in [t_1, t_2] \subset [a,b]$, $t_1 \le t_2$, tais que $t_2 - t_1 < \delta(m/2)$. Então $|t - t_1| < \delta(m/2)$ e, portanto, $\big|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_1)\big| < m/2$. Pela Proposição **3.3**(4), $\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot\gamma(t)\,dt = \gamma(t_2) - \gamma(t_1)$. Consequentemente, pela Proposição **3.3**(6),

$$\big|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\big| = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot\gamma(t)\,dt\Big| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} \big|\dot\gamma(t)\big|\,dt \le M \cdot |t_2 - t_1|.$$

Sabendo-se como integrar a constante e pela Proposição **3.3**(3), temos $\dot\gamma(t_1) \cdot (t_2 - t_1) = \gamma(t_2) - \gamma(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \big(\dot\gamma(t) - \dot\gamma(t_1)\big)\,dt$. Desta última igualdade podemos obter uma cota inferior para $\big|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\big|$, pois

[26] que dependem de γ

$\dot\gamma(t_1)\cdot(t_2-t_1)$ é suficientemente grande em módulo e $\int\limits_{t_1}^{t_2}\big(\dot\gamma(t)-\dot\gamma(t_1)\big)\,dt$ é suficientemente pequena em módulo. Detalhando: pela Proposição **3.3**(6),

$$m\cdot|t_2-t_1|\le\big|\dot\gamma(t_1)\cdot(t_2-t_1)\big|=\Big|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)-\int\limits_{t_1}^{t_2}\big(\dot\gamma(t)-\dot\gamma(t_1)\big)\,dt\Big|\le\big|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}\big(\dot\gamma(t)-\dot\gamma(t_1)\big)\,dt\Big|\le\big|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\big|+\int\limits_{t_1}^{t_2}\big|\dot\gamma(t)-\dot\gamma(t_1)\big|\,dt\le\big|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\big|+(m/2)\cdot|t_2-t_1|.$$

Em suma:

$$(m/2)\cdot|t_2-t_1|\le\big|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\big|\le M\cdot|t_2-t_1| \tag{4}$$

para todos $t_1,t_2\in[a,b]$ tais que $|t_2-t_1|<\delta(m/2)$.

Daí segue-se que γ é simples por partes. Realmente: basta apenas dividir o intervalo $[a,b]$ em partes de comprimento $<\delta(m/2)$, pois, para t_1 e t_2 pertencendo a uma dessas partes, $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ implica $(m/2)\cdot|t_2-t_1|=0$, isto é, $t_1=t_2$.

Suponhamos agora que γ seja simples.

Sejam s_1, s e s_2 tais que $s\in[s_1,s_2]\subset[a,b]$ e $|s_2-s_1|<\delta(m/2)$. Então $|s-s_1|\le|s_2-s_1|<\delta(m/2)$ e podemos aplicar as desigualdades (4). Temos $\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big|\le M\cdot|s-s_1|$ e $(m/2)\cdot|s_2-s_1|\le\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|$. Logo, $\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big|\le M\cdot|s-s_1|\le M\cdot|s_2-s_1|\le\dfrac{M}{m/2}\cdot\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|$, ou seja,

$$\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big|\le c(\gamma)\cdot\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|,$$

onde $c(\gamma)=\dfrac{M}{m/2}>1$.

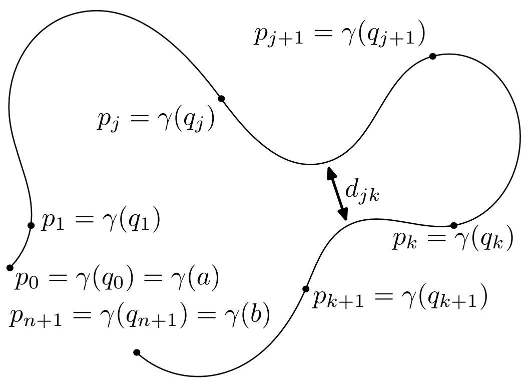
Para completarmos a demonstração, resta apontar uma constante $d(\gamma)>0$ tal que a desigualdade $\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|\le d(\gamma)$ garanta $|s_2-s_1|<\delta(m/2)$.

No intervalo $[a,b]$ escolhamos os pontos $q_0<q_1<\cdots<q_n<q_{n+1}$, $0<n\in\mathbb{N}$, de modo que $q_0=a$, $q_{n+1}=b$ e $q_{j+1}-q_j\le\frac{1}{3}\delta(m/2)$ para $j=0,1,\dots,n$. Para $j=0,1,\dots,n$, designemos $I_j=[q_j,q_{j+1}]$. Sejam s_1 e s_2 tais que $[s_1,s_2]\subset[a,b]$. Então $s_1\in I_j$ e $s_2\in I_k$ para $0\le j,k\le n$ apropriados.

Seja $|j-k|\le1$. Dizer que $|j-k|\le1$ é o mesmo que dizer que $I_j\cup I_k$ é um intervalo de comprimento $\le\frac{2}{3}\delta(m/2)$, pois $|j-k|\le1$ significa que $j=k$ ou $k=j+1$ ou $j=k+1$. Obviamente, neste caso, $|s_2-s_1|\le\frac{2}{3}\delta(m/2)<\delta(m/2)$.

Sejam $0\le j,k\le n$ com $|j-k|>1$. Então $I_j\cap I_k=\varnothing$. Consideremos a função $\varrho_{jk}:I_j\times I_k\to\mathbb{R}$ definida pela regra $\varrho_{jk}(u+i\cdot v)=\big|\gamma(v)-\gamma(u)\big|$. A função ϱ_{jk} é contínua e $I_j\times I_k$ é compacto. Pelo Teorema **2.33**, existe $z_0\in I_j\times I_k$ tal que $\varrho_{jk}(z_0)\le\varrho_{jk}(z)$ para todo $z\in I_j\times I_k$. Temos $z_0=u_0+i\cdot v_0$, onde $u_0\in I_j$ e $v_0\in I_k$. O caminho γ é simples e $I_j\cap I_k=\varnothing$. Portanto, $\gamma(u_0)\ne\gamma(v_0)$ e $d_{jk}=\varrho_{jk}(z_0)=\big|\gamma(v_0)-\gamma(u_0)\big|>0$. A desigualdade $\varrho_{jk}(z_0)\le\varrho_{jk}(z)$ pode ser reescrita como:

$$d_{jk}\le\big|\gamma(v)-\gamma(u)\big| \tag{5}$$



para todos $u\in I_j$, $v\in I_k$, onde $|j-k|>1$.

Escolhamos nosso $d(\gamma)$ como sendo: $d(\gamma)=\frac{1}{2}\min\big\{d_{jk}\mid 0\le j,k\le n,\ |j-k|>1\big\}$. Obviamente, $d(\gamma)>0$.

Sejam $s_1\in I_j$ e $s_2\in I_k$ tais que $\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|\le d(\gamma)$. Precisamos concluir que $|j-k|\le1$, pois, então, a desigualdade $\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big|\le c(\gamma)\cdot\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|$ já foi comprovada. Suponhamos que

$|j-k| > 1$. Por (5), teremos $d_{jk} \leq \big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big|$. Mas, aí $d(\gamma) \leq \frac{1}{2} d_{jk} < d_{jk} \leq \big|\gamma(s_2) - \gamma(s_1)\big| \leq d(\gamma)$. Um absurdo.

A demonstração está completa.

3.10. Seja $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ um caminho suave por partes, sejam $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$ pontos que delimitam as partes suaves $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de γ e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Podemos definir a integral de f sobre γ pela fórmula

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

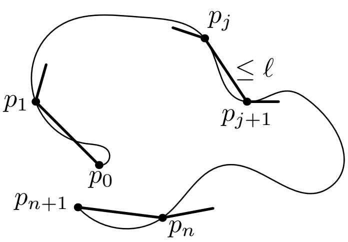
A fórmula $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\,dt$ tem, praticamente, pleno sentido: a única coisa que possivelmente não está bem definida é a derivada $\dot\gamma(t)$ nos pontos $t = q_j$, $j = 1, \dots, n$. Mas, esta falha não afeta a integral.

3.11. Um exemplo importante de caminho regular por partes é o *caminho poligonal*:

Sejam $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{C}$. Tomemos um intervalo $[a,b]$ qualquer, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e escolhamos pontos $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$ no intervalo. O caminho *poligonal* (ou *linear por partes*) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ pode-se definir como sendo $\gamma(t) = p_j + \dfrac{t - q_j}{q_{j+1} - q_j} \cdot (p_{j+1} - p_j)$ para $t \in [q_j, q_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n$. É fácil ver que essas fórmulas são compatíveis nos pontos $q_1, \dots, q_n$. Da Proposição **2.24** segue que γ, assim definido, é contínuo.

Vamos designar este caminho por $[\overline{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}}]$. A integral sobre um caminho suave por partes não se altera quando alteramos a parametrização das partes. Portanto, a integral $\int_{[\overline{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}}]} f(z)\,dz$, quando definida, não depende nem da escolha do intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, nem da escolha dos pontos $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$ no intervalo.

3.12. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho e sejam $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \gamma$ pontos sucessivos do caminho tais que p_0 é o início de γ e p_{n+1} é o fim de γ (isto é, existem pontos $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$ no intervalo $[a,b]$ tais que $p_j = \gamma(q_j)$, $j = 0, 1, \dots, n+1$). Neste caso, dizemos que o caminho poligonal $[\overline{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}}]$ está *inscrito* no caminho γ e que o caminho $[\overline{p_j, p_{j+1}}]$, $j = 0, 1, \dots, n$, é uma *corda* de γ. Em certo sentido, todo caminho γ, suave por partes, pode ser aproximado por caminhos poligonais inscritos, com cordas arbitrariamente pequenas.



Todos nos deleitamos vendo as pinturas dos grandes mestres do Renascimento. A visão é magnífica a uma certa distância. Entretanto, não se conhece ninguém, excluindo os especialistas, que aprecie essas obras olhando-as de muito perto ou com microscópio. O apreciador comum veria borrões de varias cores, sem nenhum nexo aparente.

Essa situação justifica visualmente um método clássico da Análise Matemática, fundamental na Análise Numérica, que é o de aproximar "microscopicamente" curvas suaves por caminhos poligonais. Note que nenhuma aproximação poligonal será idêntica a uma curva suave.[27] Da mesma maneira, nenhuma pintura (por mais linda que seja) é a realidade.

Estudaremos agora as aproximações poligonais.

3.13. Teorema. *Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto, seja $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua e seja $\gamma : [a,b] \to K$ um caminho simples regular. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\ell > 0$ tal que, para qualquer*

[27] Será que exageramos? Existe alguma curva suave que é iqual à sua aproximação poligonal?

$[\overline{p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}}] \subset K$, *caminho poligonal inscrito em* γ *cujas cordas têm comprimento* $\le \ell$, *são válidas as desigualdades*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{[\overline{p_0,p_1,\ldots,p_{n+1}}]} f(z)\,dz\Big| \le \varepsilon, \qquad \Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=0}^{n} f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| \le \varepsilon.$$

Demonstração. Sejam $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1} = b$ pontos no intervalo $[a,b]$ tais que $p_j = \gamma(q_j)$, $j = 0,1,\ldots,n+1$, e $[\overline{p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}}] \subset K$. Designemos por $\gamma_j : [q_j, q_{j+1}] \to K$ as partes respetivas do caminho γ. Observemos que, para provar as desigualdades do Teorema, é suficiente provar as desigualdades

$$\sum_{j=0}^{n}\Big|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| \le \varepsilon/2, \qquad \sum_{j=0}^{n}\Big|f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(z)\,dz\Big| \le \varepsilon/2. \tag{6}$$

Realmente,

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=0}^{n} f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| = \Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big)\Big| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{n}\Big|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big|,$$
$$\Big|\sum_{j=0}^{n} f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_0,p_1,\ldots,p_{n+1}}]} f(z)\,dz\Big| = \Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(z)\,dz\Big)\Big| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{n}\Big|f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(z)\,dz\Big|,$$
$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{[\overline{p_0,p_1,\ldots,p_{n+1}}]} f(z)\,dz\Big| \le$$
$$\le \Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=0}^{n} f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| + \Big|\sum_{j=0}^{n} f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_0,p_1,\ldots,p_{n+1}}]} f(z)\,dz\Big|.$$

Já sabemos calcular a integral de uma constante: $\int_{\gamma_j} f(p_j)\,dz = \int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(p_j)\,dz = f(p_j)(p_{j+1}-p_j)$.

Daí, aplicando o Lema **3.7**, iremos obter

$$\Big|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| = \Big|\int_{\gamma_j}\big(f(z)-f(p_j)\big)\,dz\Big| \le ||f - f(p_j)||_{\gamma_j}\cdot \mu(\gamma_j),$$
$$\Big|f(p_j)(p_{j+1}-p_j) - \int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]}\big(f(p_j)-f(z)\big)\,dz\Big| \le$$
$$\le ||f(p_j) - f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]}\cdot \mu\big([\overline{p_j,p_{j+1}}]\big) \le ||f(p_j) - f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]}\cdot \mu(\gamma_j)$$

para $j = 0,1,\ldots,n$, pois o comprimento de um caminho simples e suave é maior ou igual à distância entre suas extremidades.

Caso tenhamos

$$||f - f(p_j)||_{\gamma_j} \le \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)} \qquad \text{e} \qquad ||f(p_j) - f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} \le \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}, \tag{7}$$

obteremos

$$\sum_{j=0}^{n}\Big|\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| \le \sum_{j=0}^{n} ||f - f(p_j)||_{\gamma_j}\cdot\mu(\gamma_j) \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\mu(\gamma_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\sum_{j=0}^{n}\mu(\gamma_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\mu(\gamma) = \varepsilon/2,$$

$$\sum_{j=0}^{n}\Big|f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\ -\int\limits_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} f(z)\,dz\Big| \leq \sum_{j=0}^{n}||f(p_j)-f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]}\cdot\mu(\gamma_j) \leq \sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\mu(\gamma_j) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\sum_{j=0}^{n}\mu(\gamma_j) = \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\cdot\mu(\gamma) = \varepsilon/2,$$

de onde decorrem as desigualdades (6), desejadas. Portanto, é suficiente encontrar $\ell > 0$ que garanta a validade das desigualdades (7).

Fixemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Pelo Teorema **2.31**, a função f é uniformemente contínua. Portanto, para $\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)} > 0$, existe $\delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big) > 0$ tal que $\big|f(z_1)-f(z_2)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}$ para quaisquer $z_1, z_2 \in K$ que satisfaçam a $|z_1 - z_2| < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$.

Se $|p_j - p_{j+1}| < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$ e $p \in [\overline{p_j, p_{j+1}}]$, então $|p_j - p\,| < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$ e $\big|f(p_j)-f(p)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}$. Por definição, $||f(p_j)-f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} = \sup\Big\{\big|f(p_j)-f(p)\big| \mid p \in [\overline{p_j,p_{j+1}}]\Big\}$. Portanto, a limitação

$$|p_j - p_{j+1}| < \delta\Big(\frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big) \tag{8}$$

garante que $||f(p_j)-f||_{[\overline{p_j,p_{j+1}}]} \leq \dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}$. De $||f-f(p_j)||_{\gamma_j} = \sup\Big\{\Big|f\big(\gamma(t)\big)-f\big(\gamma(q_j)\big)\Big| \mid t \in [q_j, q_{j+1}]\Big\}$ segue que a limitação

$$\big|\gamma(t)-\gamma(q_j)\big| < \delta\Big(\frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big), \tag{9}$$

sendo válida para todo $t \in [q_j, q_{j+1}]$, garante que $||f - f(p_j)||_{\gamma_j} \leq \dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}$.

Pelo Lema **3.9**, existem constantes $d(\gamma) > 0$ e $c(\gamma) > 1$ tais que, para quaisquer $s \in [s_1, s_2] \subset [a, b]$, a desigualdade $\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big| \leq d(\gamma)$ implica a desigualdade $\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big| \leq c(\gamma)\cdot\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|$.

Ponhamos $\ell = \min\Big\{\dfrac{1}{2c(\gamma)}\cdot\delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big),\ d(\gamma)\Big\}$. Obviamente, $0 < \ell \leq d(\gamma)$, $c(\gamma)\cdot\ell < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$ e $\ell < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$, pois $c(\gamma) > 1$.

Supondo que as cordas do nosso caminho poligonal têm comprimento $\leq \ell$, vemos que

$$|p_j - p_{j+1}| \leq \ell < \delta\Big(\frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n$ o que comprova a limitação (8). Além disso, as desigualdades

$$\big|\gamma(q_{j+1})-\gamma(q_j)\big| \leq \ell \leq d(\gamma), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

implicam a desigualdade $\big|\gamma(t)-\gamma(q_j)\big| \leq c(\gamma)\cdot\big|\gamma(q_{j+1})-\gamma(q_j)\big|$ para todo $t \in [q_j, q_{j+1}]$. Consequentemente, $\big|\gamma(t)-\gamma(q_j)\big| \leq c(\gamma)\cdot\big|\gamma(q_{j+1})-\gamma(q_j)\big| \leq c(\gamma)\cdot\ell < \delta\Big(\dfrac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)}\Big)$, comprovando a limitação (9).

A demonstração está completa.

3.14. As desigualdades do Teorema **3.13** são válidas para partes dos caminhos. Mais exatamante: seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto, seja $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua e seja $\gamma : [a, b] \to K$ um caminho simples e regular. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\ell > 0$ tal que, para qualquer caminho poligonal inscrito em γ, $[\overline{p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}}] \subset K$, cujas cordas têm comprimento $\leq \ell$, são válidas as desigualdades

$$\Big|\int\limits_{\gamma_{k,m+1}} f(z)\,dz\ -\int\limits_{[\overline{p_k,\ldots,p_{m+1}}]} f(z)\,dz\Big| \leq \varepsilon, \qquad \Big|\int\limits_{\gamma_{k,m+1}} f(z)\,dz - \sum_{j=k}^{m} f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| \leq \varepsilon$$

para quaisquer $0 \le k \le m \le n$, onde $\gamma_{k,m+1} : [q_k, q_{m+1}] \to \mathbb{C}$ designa o caminho induzido por γ.

Realmente, as desigualdades do Teorema **3.13** são consequências das desigualdades (6) que implicam as desigualdades

$$\sum_{j=k}^{m} \Big| \int_{\gamma_j} f(z)\,dz - f(p_j)(p_{j+1}-p_j)\Big| \le \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=k}^{m} \Big| f(p_j)(p_{j+1}-p_j) \;-\; \int_{\overline{[p_j,p_{j+1}]}} f(z)\,dz\Big| \le \varepsilon/2.$$

Por sua vez, estas desigualdades implicam as desigualdades desejadas, de forma análoga à apresentada na demonstração do Teorema **3.13**.

Caro leitor, se você tiver tempo e leite,[28] leia novamente a demonstração do Teorema **3.13** e a adapte ao caso **3.14**. Sugerimos que o faça, procurando o plano da demonstração, ressaltando as etapas, formulando o objetivo de cada etapa, compreendendo as ferramentas usadas na consecução dos objetivos etc.

Exercícios. 1. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma linha parametrizada suave e seja $t \in [a,b]$. Aponte os erros no primeiro desenho do Capitulo **3**, caso fossem feitas (uma por vez) as seguintes afirmações:

• $\mu(\gamma) = \big|\gamma(b) - \gamma(a)\big|$ • γ é simples (quantos erros?) • γ é regular (quantos erros?)

Explique.

2. Calcule as integrais $\int_{\gamma_1} |z|^2\,dz$ e $\int_{\gamma_2} |z|^2\,dz$ e compare os valores obtidos, sendo $\gamma_1 = [\overline{1, i, -1, 1}]$ e $\gamma_2(t) = \cos t + i \cdot \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Seja $\gamma_1 = [\overline{-1-i, 1-i, 1+i, -1+i, -1-i}]$ e $\gamma_2(t) = \cos t + i \cdot \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$. Para as funções

$$f(z) = z, \qquad f(z) = \operatorname{Re} z, \qquad f(z) = \overline{z}, \qquad f(z) = z^{-1}, \qquad f(z) = |z|^2,$$

calcule as integrais $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ e $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ e compare os valores obtidos.

4. Prove a desigualdade $\Big|\int_{\gamma} f(z)\,dz\Big| \le 1$, onde $\gamma = [\overline{1, 1+i}]$, nos casos: $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $f(z) = \dfrac{z+2}{3z}$.

5. Prove a desigualdade $\Big|\int_{\gamma} f(z)\,dz\Big| \le 1$, onde $\gamma = [\overline{1, i}]$, nos casos: $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^z}$, $f(z) = \dfrac{z^7}{\sqrt{2}e^z}$.

6*. Seja $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < r \in \mathbb{R}$, seja U uma vizinhança aberta da origem e seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Calcule o limite da integral $\displaystyle\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z}\,dz$.

7. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave e seja $n \in \mathbb{N}$.

•* Prove que $\displaystyle\int_{\gamma} z^n\,dz = \frac{\big(\gamma(b)\big)^{n+1} - \big(\gamma(a)\big)^{n+1}}{n+1}$.

• Dado um polinômio $P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$, onde $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$. Prove que $\int_{\gamma} P(z)\,dz = 0$ se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

• Seja $\gamma = [\overline{1, 0, -i, -2, i}]$. Calcule as integrais $\int_{\gamma} (1 - 2z - 4z^3)\,dz$, $\int_{\gamma} (2000z^{1999} - 1999z^{1998})\,dz$, $\int_{\gamma} \frac{z^3-8}{2-z}\,dz$.

[28]expressão que se refere a seguinte anedota:
"Sua filha se casou?" — De onde você concluiu isso?
"É que eu a vi dando de mamar a um bebê." — E daí? Se uma virgem tiver tempo e leite . . . ?!

... e assim, na busca do caminho ideal ao objetivo pode-se passar, quase imperceptivelmente, de caminhos legítimos a ilegítimos, da virtude ao crime ...

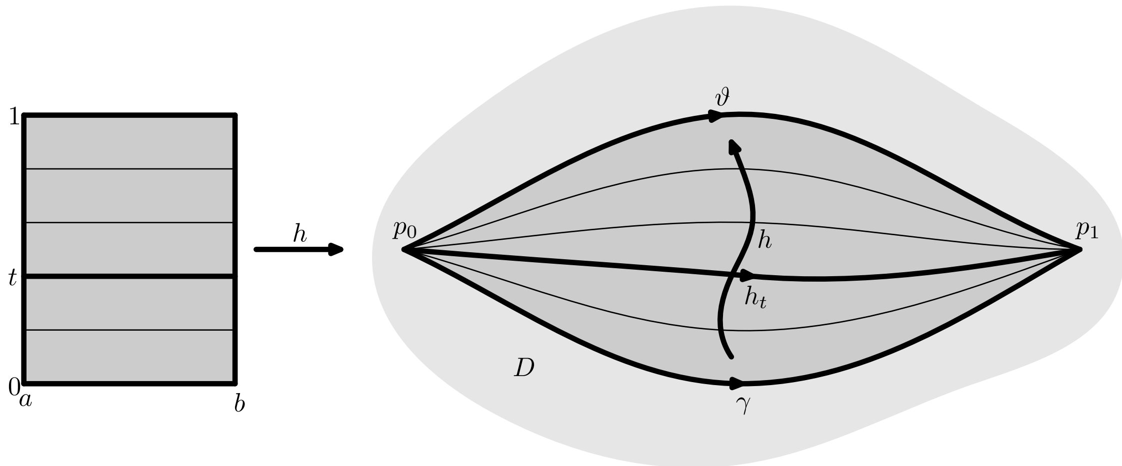
Da Tese da Defesa do Dr. J. Silva representando o Réu J. Santos

4. Homotopia: Caminho entre Caminhos

4.1. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto e sejam $\gamma, \vartheta : [a,b] \to D$ dois caminhos em D, ambos com o mesmo início e com o mesmo fim, $p_0 = \gamma(a) = \vartheta(a)$ e $p_1 = \gamma(b) = \vartheta(b)$. Uma *deformação* (ou *homotopia*) *em D de γ para ϑ* é simplesmente uma função contínua $h : [a,b] \times [0,1] \to D$ tal que

$$h(s,0) = \gamma(s), \quad h(s,1) = \vartheta(s), \quad h(a,t) = p_0, \quad h(b,t) = p_1$$

para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$. Neste caso, dizemos que ϑ pode ser obtido de γ por meio de uma *deformação* (ou *homotopia*) *em D*, ou que γ é *homotópico a ϑ em D*



Intuitivamente, podemos pensar em $t \in [0,1]$ como sendo a variável tempo e como se o caminho $h_t : [a,b] \to \mathbb{C}$, definido por $h_t(s) = h(s,t)$, estivesse se alterando com o tempo t de uma maneira contínua; na partida, $t = 0$, temos o caminho γ, isto é, $h_0 = \gamma$, e na chegada, $t = 1$, temos o caminho ϑ, $h_1 = \vartheta$. Vale enfatizar que, durante a deformação do caminho, seu início p_0 e fim p_1 permanecem fixos. Vamos designar a homotopia h de γ para ϑ como $h : \gamma \to \vartheta$.

4.2. A relação "ser homotópicos em D" é uma relação de equivalência:

A homotopia *identidade* $h : \gamma \to \gamma$, de γ para o próprio γ, pode ser definida por $h(s,t) = \gamma(s)$, $s \in [a,b]$ e $t \in [0,1]$. Sendo γ contínuo, h é contínua pelo Critério de Continuidade **2.21.2**(4) e pela Proposição **2.7**.

Seja $h : \gamma \to \vartheta$ uma homotopia de γ a ϑ em D, isto é, $h : [a,b] \times [0,1] \to D$ é contínua e

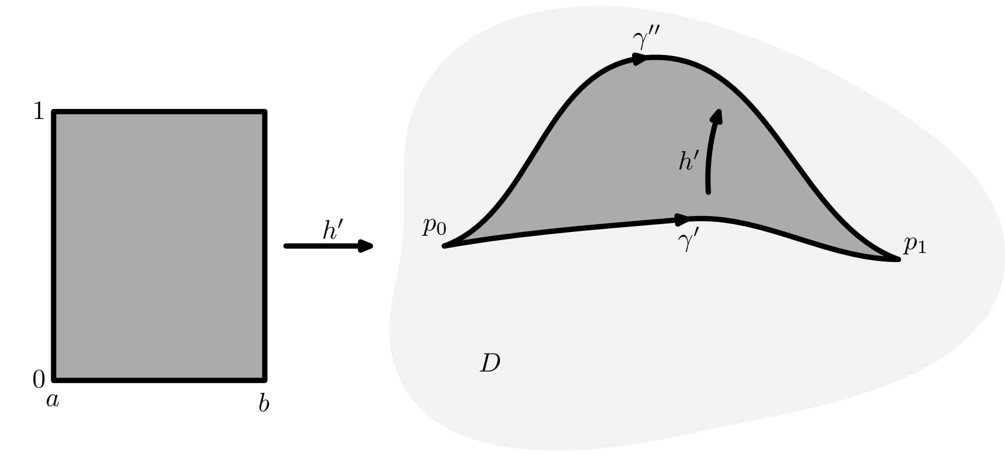
$$h(s,0) = \gamma(s), \qquad h(s,1) = \vartheta(s), \qquad h(a,t) = \gamma(a) = \vartheta(a) = p_0, \qquad h(b,t) = \gamma(b) = \vartheta(b) = p_1$$

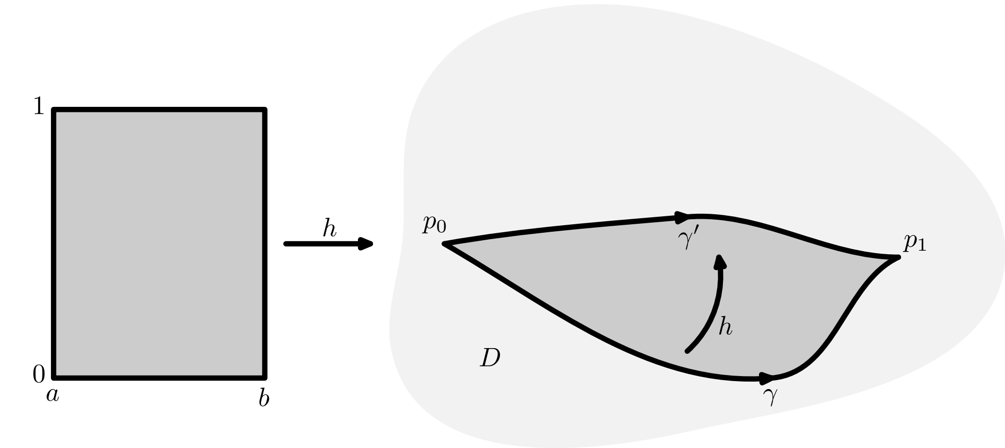
para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$. A homotopia *oposta* $h' : \vartheta \to \gamma$, de ϑ a γ em D, é dada pela fórmula $h'(s,t) = h(s, 1-t)$ (simplesmente pela troca do sentido do tempo). Obviamente h' é contínua.

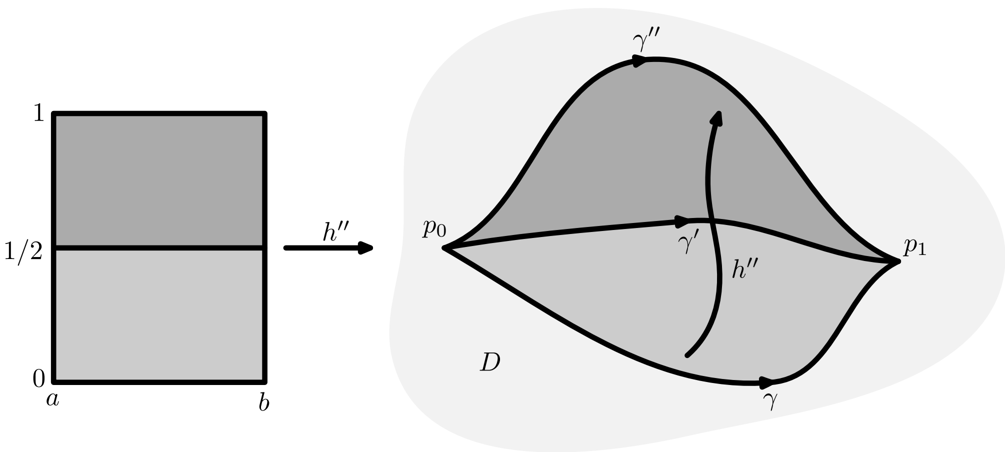
Sejam $h : \gamma \to \gamma'$ uma homotopia de γ a γ' em D e $h' : \gamma' \to \gamma''$ uma homotopia de γ' a γ'' em D, isto é, $h, h' : [a,b] \times [0,1] \to D$ são contínuas e

$$h(s,0)=\gamma(s), \qquad h(s,1)=\gamma'(s), \qquad h(a,t)=\gamma(a)=\gamma'(a)=p_0, \qquad h(b,t)=\gamma(b)=\gamma'(b)=p_1,$$
$$h'(s,0)=\gamma'(s), \quad h'(s,1)=\gamma''(s), \quad h'(a,t)=\gamma'(a)=\gamma''(a)=p_0, \quad h'(b,t)=\gamma'(b)=\gamma''(b)=p_1$$

para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$. Podemos definir uma homotopia *composta* $h'' : \gamma \to \gamma''$ em D por







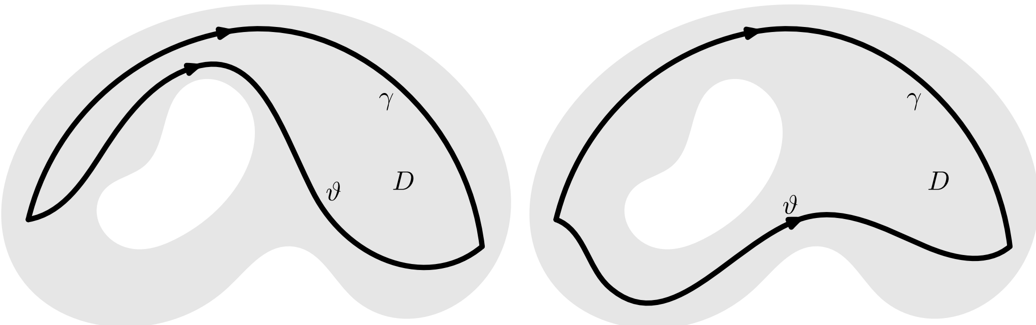
$$h''(s,t) = \begin{cases} h(s,2t) & \text{se } \ 0 \le t \le 1/2 \\ h'(s,2t-1) & \text{se } \ 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

(É fácil verificar a compatibilidade quando $t = 1/2$.) Em palavras: a homotopia h'' produz na primeira metade do tempo o que a homotopia h realiza, e, na segunda metade, o que a homotopia h' realiza. Pela Proposição **2.24**, h'' é contínua.

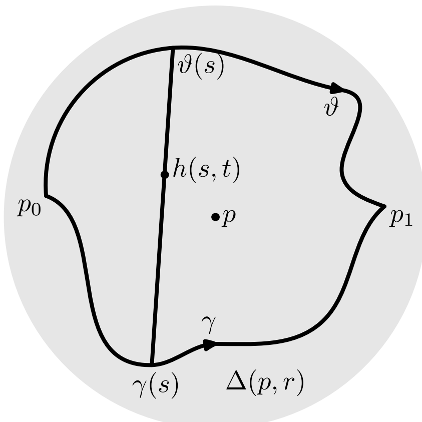
4.3. Seja $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho e seja $p : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua com $p(a) = a$ e $p(b) = b$. Em outras palavras, $\gamma \circ p$ é uma nova parametrização de γ com a mesma orientação. Observemos que γ e $\gamma \circ p$ são homotópicos. Sejam $s \in [a,b]$ e $t \in [0,1]$. Temos $s, p(s) \in [a,b]$. O ponto $(1-t)\cdot s + t \cdot p(s)$ pertence ao intervalo com extremidades s e $p(s)$. Portanto, $(1-t)\cdot s + t\cdot p(s) \in [a,b]$ e $h(s,t) = \gamma\big((1-t)\cdot s + t\cdot p(s)\big)$ é definida. É claro que h é uma função contínua e que $h(s,0) = \gamma(s)$, $h(s,1) = \gamma\big(p(s)\big)$, $h(a,t) = \gamma(a)$, $h(b,t) = \gamma(b)$ para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$. Além disso, os valores da homotopia h estão no caminho γ, considerado como figura geométrica: $h\big([a,b]\times[0,1]\big) \subset \gamma\big([a,b]\big) = \gamma$. Como $\gamma \subset D$, então $h : [a,b]\times[0,1] \to D$ é uma homotopia em D. Assim, na verdade, ao discutirmos caminhos a menos de homotopia, os tratamos como figuras geométricas no plano $\mathbb{C}$, sendo figura geométrica independente da escolha de parametrização.

4.4. Imagine uma tira de borracha, muito elástica, inteiramente contida num domínio D no plano, com suas extremidades pregadas. Podemos mover, esticar, encolher, mas não romper a tira, nem permitir que uma parte da tira saia de D. São homotopias todas as modificações, mexidas, permitidas com a tira.

4.5. No primeiro desenho abaixo os caminhos γ e ϑ são homotópicos em D. No segundo, os caminhos γ e ϑ não são homotópicos em D, pois há um obstáculo para a homotopia: um buraco em D entre os dois caminhos.[29]



4.6. Lema. *Em qualquer disco aberto $\Delta(p,r)$, são homotópicos quaisquer dois caminhos que tenham o mesmo início e o mesmo fim.*



Demonstração. Sejam $\gamma, \vartheta : [a,b] \to \Delta(p,r)$ dois caminhos com o mesmo início e o mesmo fim, $p_0 = \gamma(a) = \vartheta(a)$ e $p_1 = \gamma(b) = \vartheta(b)$. Definamos por $h(s,t) = (1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\vartheta(s)$ a função contínua $h : [a,b]\times[0,1] \to \mathbb{C}$. Como $h(s,0) = \gamma(s)$, $h(s,1) = \vartheta(s)$, $h(a,t) = p_0$ e $h(b,t) = p_1$ para todo $s \in [a,b]$ e para todo $t \in [0,1]$, então é suficiente verificar que $h(s,t) \in \Delta(p,r)$ para todo $s \in [a,b]$ e todo $t \in [0,1]$. Temos

$$\big|h(s,t) - p\big| = \big|(1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\vartheta(s) - (1-t)\cdot p - t\cdot p\big| =$$

[29] "... existe uma pedra no meio de caminho ..."

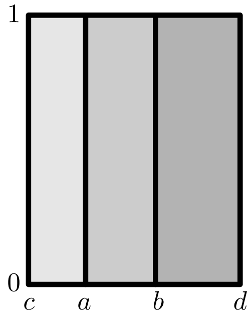
$$= \Big|(1-t)\cdot\big(\gamma(s)-p\big)+t\cdot\big(\vartheta(s)-p\big)\Big| \le \Big|(1-t)\cdot\big(\gamma(s)-p\big)\Big| + \Big|t\cdot\big(\vartheta(s)-p\big)\Big| =$$
$$= (1-t)\cdot\big|\gamma(s)-p\big| + t\cdot\big|\vartheta(s)-p\big| < (1-t)r+tr = r,$$

pois, ou $t > 0$ com $(1-t) \ge 0$, ou $(1-t) > 0$ com $t \ge 0$, e as inclusões $\gamma(s) \in \Delta(p,r)$ e $\vartheta(s) \in \Delta(p,r)$ implicam as desigualdades $\big|\gamma(s)-p\big| < r$ e $\big|\vartheta(s)-p\big| < r$. A demonstração está completa.

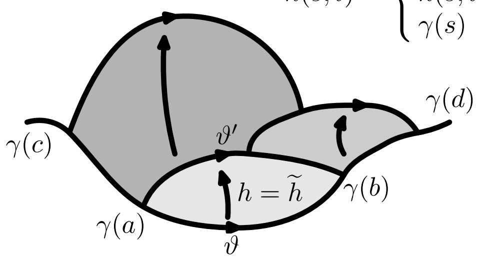
4.7. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto, seja $\gamma : [c,d] \to D$ um caminho e seja $[a,b] \subset [c,d]$. O intervalo $[a,b]$ define uma parte $\vartheta : [a,b] \to D$ do caminho γ, onde $\vartheta(s) = \gamma(s)$ para $s \in [a,b]$. Suponhamos dada uma homotopia $h : \vartheta \to \vartheta'$ em D, isto é, $h : [a,b]\times[0,1] \to D$ é contínua e

$$h(s,0) = \vartheta(s), \qquad h(s,1) = \vartheta'(s), \qquad h(a,t) = \vartheta(a) = \vartheta'(a), \qquad h(b,t) = \vartheta(b) = \vartheta'(b)$$

para todo $s \in [a,b]$ e para todo $t \in [0,1]$. Podemos considerar h como sendo uma homotopia $\widetilde{h}$ do caminho γ inteiro. Mais formalmente: para $t \in [0,1]$, definamos



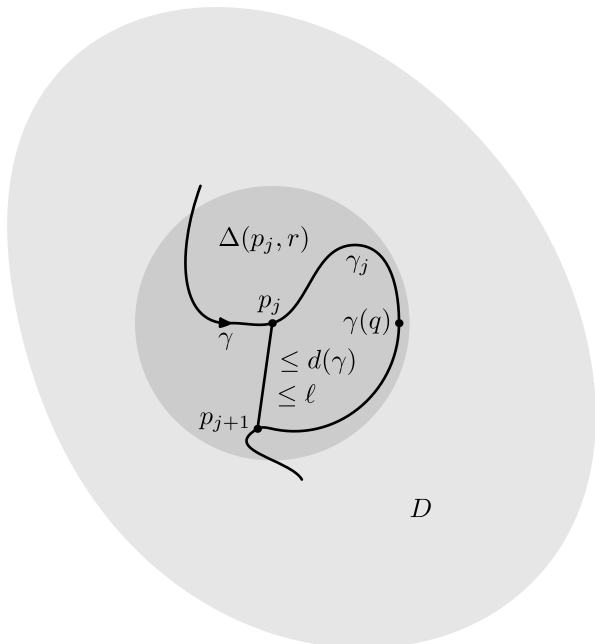
$$\widetilde{h}(s,t) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{se } s \in [c,a] \\ h(s,t) & \text{se } s \in [a,b] \\ \gamma(s) & \text{se } s \in [b,d] \end{cases}$$



Obviamente $\widetilde{h}(a,t) = \gamma(a)$ e $\widetilde{h}(b,t) = \gamma(b)$ para todo $t \in [0,1]$. É facil verificar a compatibilidade para $s = a$ e para $s = b$. Em cada um dos retângulos indicados no desenho, $\widetilde{h}$ é contínua: nos retângulos à esquerda e à direita, porque γ é contínuo; no retângulo intermediário, porque $\widetilde{h}$ é igual a h que é contínua. Pela Proposição **2.24**, $\widetilde{h} : [c,d]\times[0,1] \to D$ é contínua.

Assim, *podemos deformar um caminho em uma sua parte, depois deformar, da mesma maneira, o caminho obtido, etc.* Esta forma de deformação será útil para nós.

4.8. Teorema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho regular por partes. Então existe um caminho poligonal $\vartheta : [a,b] \to D$ inscrito em γ e homotópico a γ em D, cujas cordas têm comprimentos arbitrariamente pequenos.*



Demonstração. Aplicando **4.7**, podemos provar o fato desejado apenas para cada parte do caminho dado. Assim, podemos supor que γ é regular. Pelo Lema **3.9** e pelo que acabamos de observar, podemos supor que γ é simples.

Seja $\ell > 0$ qualquer. Sejam $d(\gamma) > 0$ e $c(\gamma) > 1$ as constantes do Lema **3.9**: se $a \le s_1 \le s \le s_2 \le b$ com $\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big| \le d(\gamma)$, então $\big|\gamma(s)-\gamma(s_1)\big| \le c(\gamma)\cdot\big|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)\big|$.

Pela Proposição **2.32**, a linha $\gamma = \gamma\big([a,b]\big) \subset D$ é compacta. O conjunto aberto D forma uma cobertura aberta de γ. Pelo Lema **2.16**, esta cobertura possui raio de Lebesgue $r > 0$. Assim, para todo $s \in [a,b]$, temos $\Delta\big(\gamma(s),r\big) \subset D$.

A função $l : [a,b] \to \big[0,\mu(\gamma)\big]$, definida por

$$l(v) = \int_a^v \left|\dot\gamma(s)\right| ds,$$

é suave e crescente, pois $\dot l(v) = \left|\dot\gamma(v)\right| > 0$. Portanto, no intervalo $[a,b]$, existem pontos $q_0 < q_1 < \cdots < q_n < q_{n+1}$, $0 < n \in \mathbb{N}$, tais que $q_0 = a$, $q_{n+1} = b$ e $l(q_{j+1}) - l(q_j) < \min\{\ell, d(\gamma), r/c(\gamma)\}$ para $j = 0,1,\ldots,n$. Façamos $p_j = \gamma(q_j)$, $j = 0,1,\ldots,n$.

Sejam $\gamma_j : [q_j, q_{j+1}] \to D$, $j = 0,1,\ldots,n$, as partes respetivas de γ. Como $l(q_{j+1}) - l(q_j) = \int_{q_j}^{q_{j+1}} \left|\dot\gamma(s)\right| ds = \mu(\gamma_j)$ e $\left|\gamma(q_{j+1}) - \gamma(q_j)\right| \le \mu(\gamma_j)$ (o comprimento de uma linha é menor ou igual à distância entre suas extremidades), então as desigualdades $\mu(\gamma_j) < \ell$, $\mu(\gamma_j) < d(\gamma)$, $\mu(\gamma_j) < r/c(\gamma)$ e $1 < c(\gamma)$ implicam as desigualdades $\left|\gamma(q_{j+1}) - \gamma(q_j)\right| \le \ell$, $\left|\gamma(q_{j+1}) - \gamma(q_j)\right| \le d(\gamma)$ e $\left|\gamma(q_{j+1}) - \gamma(q_j)\right| < c(\gamma)\cdot\left|\gamma(q_{j+1}) - \gamma(q_j)\right| < r$. Consequentemente, $|p_{j+1} - p_j| \le \ell$, $|p_{j+1} - p_j| < r$ e, para qualquer $q \in [q_j, q_{j+1}]$, teremos $\left|\gamma(q) - \gamma(q_j)\right| < r$ pela desigualdade do Lema **3.9**. Em outras palavras, $|p_{j+1} - p_j| \le \ell$, $p_{j+1} \in \Delta(p_j, r)$ e $\gamma_j = \gamma_j\big([q_j, q_{j+1}]\big) \subset \Delta(p_j, r)$.

Pelo Lema **4.6**, existe uma homotopia em $\Delta(p_j, r)$ entre o caminho γ_j e o intervalo $[\overline{p_j, p_{j+1}}]$. Como $\Delta(p_j, r) \subset D$, esta homotopia está em D. Aplicando **4.7**, vemos que γ é homotópico em D ao caminho poligonal $[\overline{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}}]$ inscrito em γ. As desigualdades $|p_{j+1} - p_j| \le \ell$, $j = 0,1,\ldots,n$, revelam a limitação para os comprimentos das cordas.

A demonstração está completa.

4.9. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto e sejam $p_0, p_1, p_2 \in D$ os vértices de um triângulo T contido em D, isto é, $T \subset D$. Então os caminhos poligonais $[\overline{p_0, p_2}]$ e $[\overline{p_0, p_1, p_2}]$ são homotópicos em D.

Realmente, o triângulo T pode ser descrito como

$$T = \{t_0\cdot p_0 + t_1\cdot p_1 + t_2\cdot p_2 \mid t_0, t_1, t_2 \ge 0,\ t_0 + t_1 + t_2 = 1\}. \tag{10}$$

O caminho $\gamma = [\overline{p_0, p_2}]$ tem a parametrização canônica $\gamma : [0,1] \to T$, $\gamma(s) = p_0 + s\cdot(p_2 - p_0)$ e o caminho $\vartheta = [\overline{p_0, p_1, p_2}]$ tem a parametrização

$$\vartheta(s) = \begin{cases} (1-2s)\cdot p_0 + 2s\cdot p_1 & \text{se } 0 \le s \le 1/2 \\ 2(1-s)\cdot p_1 + (2s-1)\cdot p_2 & \text{se } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Consideremos a homotopia $h : \gamma \to \vartheta$ definida na demonstração do Lema **4.6** :

$$h(s,t) = (1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\vartheta(s).$$

Para $0 \le s \le 1/2$, teremos

$$h(s,t) = (1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\vartheta(s) = (1-t)\cdot\big(p_0 + s\cdot(p_2 - p_0)\big) + t\cdot\big((1-2s)\cdot p_0 + 2s\cdot p_1\big) = \\ = (1 - s - ts)\cdot p_0 + 2ts\cdot p_1 + (1-t)s\cdot p_2.$$

Para $1/2 \le s \le 1$, teremos

$$h(s,t) = (1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\vartheta(s) = (1-t)\cdot\big(p_0 + s\cdot(p_2 - p_0)\big) + t\cdot\big(2(1-s)\cdot p_1 + (2s-1)\cdot p_2\big) = \\ = (1-t)(1-s)\cdot p_0 + 2t(1-s)\cdot p_1 + (s - t + ts)\cdot p_2.$$

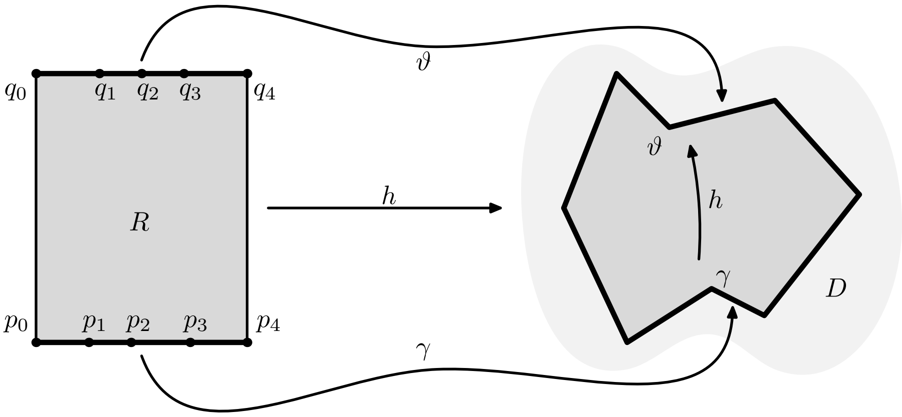
Usando (10), é fácil verificar que os valores de h estão em T.

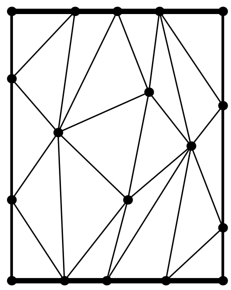
O Teorema **4.8** diz, em resumo, que, a menos de homotopia, todo caminho é poligonal com qualquer aproximação desejada. Desta forma, o Teorema **4.8** nos permite reduzir o problema de homotopia entre caminhos ao de homotopia entre caminhos lineares por partes. Será que, por sua vez, existiria alguma homotopia “linear por partes” entre caminhos lineares por partes homotópicos?

4.10. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$. Dizemos que os caminhos poligonais $\gamma, \vartheta : [a,b] \to D$ são *homotópicos em D por meio de um triângulo $T \subset D$*, caso existam uma parte do tipo $[\overline{p_0, p_2}]$ de um caminho e uma parte do tipo $[\overline{p_0, p_1, p_2}]$ do outro caminho tais que p_0, p_1, p_2 são os vértices do triângulo T (vide **4.9**).

4.11. Teorema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e sejam $\gamma, \vartheta : [a,b] \to D$ dois caminhos poligonais e homotópicos em D. Então, entre γ e ϑ, existe uma cadeia finita de homotopias, cada uma delas por meio de um triângulo.*

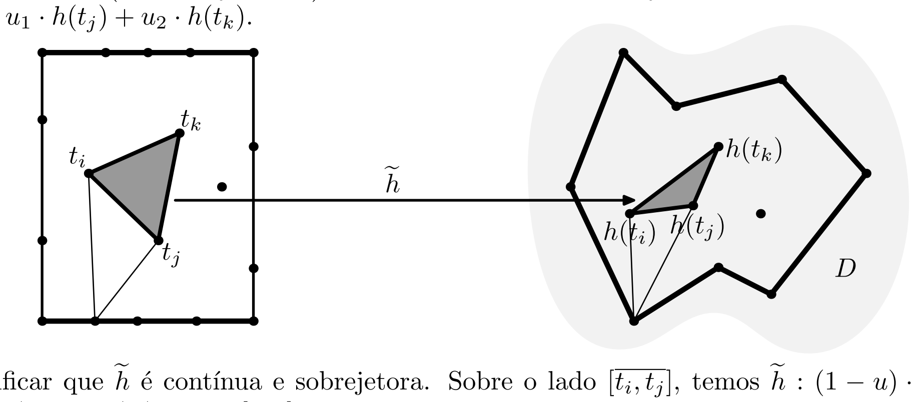
Plano da demonstração. Temos uma homotopia $h : \gamma \to \vartheta$ em D, isto é, uma função contínua $h : [a,b] \times [0,1] \to D$, do retângulo fechado $R = [a,b] \times [0,1]$ em D, tal que, de fato, a restrição de h a um lado de R é o caminho γ e, ao lado oposto, é o caminho ϑ. Sejam $p_0, p_1, \dots, p_l$ os pontos sobre o lado correspondente de R que definem as partes lineares de γ. Assinalamos no lado oposto de R os pontos $q_0, q_1, \dots, q_m$ que definem as partes lineares de ϑ. Pela homotopia h, os outros dois lados são contraídos em dois pontos, respetivamente, o início e o fim dos caminhos.





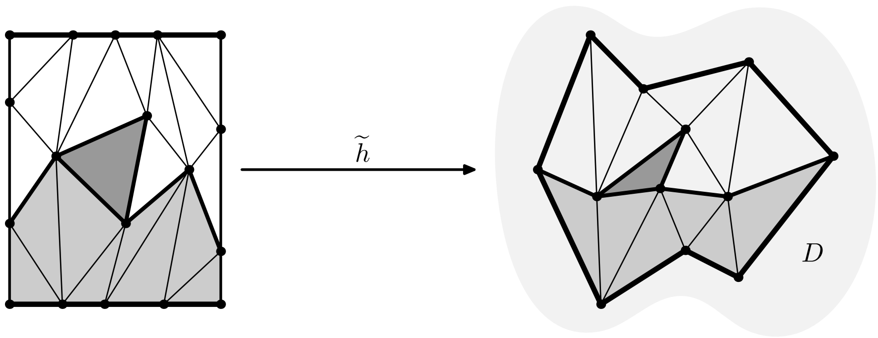
Vamos escolher, no retângulo R, uma coleção finita de pontos $t_0, t_1, \dots, t_n$, admitindo pontos interiores de R, que inclua os pontos $p_0, p_1, \dots, p_l$ e $q_0, q_1, \dots, q_m$. Liguemos estes pontos de modo que o retângulo R fique dividido em triângulos não-degenerados com vértices em $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. (Veja a figura ao lado.)

Sejam t_i, t_j, t_k, três vértices de um tal triângulo. Vamos supor que o triângulo $T\big(h(t_i), h(t_j), h(t_k)\big)$, com vértices $h(t_i), h(t_j), h(t_k)$, esteja inteiramente contido em D, $T\big(h(t_i), h(t_j), h(t_k)\big) \subset D$. Como em (10), todo ponto de $T(t_i, t_j, t_k)$ tem a forma $u_0 \cdot t_i + u_1 \cdot t_j + u_2 \cdot t_k$, onde $u_0, u_1, u_2 \geq 0$ e $u_0 + u_1 + u_2 = 1$. Sendo o triângulo $T(t_i, t_j, t_k)$ não-degenerado (os vértices t_i, t_j, t_k não estão na mesma reta), essa forma é única para qualquer ponto de $T(t_i, t_j, t_k)$. Assim, definamos a aplicação $\widetilde{h} : T(t_i, t_j, t_k) \to T\big(h(t_i), h(t_j), h(t_k)\big) \subset D$ por $\widetilde{h} : u_0 \cdot t_i + u_1 \cdot t_j + u_2 \cdot t_k \mapsto u_0 \cdot h(t_i) + u_1 \cdot h(t_j) + u_2 \cdot h(t_k)$.



É fácil verificar que $\widetilde{h}$ é contínua e sobrejetora. Sobre o lado $\overline{[t_i, t_j]}$, temos $\widetilde{h} : (1-u) \cdot t_i + u \cdot t_j \mapsto (1-u) \cdot h(t_i) + u \cdot h(t_j), \quad u \in [0,1]$. Consequentemente, quando consideramos um outro triângulo T' que tenha o lado $\overline{[t_i, t_j]}$ em comum com o triângulo $T(t_i, t_j, t_k)$ e definimos uma aplicação $\widetilde{h}'$, similar a $\widetilde{h}$, partindo de T', vemos que $\widetilde{h}$ e $\widetilde{h}'$ são iguais no lado comum. Em outras palavras, todas as $\widetilde{h}$'s são compatíveis e, assim, definem uma aplicação $\widetilde{h} : R \to D$ que é contínua pela Proposição **2.24**. Note que, nos lados de R, h e $\widetilde{h}$ são iguais, pois ali ambas são lineares por partes.[30]

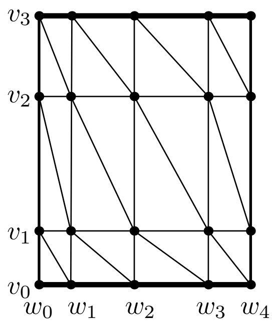
Vamos supor que podemos organizar os triângulos da partição de R numa cadeia tal que, colando os triângulos sucessivamente, por lados comuns, começando do lado "γ" de R, preenchemos enfim todo R. Nesta situação, obtemos uma cadeia de caminhos poligonais induzida por $\widetilde{h}$. Como dois caminhos sucessivos "diferem" por um triângulo, tanto em R como em D, chegamos ao resultado desejado.

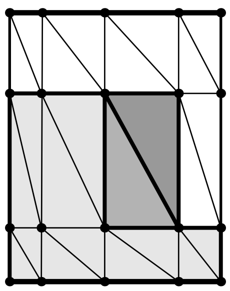


Demonstração. Resta apenas indicar uma partição de R, suficientemente fina, que obedeça às condições usadas no plano da demonstração.

Pela Proposição **2.32**, $h(R)$ é um compacto. Como $h(R) \subset D$, temos que D é uma cobertura aberta de $h(R)$. Pelo Lema **2.16**, ela possui raio de Lebesgue $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema **2.31**, a função $h : R \to D$ é uniformemente contínua. Assim, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\left|h(s_1) - h(s_2)\right| < \varepsilon$ desde que $s_1, s_2 \in R$ satisfaçam $|s_1 - s_2| < \delta(\varepsilon)$.

Nos intervalos $[0,1]$ e $[a,b]$, escolhamos os pontos $0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_{M+1} = 1$ e $a = w_0 < w_1 < \cdots < w_{N+1} = b$ tais que $v_{i+1} - v_i < \delta(\varepsilon)$ e $w_{j+1} - w_j < \delta(\varepsilon)$ para $i = 0, 1, \ldots, M$ e $j = 0, 1, \ldots, N$. Além disso, podemos supor que os pontos $w_0, w_1, \ldots, w_N, w_{N+1}$ dividem em partes lineares tanto γ quanto ϑ. No desenho à direita está indicado um esquema de partição de R. Vemos que R é uma colagem de triângulos retângulos de dois tipos (os "sentados" e os "equilibrados" em um de seus vértices).





Seja t_i o vértice do ângulo reto de um triângulo. Por construção, $|t_j - t_i| < \delta(\varepsilon)$ e $|t_k - t_i| < \delta(\varepsilon)$, onde t_j e t_k são dois outros vértices do triângulo. Daí concluímos que $\left|h(t_j) - h(t_i)\right| < \varepsilon$ e $\left|h(t_k) - h(t_i)\right| < \varepsilon$, ou seja, $h(t_j), h(t_k) \in \Delta\big(h(t_j), \varepsilon\big) \subset D$ (recorde que ε é raio de Lebesgue). Sendo que todos os vértices do triângulo $T\big(h(t_i), h(t_j), h(t_k)\big)$ pertencem ao disco aberto $\Delta\big(h(t_j), \varepsilon\big)$, o triângulo inteiro está no disco e, portanto, em D. Complete a demonstração usando o desenho à esquerda.

A demonstração não está completa.

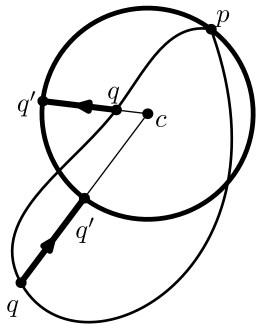
4.12. Um caminho se diz *fechado* se o seu início coincidir com o seu fim.

4.13. O resto deste capítulo será dedicado a uma classificação de caminhos fechados, a menos de homotopia, em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, isto é, no plano complexo sem um ponto.

---

[30] Observe que a construção de $\widetilde{h}$ está diretamente vinculada com a partição de R em triângulos. Assim, uma outra partição produzirá uma outra $\widetilde{h}$.

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{c\}$ qualquer caminho desse tipo. Sendo γ fechado, façamos $p = \gamma(a) = \gamma(b)$ e $r = |p - c| > 0$. Provemos que γ é homotópico em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ a um caminho $\vartheta : [a,b] \to C(c,r)$, cujos valores estão na circunferência $C(c,r)$. Para tal, utilizaremos a homotopia radial explicada a seguir. Tomemos um ponto $q \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ qualquer. Construamos o raio com início em c e que passa por q. Esse raio é o conjunto $\big\{c + \alpha \cdot (q - c) \mid \alpha \geq 0\big\}$. Ele cruza $C(c,r)$ num ponto q' dado por $q' = c + r \cdot \dfrac{q-c}{|q-c|}$. O caminho linear $h(t) = (1-t) \cdot q + t \cdot q'$, $t \in [0,1]$ que parametriza o intervalo $[\overline{q,q'}]$ não contém o ponto c. Essa "homotopia" radial de q a q' aplicada a todos os pontos de γ define a homotopia procurada: $h(s,t) = (1-t) \cdot \gamma(s) + t \cdot \Big(c + r \cdot \dfrac{\gamma(s) - c}{\big|\gamma(s) - c\big|}\Big)$. Pela observação feita acima, $h : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{c\}$. Seguindo uma argumentação padrão, h é contínua. Obviamente, o caminho $\vartheta(s) = h(s,1)$ está em $C(c,r)$. Assim, *qualquer caminho fechado em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ é homotópico a um caminho sobre uma circunferência centrada em c.*



4.14. O resultado obtido permite que restrinjamos nossa análise a caminhos na circunferência. Vamos considerar caminhos não necessariamente fechados em $C(c,r)$. Nessa situação, é natural classificá-los a menos de homotopia em $C(c,r)$. Sejam $\gamma, \vartheta : [a,b] \to C(c,r)$ dois caminhos com início comum e fim comum. Dizemos que γ e ϑ são *não-opostos* se, como conjuntos de pontos, eles satisfizerem a seguinte condição:

- Se $p, p' \in C(c,r)$ são dois pontos diametralmente opostos, quaisquer, então ou $p \notin \gamma$, ou $p' \notin \vartheta$.

Por exemplo, se, para algum ponto $a \in C(c,r)$ e para $\sqrt{2} \cdot r \geq \varepsilon > 0$, tivermos $\gamma, \vartheta \subset \Delta(a,\varepsilon)$, então γ e ϑ são não-opostos, pois $\Delta(a,\varepsilon) \cap C(c,r)$ não contém pontos diametralmente opostos.[31]

Modificando a homotopia do Lema **4.6**, chegamos ao

4.15. Lema. *Sejam $\gamma, \vartheta : [a,b] \to C(c,r)$ dois caminhos não-opostos com início comum e fim comum. Então γ e ϑ são homotópicos em $C(c,r)$.*

Demonstração. A homotopia $h(s,t) = (1-t) \cdot \gamma(s) + t \cdot \vartheta(s)$ entre γ e ϑ (muito provavelmente) não está em $C(c,r)$. Modificamos h, fazendo com que ela volte[32] à circunferência: $\widetilde{h}(s,t) = c + \dfrac{r \cdot \big(h(s,t) - c\big)}{\big|h(s,t) - c\big|}$. O único problema nessa fórmula é que pode ocorrer $h(s,t) = c$. Mas, se $h(s,t) = c$, o intervalo $[\overline{\gamma(s), \vartheta(s)}]$ passaria por c. Neste caso, $\gamma(s)$ e $\vartheta(s)$ seriam diametralmente opostos. Uma contradição. Quanto ao que falta: verificar $\widetilde{h}(s,0) = c + \dfrac{r \cdot \big(h(s,0) - c\big)}{\big|h(s,0) - c\big|} = c + \dfrac{r \cdot \big(\gamma(s) - c\big)}{\big|\gamma(s) - c\big|} = c + \big(\gamma(s) - c\big) = \gamma(s)$. Da mesma maneira, $\widetilde{h}(s,1) = \vartheta(s)$. Finalmente, $\widetilde{h}(a,t) = c + \dfrac{r \cdot \big(h(a,t) - c\big)}{\big|h(a,t) - c\big|} = c + \dfrac{r \cdot \big(\gamma(a) - c\big)}{\big|\gamma(a) - c\big|} = c + \big(\gamma(a) - c\big) = \gamma(a)$ e, analogamente, $\widetilde{h}(b,t) = \gamma(b)$. A demonstração está completa.

4.16. Definição. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Denominamos *padrão* o caminho $\gamma : [a,b] \to C(c,r)$ definido por $\gamma(s) = c + r \cdot e^{i \cdot (\alpha \cdot s + \beta)}$.

Comprove que α é a velocidade angular: se positivo, no sentido anti-horário; se negativo, no sentido horário. O β indica a posição de partida.

[31] Este exemplo será explorado no texto que se segue. Note que no lugar de $\sqrt{2}$ poderia ser usada qualquer constante k suficientemente pequena para garantir que todo disco centrado na circunferência $C(c,r)$ e de raio $< k \cdot r$ não contém pontos diametralmente opostos da circunferência.

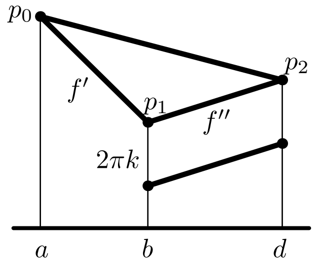
[32] volte, sem ter estado . . .

4.17. Dois pontos quaisquer $p, q \in C(c,r)$, não-opostos, podem ser ligados pelo menor arco de $C(c,r)$ usando um (único) caminho padrão com início em p e fim em q. Em particular, se $p, q \in \Delta(a,\varepsilon)$ para $a \in C(c,r)$ e $\sqrt{2} \cdot r \geq \varepsilon > 0$, então existe um caminho padrão $\gamma \subset \Delta(a,\varepsilon)$ com início em p e fim em q.

4.18. Qualquer caminho em $C(c,r)$ é homotópico em $C(c,r)$ a um caminho padrão por partes.

Com efeito: seja dado um caminho $\gamma : [a,b] \to C(c,r)$. Pelo Teorema **2.31**, γ é uniformemente contínuo. Portanto, para $\sqrt{2} \cdot r > 0$, existe $\delta(\sqrt{2} \cdot r) > 0$ tal que $\bigl|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\bigr| < \sqrt{2} \cdot r$ desde que $s_1, s_2 \in [a,b]$ satisfaçam $|s_1 - s_2| < \delta(\sqrt{2} \cdot r)$. Escolhamos s_j's, $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < s_{n+1} = b$, tais que $|s_{j+1} - s_j| < \delta(\sqrt{2} \cdot r)$ para $j = 0, 1, \ldots, n$. Consideremos as partes $\gamma_j = \gamma|_{[s_j, s_{j+1}]} : [s_j, s_{j+1}] \to C(c,r)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, do caminho γ. Para $s \in [s_j, s_{j+1}]$, temos $|s - s_j| \leq |s_{j+1} - s_j| < \delta(\sqrt{2} \cdot r)$ e, portanto, $\bigl|\gamma(s) - \gamma(s_j)\bigr| < \sqrt{2} \cdot r$, ou seja, $\gamma_j \subset \Delta\bigl(\gamma(s_j), \sqrt{2} \cdot r\bigr)$. Por **4.17** e **4.14** e pelo Lema **4.15**, γ_j é homotopico em $C(c,r)$ a um caminho padrão. Resta aplicar **4.7**.

4.19. Teorema. *Qualquer caminho em $C(c,r)$ é homotópico em $C(c,r)$ a um caminho padrão.*



Demonstração. Seja dado um caminho γ em $C(c,r)$. Por **4.18** e **4.7** e por indução, podemos supor que este caminho consista das duas partes padrão: $\gamma' : [a,b] \to C(c,r)$ e $\gamma'' : [b,d] \to C(c,r)$, onde $\gamma'(s) = c + r \cdot e^{i \cdot (\alpha' \cdot s + \beta')}$, $\gamma''(s) = c + r \cdot e^{i \cdot (\alpha'' \cdot s + \beta'')}$, $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in \mathbb{R}$ e $\gamma'(b) = \gamma''(b)$. Observamos que todo caminho padrão se baseia numa função real, linear. Por exemplo, $\gamma'(s) = c + r \cdot e^{i \cdot f'(s)}$, onde $f'(s)$ é uma função linear dada pela fórmula $f'(s) = \alpha' \cdot s + \beta'$, $s \in [a,b]$. Da mesma forma, $\gamma''(s) = c + r \cdot e^{i \cdot f''(s)}$, onde $f''(s) = \alpha'' \cdot s + \beta''$, $s \in [b,d]$. Esbocemos um roteiro rumo ao nosso objetivo (vide a figura ao lado) : Ajustaremos f'' sem alterar o caminho γ'', nem sua parametrização, de modo que f' e f'' formem um gráfico sem interrupção, fornecendo assim um caminho poligonal, formado por duas partes lineares. Em seguida, por meio de triângulo, faremos uma homotopia h desse caminho para um caminho linear, ou seja, para o gráfico de uma função linear g. A função g dará o caminho padrão procurado e a homotopia h induzirá a homotopia desejada.

De $\gamma'(b) = \gamma''(b)$, temos $e^{i \cdot (\alpha' \cdot b + \beta')} = e^{i \cdot (\alpha'' \cdot b + \beta'')}$. Portanto, $\alpha' \cdot b + \beta' = \alpha'' \cdot b + \beta'' + 2\pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Trocando β'' por $\beta'' + 2\pi k$, não alteramos o caminho γ'' (nem sua parametrização). Assim, chegamos a $\alpha' \cdot b + \beta' = \alpha'' \cdot b + \beta''$. Agora, podemos unir as funções reais $f'(s) = \alpha' \cdot s + \beta'$, $s \in [a,b]$, e $f''(s) = \alpha'' \cdot s + \beta''$, $s \in [b,d]$, numa função real (contínua pela Proposição **2.24**) $f : [a,d] \to \mathbb{R}$. Temos $\gamma(s) = c + r \cdot e^{i \cdot f(s)}$ para todo $s \in [a,d]$. O gráfico de f é o caminho poligonal $\vartheta = [\overline{p_0, p_1, p_2}]$, $\vartheta : [a,d] \to \mathbb{C}$, onde $p_0 = a + i \cdot f(a)$, $p_1 = b + i \cdot f(b)$ e $p_2 = d + i \cdot f(d)$. Em outras palavras, $f = \operatorname{Im} \vartheta$. O caminho $\zeta = [\overline{p_0, p_2}]$ tem sua parametrização linear $\zeta : [a,d] \to \mathbb{C}$. Portanto $g = \operatorname{Im} \zeta$ é uma função real linear e o caminho $\xi(s) = c + r \cdot e^{i \cdot g(s)}$, $s \in [a,d]$, é padrão. Sabemos que existe homotopia h (por meio de triângulo) de ϑ a ζ, isto é, existe uma função contínua $h : [a,d] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $h(s,0) = \vartheta(s)$, $h(s,1) = \zeta(s)$, $h(a,t) = p_0$ e $h(d,t) = p_2$ para todo $s \in [a,d]$ e para todo $t \in [0,1]$. Consequentemente, $\widetilde{h}(s,t) = c + r \cdot e^{i \cdot \operatorname{Im} h(s,t)}$ também é uma homotopia. Temos $\widetilde{h}(s,0) = c + r \cdot e^{i \cdot \operatorname{Im} h(s,0)} = c + r \cdot e^{i \cdot \operatorname{Im} \vartheta(s)} = c + r \cdot e^{i \cdot f(s)} = \gamma(s)$. Por outro lado, $\widetilde{h}(s,1) = c + r \cdot e^{i \cdot \operatorname{Im} h(s,1)} = c + r \cdot e^{i \cdot \operatorname{Im} \zeta(s)} = c + r \cdot e^{i \cdot g(s)} = \xi(s)$. A demonstração está completa.

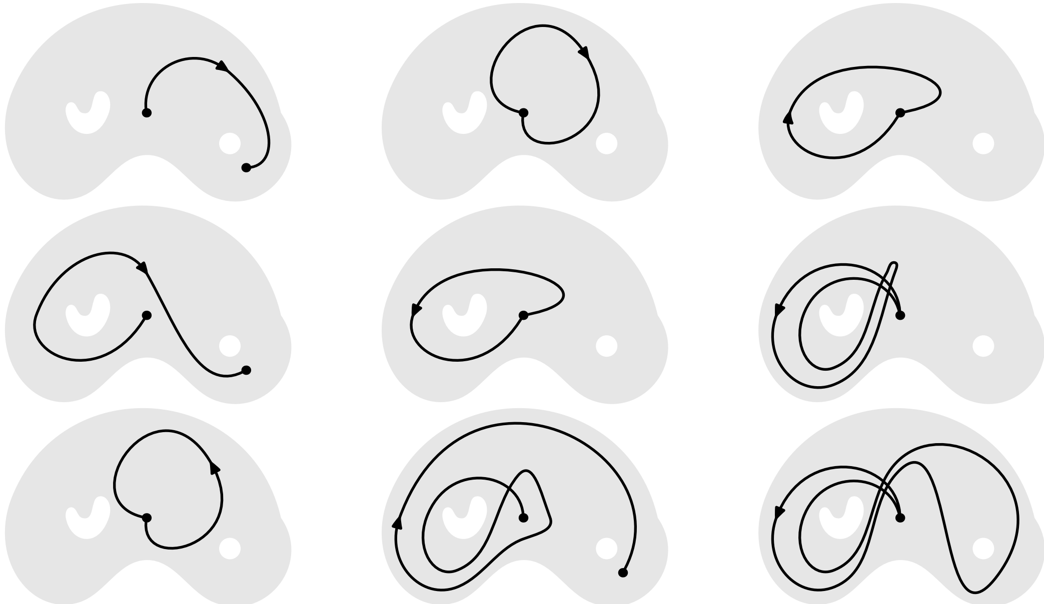
4.20. Corolário. *Qualquer caminho fechado em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ é homotópico em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ a um caminho padrão numa circunferência centrada em c.*

4.21. Iremos ver que os caminhos fechados em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, parametrizados por um intervalo fixo $[a,b]$ e com início (= fim) fixo em p, se classificam, a menos de homotopia, pelo número de voltas em torno de c. Realmente: seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{c\}$ um caminho fechado qualquer. Seja $\vartheta(s) = c + r \cdot e^{i \cdot (\alpha \cdot s + \beta)}$ um caminho padrão fechado homotópico a γ. Como $\vartheta(a) = \vartheta(b)$, obtemos $\alpha \cdot b + \beta = \alpha \cdot a + \beta + 2n\pi$

para algum $n \in \mathbb{Z}$. Daí obtemos o número de voltas $n = \dfrac{\alpha \cdot (b-a)}{2\pi}$. Ou seja, o número de voltas, em torno de c, feito pelo caminho padrão, é a velocidade angular α multiplicada pelo tempo gasto $b-a$ e dividida pelo ângulo 2π de uma volta completa. (Note que o número de voltas pode resultar negativo.)

Essa classificação não está completa: falta provar que caminhos com números de voltas diferentes não são homotópicos em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$. Em outras palavras: falta demonstrar que este número é uma invariante de homotopia. No próximo capítulo introduziremos o conceito de função holomorfa utilizando homotopia, e então, fazendo uma espécie de retorno, uma função holomorfa particular (no Capítulo **6**) nos permitirá estabelecer o número de voltas que um caminho é percorrido como invariante de homotopia.

Exercícios. 1. Quais dentre os nove caminhos, num mesmo domínio, são homotópicos?



2. No plano da demonstração do Teorema **4.11**, indique todos os triângulos da partição de R que $\widetilde{h}$ leva para a triângulos degenerados.

3.* Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Suponhamos que exista $p \in D$ tal que $[\overline{p,q}] \subset D$ para todo $q \in D$. Prove que qualquer caminho γ em D com início em p_0 e fim em p_1 é homotópico em D a $[\overline{p_0, p, p_1}]$.

4. Você tem dúvidas sobre como completar a demonstração do Teorema **4.11**? Pense nas perguntas cuja resposta você precisa. Escreva essas perguntas, da forma mais clara possível, em uma carta a ser enviada aos autores deste texto. Pronto? Ainda não mande a carta: leia as perguntas, verificando se todas fazem sentido.[33] Elimine ou corrija as que não fazem e se esforce em responder as que fazem.

[33] O que "não faz sentido"? ...
Um marido esperto e obediente comprou um par de botas, mas ao chegar em casa foi surpreendido pela reação furiosa da esposa: "Não quero ver você calçado com essas botas, ainda mais, gastando R$25,00 ! Devolva, venda, faça o que quiser, mas me traga de volta aqui o dinheiro." O infeliz passou dias tentando encontrar um comprador. No final encontrou dois, só que ambos aleijados, um da perna esuqerda e o outro da direita. Satisfeito com o resultado foi radiante para casa. Nova reação surpreendente e mais furiosa: "Vendeu para dois aleijados por esse preço?! Desalmado! Volte lá e devolva esses R$5,00 para eles!" Ele, esperto, obedeceu em parte: devolveu R$1,00 para cada um. Na roda de amigos, já meio embriagado, se vangloriava da sua esperteza, fazendo a conta: cada aleijado pagou R$11,50 (=R$12,50−R$1,00) por seu pé de bota e eu fiquei com R$3,00 para beber, R$11,50+R$11,50+R$3,00=R$26,00. Eu ganhei R$1,00?!

Esta pergunta não faz sentido.

Até o gato tem o direito de olhar a Rainha!
Dito popular inglês

5. Todos os Caminhos Levam à Sua Majestade, a Função Holomorfa

Sabemos que a integral de uma constante sobre qualquer caminho suave depende somente do início e do fim do caminho. Concretamente: seja $c \in \mathbb{C}$ uma constante e seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave com $p_0 = \gamma(a)$ e $p_1 = \gamma(b)$. Então $\int\limits_\gamma c\,dz = cp_1 - cp_0$.

O mesmo é válido para a função identidade $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$: pela Proposição **3.3**(4), temos

$$\int\limits_\gamma z\,dz = \int\limits_a^b \gamma(t)\dot\gamma(t)\,dt = \gamma(b)\gamma(b) - \gamma(a)\gamma(a) - \int\limits_a^b \dot\gamma(t)\gamma(t)\,dt = p_1^2 - p_0^2 - \int\limits_\gamma z\,dz.$$

Logo, $\int_\gamma z\,dz = \frac{p_1^2 - p_0^2}{2}$. O mesmo método nos permite integrar a função $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, pela Proposição **3.3**(2), aplicada o número necessário de vezes, obteremos

$$\frac{d\gamma^n}{dt} = \dot\gamma \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \gamma \cdot \gamma + \gamma \cdot \dot\gamma \cdot \ldots \cdot \gamma \cdot \gamma + \cdots + \gamma \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \dot\gamma \cdot \gamma + \gamma \cdot \gamma \cdot \ldots \cdot \gamma \cdot \dot\gamma = n\dot\gamma \cdot \gamma^{n-1}.$$

Daí, pela Proposição **3.3**(4,3), obtemos

$$\int\limits_\gamma z^n\,dz = \int\limits_a^b \big(\gamma(t)\big)^n \dot\gamma(t)\,dt = \big(\gamma(b)\big)^n\gamma(b) - \big(\gamma(a)\big)^n\gamma(a) - \int\limits_a^b \frac{d\big(\gamma(t)\big)^n}{dt} \cdot \gamma(t)\,dt = p_1^{n+1} - p_0^{n+1} -$$

$$- \int\limits_a^b n\dot\gamma(t) \cdot \big(\gamma(t)\big)^{n-1} \cdot \gamma(t)\,dt = p_1^{n+1} - p_0^{n+1} - n\int\limits_a^b \big(\gamma(t)\big)^n \cdot \dot\gamma(t)\,dt = p_1^{n+1} - p_0^{n+1} - n\int\limits_\gamma z^n\,dz$$

e, portanto, $\int\limits_\gamma z^n\,dz = \frac{p_1^{n+1} - p_0^{n+1}}{n+1}$.

A propriedade de uma função $f(z)$ ter integral sobre um caminho suave γ, dependente somente do início e do fim do caminho, pode ser expressa na

5.1. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que a função f é *holomorfa* (ou *analítica*) *em* D se a igualdade

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\vartheta f(z)\,dz$$

é valida para quaisquer γ e ϑ, caminhos regulares por partes e homotópicos em D. De outra maneira: a integral de f sobre um caminho em D é invariante em relação a qualquer homotopia em D.

5.2. Como a integral de uma função sobre um caminho é aditiva em relação à função, a soma de funções holomorfas em D é também holomorfa em D. Destas observações, concluímos que qualquer polinômio $f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

5.3. Podemos dar uma interpretação física ao conceito de função holomorfa. Suponhamos que um corpo (ou um ponto) se movimente numa região plana $D \subset \mathbb{C}$, num campo de forças, sem atrito. Isto significa que se o corpo percorrer um "pequeno" caminho fechado, ele não irá dissipar, nem acumular, "energia". Podemos caracterizar com $E = \int_\gamma f(z)\,dz$ a energia (ou outra grandeza deste tipo) que é dissipada (ou acumulada) durante o movimento pelo caminho γ.

Podemos expressar o fato de que a energia se preserva, como ocorre, por exemplo, no campo gravitacional da Terra, através da seguinte sentença: no interior de D, ao se alterar continuamente, o caminho entre dois pontos fixos, o valor de E permanece o mesmo. Em outras palavras: a função $f(z)$, que descreve o potencial do campo, é holomorfa. Os físicos dizem que tais campos são campos potenciais.[34]

Por que não falamos em **caminhos quaisquer** que unem dois pontos fixos? A resposta se baseia na física. As experiências são realizadas somente em situações locais (em discos abertos) e, não podemos garantir a preservação global da energia a partir da local.

Suponhamos, para concretizar o que foi dito, que "nosso mundo" seja o plano $\mathbb{C}$, sem a origem, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, e que o campo de forças seja dado pelo potencial $1/z$, sendo z a variável complexa. Mais adiante ficará claro que a função $1/z$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Entretanto, também veremos que $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ para qualquer caminho regular γ que contorne a origem, uma vez, no sentido anti-horário.

Seguiremos aqui um frutífero conselho matemático: ao nos depararmos com uma fórmula difícil de acreditar, é bom que a comprovemos num caso simples e acessível. Calculemos $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, sendo γ a circunferência unitária, $\gamma(t) = \cos t + i \cdot \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} (\cos t + i\cdot \operatorname{sen} t)^{-1} \cdot \frac{d(\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)}{dt}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} (\cos t - i \cdot \operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t + i\cdot \cos t)\, dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (\cos t - i\cdot\operatorname{sen} t)\cdot i \cdot (\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)\, dt = i \cdot \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\, dt = i \cdot \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Assim vimos que um corpo pode "acumular" energia, ao se mover por um caminho fechado num campo potencial, desde que contorne algum obstáculo (buraco) em D.

5.4. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua e seja $\gamma : [a, b] \to D$ um caminho fechado suave por partes. Podemos trocar o início (= fim) de γ. Qualquer $c \in [a, b]$ divide γ em duas partes, sendo uma $\gamma' = \gamma|_{[a,c]} : [a, c] \to D$ e a outra $\gamma'' = \gamma|_{[c,b]} : [c, b] \to D$. Obviamente, os caminhos γ' e γ'' são suaves por partes e $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma'} f(z)\, dz + \int_{\gamma''} f(z)\, dz$. Seja o caminho $\vartheta : [c, b - a + c] \to D$ definido por

$$\vartheta(s) = \begin{cases} \gamma''(s) = \gamma(s) & \text{se} \quad s \in [c, b] \\ \gamma'(s - b + a) = \gamma(s - b + a) & \text{se} \quad s \in [b, b - a + c] \end{cases}$$

É fácil ver que ϑ é suave por partes, fechado e formado pelas partes ϑ' e ϑ'', onde $\vartheta' = \gamma''$ e ϑ'' é γ' com outra parametrização. Dizemos que o caminho fechado ϑ é obtido do caminho fechado γ pela *troca do início*. Com isso, $\int_\vartheta f(z)\, dz = \int_{\vartheta'} f(z)\, dz + \int_{\vartheta''} f(z)\, dz = \int_{\gamma''} f(z)\, dz + \int_{\gamma'} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$. Assim, a integral sobre um caminho fechado não depende da escolha do seu início. (Note que na troca do início a orientação foi preservada. Caso contrário, a integral mudaria de sinal.)

Seja $T \subset \mathbb{C}$ um triângulo e denotemos por ∂T o caminho poligonal, fechado, formado pelos lados de T, percorrido no sentido anti-horário. Pela observação acima, não é necessário indicar o início de ∂T na integral $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$.

5.5. Critério de Analiticidade. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então f é holomorfa em D se, e somente se, $\int\limits_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ para qualquer triângulo T contido em D, $T \subset D$.*

Demonstração. Suponhamos que f é holomorfa em D e que o triângulo T está contido em D. Sejam p_0, p_1, p_2 os vértices de T enumerados de modo que $\partial T = [\overline{p_0, p_1, p_2, p_0}]$. Então os caminhos $[\overline{p_0, p_1, p_2}]$ e $[\overline{p_0, p_2}]$ são homotópicos em D (por meio do triângulo $T \subset D$) e, como f é holomorfa em D, temos $\int_{[\overline{p_0,p_1,p_2}]} f(z)\, dz = \int_{[\overline{p_0,p_2}]} f(z)\, dz$. Portanto, $\int_{\partial T} f(z)\, dz = \int_{[\overline{p_0,p_1,p_2,p_0}]} f(z)\, dz = \int_{[\overline{p_0,p_1,p_2}]} f(z)\, dz + \int_{[\overline{p_2,p_0}]} f(z)\, dz = \int_{[\overline{p_0,p_1,p_2}]} f(z)\, dz - \int_{[\overline{p_0,p_2}]} f(z)\, dz = 0$.

[34] Os conceitos físicos tratados aqui são de responsabilidade do Professor Dr. Yuri Bozhkov.

Reciprocamente: suponhamos que $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ para qualquer triângulo T contido em D.

Primeiramente, aplicando o Teorema **4.11**, observemos que

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\overline{\vartheta}} f(z)\,dz$$

para quaisquer caminhos poligonais $\overline{\gamma}, \overline{\vartheta} : [a,b] \to D$, homotópicos em D. Isto porque o Teorema **4.11** reduz a questão à validade da igualdade $\int_{\overline{[p_0,p_1,p_2]}} f(z)\,dz = \int_{\overline{[p_0,p_2]}} f(z)\,dz$, onde $T \subset D$ é um triângulo com vértices p_0, p_1, p_2. Já vimos que essa igualdade é equivalente a $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

Sejam agora $\gamma, \vartheta : [a,b] \to D$ dois caminhos regulares por partes, homotópicos em D. Seja h a homotopia de γ a ϑ em D, $h : [a,b] \times [0,1] \to D$.

Suponhamos que $\int_\gamma f(z)\,dz \neq \int_\vartheta f(z)\,dz$, isto é,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\vartheta f(z)\,dz \right| = a > 0.$$

Pela Proposição **2.32**, h tem imagem compacta, $K = h\big([a,b] \times [0,1]\big) \subset D$. Pelo Lema **2.29**, existem $D' \subset \mathbb{C}$ aberto e $K' \subset \mathbb{C}$ compacto, tais que $K \subset D' \subset K' \subset D$. Note que γ e ϑ são caminhos homotópicos em D'.

Pelo Lema **3.9**, os caminhos γ e ϑ são formados por suas partes regulares e simples $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ e $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, respetivamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que $k = m$ (em caso de necessidade, podemos aumentar o número de partes de um caminho, subdividindo partes do caminho).

Façamos $\varepsilon = \dfrac{a}{2 \cdot (m+2)}$ e apliquemos o Teorema **3.13** para a restrição $f|_{K'} : K' \to \mathbb{C}$ e para cada um dos caminhos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$. Obtemos uma constante $\ell > 0$ (na verdade, o Teorema **3.13** garante a existência de constantes, uma para cada um dos caminhos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$; denotamos por ℓ a menor delas) tal que, para quaisquer caminhos poligonais $\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_m, \overline{\vartheta}_0, \overline{\vartheta}_1, \ldots, \overline{\vartheta}_m \subset K'$, inscritos em $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, respetivamente, e com cordas de comprimento $\leq \ell$, são válidas as desigualdades

$$\left| \int_{\gamma_j} f(z)\,dz - \int_{\overline{\gamma}_j} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon, \qquad \left| \int_{\overline{\vartheta}_j} f(z)\,dz - \int_{\vartheta_j} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, m$.

O Teorema **4.8** aplicado a D' e a cada um dos caminhos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ fornece caminhos poligonais $\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_m, \overline{\vartheta}_0, \overline{\vartheta}_1, \ldots, \overline{\vartheta}_m \subset D' \subset K'$, inscritos, respetivamente, nos caminhos $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, homotópicos, respetivamente, aos em D' e com cordas de comprimento $\leq \ell$. Juntando $\overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_m$, obtemos um caminho poligonal $\overline{\gamma} \subset D'$ homotópico a γ em D'. Da mesma maneira, obtemos o caminho poligonal $\overline{\vartheta} \subset D'$ homotópico a ϑ em D'. Como $\overline{\gamma}$ e $\overline{\vartheta}$ são poligonais e homotópicos em D', teremos, como acabamos de provar acima, $\int_{\overline{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\overline{\vartheta}} f(z)\,dz$. Em suma,

$$a = \left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\vartheta f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\overline{\gamma}} f(z)\,dz + \int_{\overline{\vartheta}} f(z)\,dz - \int_\vartheta f(z)\,dz \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{m} \Big(\int_{\gamma_j} f(z)\,dz - \int_{\overline{\gamma}_j} f(z)\,dz \Big) + \sum_{j=0}^{m} \Big(\int_{\overline{\vartheta}_j} f(z)\,dz - \int_{\vartheta_j} f(z)\,dz \Big) \right| \leq \sum_{j=0}^{m} \left| \int_{\gamma_j} f(z)\,dz - \int_{\overline{\gamma}_j} f(z)\,dz \right| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \left| \int_{\overline{\vartheta}_j} f(z)\,dz - \int_{\vartheta_j} f(z)\,dz \right| \leq (m+1) \cdot \varepsilon + (m+1) \cdot \varepsilon = \frac{(m+1) \cdot a}{m+2}$$

que contradiz a hipótese $a > 0$. A demonstração está completa.

5.6. Lema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então a função $f(z) \cdot z$ será holomorfa em D.*

Demonstração. Pelo Critério de Analiticidade **5.5**, é suficiente provar que $\int_{\partial T} f(z) z\,dz = 0$ para qualquer triângulo T contido em D. Seja $T \subset D$ um triângulo qualquer contido em D, mantido fixo até o fim da demonstração.

Para qualquer triângulo T', designamos por $P(T')$ o perímetro de T', ou seja, $P(T') = \mu(\partial T')$. Obviamente $|q - p| \leq P(T')$ para quaisquer $p, q \in T'$ (na realidade, $|q - p|$ é menor ou igual ao comprimento do maior lado de T').

Por **2.34**, T é compacto. Pelo Teorema **2.31**, a função $f(z)$ é unifomemente contínua em T. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\left|f(q) - f(p)\right| < \varepsilon$ para quaisquer $p, q \in T$ com $|q - p| < \delta(\varepsilon)$.

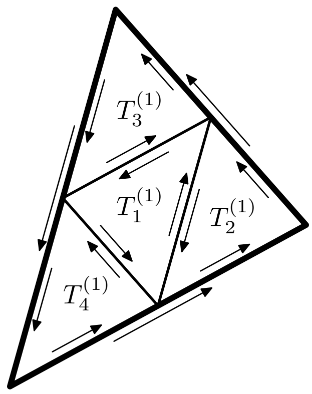
Tomemos um $\varepsilon > 0$ qualquer. Seja $T' \subset T$ um triângulo contido em T tal que $P(T') < \delta(\varepsilon)$. Fixemos um ponto arbitrário $p' \in T'$ (por exemplo, um dos vértices de T'). Para qualquer $q \in T'$ teremos $\left|f(q) - f(p')\right| \leq \varepsilon$. Como $f(z)$ e $f(p')(z - p')$ são funções holomorfas em D e $T' \subset T \subset D$, então, pelo Critério de Analiticidade **5.5**, $\int_{\partial T'} f(z)p'\,dz = 0$ e $\int_{\partial T'} f(p')(z - p')\,dz = 0$. Agora, usando o Lema **3.7** e lembrando que $|z - p'| \leq P(T')$ quando $z \in T'$, teremos

$$\left|\int_{\partial T'} f(z)z\,dz\right| = \left|\int_{\partial T'} \big(f(z) - f(p')\big)(z - p')\,dz + \int_{\partial T'} f(p')(z - p')\,dz + \int_{\partial T'} f(z)p'\,dz\right| =$$

$$= \left|\int_{\partial T'} \big(f(z) - f(p')\big)(z - p')\,dz\right| \leq \varepsilon \cdot P(T') \cdot P(T').$$

Depois de toda essa preparação, podemos partir para a demonstração que faremos por redução a absurdo.[35] Suponhamos que $\left|\int_{\partial T} f(z)z\,dz\right| = a > 0$ e ponhamos $\varepsilon = \dfrac{a}{2 \cdot \big(P(T)\big)^2}$. Para $n \in \mathbb{N}$ apropriado, teremos $\dfrac{P(T)}{2^n} < \delta(\varepsilon)$. Assim, se $T' \subset T$ é um triângulo contido em T com $P(T') \leq \dfrac{P(T)}{2^n}$, então

$$\left|\int_{\partial T'} f(z)z\,dz\right| \leq \frac{a}{2 \cdot 4^n}.$$



Ligando as metades dos lados de T, como no desenho, obteremos quatro triângulos $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$ contidos em T e semelhantes a T. Além disso, $P(T_j^{(1)}) = P(T)/2$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Observando o desenho, é fácil ver que

$$\int_{\partial T} f(z)z\,dz = \int_{\partial T_1^{(1)}} f(z)z\,dz + \int_{\partial T_2^{(1)}} f(z)z\,dz +$$
$$+ \int_{\partial T_3^{(1)}} f(z)z\,dz + \int_{\partial T_4^{(1)}} f(z)z\,dz.$$

Vamos chamar os triângulos $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$ de triângulos de primeira geração. Do mesmo modo pelo qual obtivemos os triângulos $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}$, $T_4^{(1)}$ a partir de T, podemos criar os triângulos $T_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \ldots, 16$ a partir de cada um dos triângulos $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$, obtendo triângulos de segunda geração, e assim sucessivamente. Enfim, obteremos os triângulos $T_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, 4^n$, de n-ésima geração, tais que $P(T_j^{(n)}) = \dfrac{P(T)}{2^n}$ e

$$\int_{\partial T} f(z)z\,dz = \sum_{j=1}^{4^n} \int_{\partial T_j^{(n)}} f(z)z\,dz.$$

Consequentemente,

$$a = \left|\int_{\partial T} f(z)z\,dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4^n} \left|\int_{\partial T_j^{(n)}} f(z)z\,dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4^n} \frac{a}{2 \cdot 4^n} = \frac{a}{2}$$

contradizendo a hipótese $a > 0$. A demonstração está completa.

5.7 O método utilizado na demonstração do Lema **5.6** possibilita limitar a verificação baseada no Critério de Analiticidade **5.5** a triângulos com perímetro arbitrariamente pequeno, incluídos num triângulo dado

5.8. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função. A função f será holomorfa em D se, e somente se, para todo $p \in D$, existir uma vizinhança aberta U_p contida em D, $p \in U_p \subset D$, tal que a restrição $f|_{U_p} : U_p \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa em U_p.*[36]

[35] O leitor já deve ter notado que reduzir a absurdo é uma idéia frutífera em (apenas!) duas áreas da atividade humana: Matematica ... e Humor.

[36] Isto indica que a propriedade "ser holomorfa" é local.

Demonstração. Obviamente, é holomorfa a restrição de uma função holomorfa a qualquer subconjunto aberto. Reciprocamente: suponhamos que, para todo $p \in D$, a função $f|_{U_p}$ seja holomorfa em U_p. Pela Proposição **2.25**, f é contínua em D. Para usarmos o Critério de Analiticidade **5.5**, será suficiente verificar que, para todo triângulo $T \subset D$, tenhamos $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Os conjuntos U_p, $p \in D$, formam uma cobertura aberta de T. Por **2.34**, T é compacto. Pelo Lema **2.16**, esta cobertura possui raio de Lebesque $r > 0$. Por **5.7**, é suficiente verificar que $\int_{\partial T'} f(z)\,dz = 0$ para qualquer triângulo $T' \subset T$ com perímetro $< r$, $P(T') < r$. Seja $p' \in T'$ um ponto (por exemplo, um dos vértices de T'). Então existe um membro U_p da cobertura tal que $\Delta(p', r) \subset U_p$. De $P(T') < r$ segue que $T' \subset \Delta(p', r)$. Daí, $\int_{\partial T'} f(z)\,dz = 0$ pelo Critério de Analiticidade **5.5** aplicado à função holomorfa $f|_{U_p} : U_p \to \mathbb{C}$. A demonstração está completa.

5.9. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então, para qualquer polinômio $p(z)$, a função $f \cdot p$ é holomorfa em D.*

Exercícios. 1. Indique quais das funções abaixo são holomorfas em $\mathbb{C}$

$$z^5, \qquad \bar{z}, \qquad |z|^2, \qquad |z|, \qquad \operatorname{Re} z, \qquad 1/z.$$

Justifique.

2. Prove que, para qualquer caminho suave γ, é valida a fórmula $\dfrac{de^{\gamma(t)}}{dt} = e^{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)$. Daí deduza que a função e^z é holomorfa em $\mathbb{C}$.

3.* Prove que a função $1/z^2$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Problemas?! Como superá-los?!
A resposta só pode ser: Uniformizar!
Uniformizar corpos ... Uniformizar comportamentos ...
De uma preleção do General Delírio

6. A Convergência Uniforme e as Séries de Potências. Será que $\lim \int = \int \lim$?

6.1. Seja $x \in \mathbb{C}$. Então $(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1-x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n-x-x^2-\cdots-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para $x \neq 1$. Para $|x|<1$, teremos $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, ou $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$. No caso em que $|x| \leq a < 1$ para algum a tal que $0 \leq a < 1$, teremos

$$\Big|\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{n} x^j\Big| = \Big|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\Big| = \Big|\frac{x^{n+1}}{1-x}\Big| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Note que, para n cresente, as funções $\frac{1}{1-x}$ e $\sum_{j=0}^{n} x^j$ são próximas, com uma estimativa de proximidade independente de x, sendo x pertencente ao disco de raio a. Tal estimativa é dita *uniforme.*

6.2. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam dadas funções $f : S \to \mathbb{C}$ e $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência de funções f_n, $n \in \mathbb{N}$, *converge uniformemente sobre* S à função f se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n(\varepsilon)$ e para todo $s \in S$, $\big|f_n(s) - f(s)\big| < \varepsilon$. (Note que $n(\varepsilon)$ não depende de $s \in S$.) Nesta situação, escrevemos $f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$.

6.3. Definição. Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam dadas funções $f : S \to \mathbb{C}$ e $f_j : S \to \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Dizemos que a série $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, formada pelas funções f_j, *converge uniformemente sobre* S à função f, se a sequência de funções σ_n, $n \in \mathbb{N}$, onde $\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$, convergir uniformemente sobre S 'a função f. Nesta situação, escrevemos $f = \sum_{j=0}^{\infty}{}^S f_j$. A série de funções $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ é dita *absolutamente convergente sobre* S se as normas $||f_j||_S$ existirem para todo $j \in \mathbb{N}$ e, se for convergente a série de números reais positivos $\sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S$.

6.4. Proposição. *Seja $S \subset \mathbb{C}$ e sejam dadas funções $f, g : S \to \mathbb{C}$ e $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Se as normas $||f||_S$ e $||g||_S$ existem, então as normas $||f+g||_S$ e $||f \cdot g||_S$ existem e $||f+g||_S \leq ||f||_S + ||g||_S$, $||f \cdot g||_S \leq ||f||_S \cdot ||g||_S$.*

(2) *$f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_S = 0$.*

(3) *Se $f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$, então $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ para qualquer $s \in S$. Em particular, toda sequência de funções, uniformemente convergente sobre S, tem um único limite.*

(4) *Suponhamos que* $f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$ *e que as funções* f_n *sejam contínuas em* S. *Nestas condições, a função* f *é contínua em* S. *Além disso, para qualquer caminho* γ *em* S, *suave por partes, o limite* $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$ *existe e*

$$\int_\gamma \big(\lim_{n\to\infty}{}^S f_n\big)(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Demonstração. Em seguida, usaremos a propriedade básica da norma de funções (vide Definição **3.6**) : para qualquer $r \in \mathbb{R}$, a desigualdade $||f||_S \le r$ é válida se, e somente se, $\big|f(s)\big| \le r$ para todo $s \in S$.

(1) Para todo $s \in S$, temos $\big|f(s)\big| \le ||f||_S$ e $|g(s)| \le ||g||_S$. Portanto, $\big|f(s)+g(s)\big| \le \big|f(s)\big| + \big|g(s)\big| \le ||f||_S + ||g||_S$ para todo $s \in S$. Assim, $||f+g||_S \le ||f||_S + ||g||_S$. Da mesma maneira, para todo $s \in S$, temos $\big|f(s)\cdot g(s)\big| = \big|f(s)\big|\cdot\big|g(s)\big| \le ||f||_S \cdot ||g||_S$. Daí, $||f\cdot g||_S \le ||f||_S \cdot ||g||_S$.

(2) Suponhamos que $f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge n(\varepsilon)$ e para todo $s \in S$, $\big|f_n(s) - f(s)\big| < \varepsilon$. Portanto, para os mesmos n, teremos $||f_n - f||_S \le \varepsilon$. Daí, vemos que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_S = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_S = 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge n(\varepsilon)$, a desigualdade $||f_n - f||_S < \varepsilon$ é válida. Portanto, para $n \ge n(\varepsilon)$ e para $s \in S$ qualquer, teremos $\big|f_n(s) - f(s)\big| \le ||f_n - f||_S < \varepsilon$, ou seja, $f = \lim_{n\to\infty}{}^S f_n$.

(3) De fato: para qualquer $s \in S$, teremos $\big|f_n(s) - f(s)\big| \le ||f_n - f||_S$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \big|f_n(s) - f(s)\big| = 0$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$.

(4) Tomemos $p \in S$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Então existe $n_0 = n(\varepsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f||_S < \varepsilon/3$ para todo $n \ge n_0$. Como a função f_{n_0} é contínua em p, então existe $\delta(\varepsilon/3) > 0$ tal que $\big|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(p)\big| < \varepsilon/3$ para todo $s \in S$ com $|s - p| < \delta(\varepsilon/3)$. Para os mesmos s, temos

$$\begin{aligned}\big|f(s) - f(p)\big| &= \big|f(s) - f_{n_0}(s) + f_{n_0}(s) - f_{n_0}(p) + f_{n_0}(p) - f(p)\big| \le \big|f(s) - f_{n_0}(s)\big| + \big|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(p)\big| + \\ &+ \big|f_{n_0}(p) - f(p)\big| \le ||f - f_{n_0}||_S + \big|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(p)\big| + ||f_{n_0} - f||_S < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Concluímos que f é contínua em S e, portanto, tem sentido a integral $\int_\gamma f(z)\,dz$. Finalmente

$$\Big|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le ||f_n - f||_\gamma \cdot \mu(\gamma) \le ||f_n - f||_S \cdot \mu(\gamma) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

A demonstração está completa.

6.5. Proposição. *Seja* $S \subset \mathbb{C}$ *e sejam dadas funções* $f_n, g_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Suponhamos que a série de funções* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *convirja absolutamente sobre* S. *Então ela convergirá uniformemente sobre* S *e* $\Big|\Big|\sum_{j=0}^{\infty}{}^S f_j\Big|\Big|_S \le \sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S$.

(2) *Se as séries de funções* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ *convergirem uniformemente (absolutamente) sobre* S, *então a série* $\sum_{j=0}^{\infty} (f_j + g_j)$ *convergirá uniformemente (absolutamente) sobre* S *e*

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}^{S} f_j + \sum_{j=0}^{\infty}{}^{S} g_j = \sum_{j=0}^{\infty}{}^{S} (f_j + g_j).$$

(3) *Se as séries de funções* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ *convergirem absolutamente sobre* S*, então a série* $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$*, formada pelas funções* $h_m = \sum_{j=0}^{m} f_j \cdot g_{m-j}$*, convergirá absolutamente sobre* S *e*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}{}^{S} f_j\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty}{}^{S} g_k\Big) = \sum_{m=0}^{\infty}{}^{S} \Big(\sum_{j=0}^{m} f_j \cdot g_{m-j}\Big).$$

Demonstração. (1) Primeiramente provemos que, para todo $s \in S$, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(s)$. Fixemos $s \in S$ qualquer. A série $\sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S$, de números reais positivos, converge e, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $\big|\mathrm{Re}\, f_j(s)\big| \le \big|f_j(s)\big| \le ||f_j||_S$ e $\big|\mathrm{Im}\, f_j(s)\big| \le \big|f_j(s)\big| \le ||f_j||_S$. De acordo com um conhecido critério de convergência de séries de números reais,[37] concluímos que as séries de números reais $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, f_j(s)$ e $\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, f_j(s)$ são convergentes, isto é, existem os limites $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Re}\, f_j(s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} \Big(\sum_{j=0}^{n} f_j(s)\Big)$ e $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Im}\, f_j(s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} \Big(\sum_{j=0}^{n} f_j(s)\Big)$. Pela Proposição **2.7**, o limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(s)$ existe; seja $f(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(s)$ este limite.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $s \in S$. Eliminando as m primeiras funções da série $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, obtemos uma nova série $\sum_{j=m}^{\infty} f_j$ que também é absolutamente convergente. Aplicando a esta o resultado obtido acima, concluímos que o limite $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\ge m}} \sum_{j=m}^{n} f_j(s)$ também existe. Para todo $n \ge m$, temos $\Big|\sum_{j=m}^{n} f_j(s)\Big| \le \sum_{j=m}^{n} \big|f_j(s)\big| \le \sum_{j=m}^{n} ||f_j||_S \le \sum_{j=m}^{\infty} ||f_j||_S$. Pela Proposição **2.7** e pelas desigualdades que acabamos de obter, teremos

$$\Big|\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\ge m}} \sum_{j=m}^{n} f_j(s)\Big| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\ge m}} \Big|\sum_{j=m}^{n} f_j(s)\Big| \le \sum_{j=m}^{\infty} ||f_j||_S.$$

Para $m = 0$, isto implica $\big|f(s)\big| = \Big|\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(s)\Big| \le \sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S$. Logo,

[37] Caso tenha sido esquecido, o critério conhecido é: sejam dadas duas séries de números reais $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} r_j$, tais que as desigualdades $c_j \ge |r_j|$ valem para todos os j. Se a série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ for convergente, a serie $\sum_{j=0}^{\infty} r_j$ também será convergente.

$$||f||_S \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S.$$

Para $m > 0$: $f(s) - \sum_{j=0}^{m-1} f_j(s) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq m}} \sum_{j=m}^{n} f_j(s)$. Consequentemente, $\Big|f(s) - \sum_{j=0}^{m-1} f_j(s)\Big| \leq \sum_{j=m}^{\infty} ||f_j||_S$. Daí, $\Big|\Big|f - \sum_{j=0}^{m-1} f_j\Big|\Big|_S \leq \sum_{j=m}^{\infty} ||f_j||_S$. De $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=m}^{\infty} ||f_j||_S = 0$ concluímos que $\lim_{m\to\infty} \Big|\Big|f - \sum_{j=0}^{m-1} f_j\Big|\Big|_S = 0$. Pela Proposição **6.4**(2), $f = {\sum_{j=0}^{\infty}}^S f_j$.

(2) Se as séries de funções $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ forem absolutamente convergentes sobre S, então, pela Proposição **6.4**(1),

$$\sum_{j=0}^{n} ||f_j + g_j||_S \leq \sum_{j=0}^{n} \big(||f_j||_S + ||g_j||_S\big) = \sum_{j=0}^{n} ||f_j||_S + \sum_{j=0}^{n} ||g_j||_S \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S + \sum_{j=0}^{\infty} ||g_j||_S < \infty.$$

Em palavras: a série de funções $\sum_{j=0}^{\infty}(f_j + g_j)$ é absolutamente convergente sobre S.

Caso as séries de funções $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ convirjam uniformemente sobre S, sejam $f = {\sum_{j=0}^{\infty}}^S f_j$ e $g = {\sum_{j=0}^{\infty}}^S g_j$. Pela Proposição **6.4**(1), teremos

$$\Big|\Big|f + g - \sum_{j=0}^{n}(f_j + g_j)\Big|\Big|_S \leq \Big|\Big|f - \sum_{j=0}^{n} f_j\Big|\Big|_S + \Big|\Big|g - \sum_{j=0}^{n} g_j\Big|\Big|_S \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Pela Proposição **6.4**(2), $f + g = {\sum_{j=0}^{\infty}}^S (f_j + g_j)$.

(3) Pela Proposição **6.4**(1), temos

$$\sum_{m=0}^{n} ||h_m||_S = \sum_{m=0}^{n} \Big|\Big|\sum_{j=0}^{m} f_j \cdot g_{m-j}\Big|\Big|_S \leq \sum_{m=0}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{m} ||f_j||_S \cdot ||g_{m-j}||_S\Big) = \sum_{m=0}^{n} \Big(\sum_{\substack{0\leq j,k\leq m \\ j+k=m}} ||f_j||_S \cdot ||g_k||_S\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n \\ 0\leq j+k\leq n}} ||f_j||_S \cdot ||g_k||_S \leq \Big(\sum_{j=0}^{n} ||f_j||_S\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{n} ||g_k||_S\Big) \leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_S\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} ||g_k||_S\Big) < \infty.$$

Assim, a série $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ é absolutamente convergente sobre S.

Façamos $f = {\sum_{j=0}^{\infty}}^S f_j$ e $g = {\sum_{k=0}^{\infty}}^S g_k$. Pelo item (1), temos

$$\Big|\Big|\Big(\sum_{j=0}^{n} f_j\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{n} g_k\Big) - \sum_{m=0}^{n} h_m\Big|\Big|_S = \Big|\Big|\Big(\sum_{j,k=0}^{n} f_j \cdot g_k\Big) - \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n \\ j+k\leq n}} f_j \cdot g_k\Big|\Big|_S = \Big|\Big|\sum_{\substack{0\leq j,k\leq n \\ j+k>n}} f_j \cdot g_k\Big|\Big|_S \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n\\ j+k>n}} ||f_j||_S \cdot ||g_k||_S \leq^* \Big(\sum_{n/2<j\leq n} ||f_j||_S\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n}||g_k||_S\Big)+\Big(\sum_{j=0}^{n}||f_j||_S\Big)\cdot\Big(\sum_{n/2<k\leq n}||g_k||_S\Big)\leq$$

$$\leq \Big(\sum_{j>n/2} ||f_j||_S\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}||g_k||_S\Big)+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}||f_j||_S\Big)\cdot\Big(\sum_{k>n/2}||g_k||_S\Big)\longrightarrow 0$$

quando $n \to 0$. Daí,

$$\Big|\Big|f\cdot g-\sum_{m=0}^{n}h_m\Big|\Big|_S=\Big|\Big|\Big(f-\sum_{j=0}^{n}f_j\Big)\cdot g+\Big(\sum_{j=0}^{n}f_j\Big)\cdot\Big(g-\sum_{k=0}^{n}g_k\Big)+\Big(\sum_{j=0}^{n}f_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n}g_k\Big)-\sum_{m=0}^{n}h_m\Big|\Big|_S\leq$$

$$\leq\Big|\Big|f-\sum_{j=0}^{n}f_j\Big|\Big|_S\cdot||g||_S+\Big(\sum_{j=0}^{n}||f_j||_S\Big)\cdot\Big|\Big|g-\sum_{k=0}^{n}g_k\Big|\Big|_S+\Big|\Big|\Big(\sum_{j=0}^{n}f_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n}g_k\Big)-\sum_{m=0}^{n}h_m\Big|\Big|_S\leq$$

$$\leq\Big|\Big|f-\sum_{j=0}^{n}f_j\Big|\Big|_S\cdot||g||_S+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}||f_j||_S\Big)\cdot\Big|\Big|g-\sum_{k=0}^{n}g_k\Big|\Big|_S+\Big|\Big|\Big(\sum_{j=0}^{n}f_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n}g_k\Big)-\sum_{m=0}^{n}h_m\Big|\Big|_S\longrightarrow 0$$

quando $n \to 0$. Pela Proposição **6.4**(2), $f\cdot g=\sum_{m=0}^{\infty}{}^S h_m$.

A demonstração está completa.[38]

6.6. Corolário. *Seja $D\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja f_n, $n\in\mathbb{N}$, uma sequência de funções holomorfas em D, uniformemente convergente sobre D. Então a função $\lim_{n\to\infty}{}^S f_n$ é holomorfa em D.*

Demonstração. Pela Proposição **6.4**(4), a função $f=\lim_{n\to\infty}{}^S f_n$ é contínua em D. Seja $T\subset D$ um triângulo contido em D. Como as funções f_n são holomorfas em D, então, para todo n, temos $\int_{\partial T} f_n(z)\,dz=0$. Pela Proposição **6.4**(4), $\int_{\partial T}\big(\lim_{n\to\infty}{}^S f_n\big)(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\int_{\partial T} f_n(z)\,dz=0$. Pelo Critério de Analiticidade **5.5**, a função f é holomorfa em D. A demonstração está completa.

6.7. Corolário. *Seja $w\in\mathbb{C}$. Tomemos c e b tais que $c\neq w$ e $0<b<|w-c|$. Então a série $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$, de funções da variável z, será absolutamente convergente sobre o disco $\Delta(c,b)$, e $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}=\frac{1}{w-z}$. A função $f(z)=\frac{1}{z-w}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{w\}$.*

Demonstração. Seja $c\in\mathbb{C}\setminus\{w\}$ e seja $0<b<|w-c|$. Ponhamos $a=\frac{b}{|w-c|}$; vemos que $0<a<1$. A série $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$, de funções de z, é absolutamente convergente sobre $\Delta(c,b)$, pois, para $z\in\Delta(c,b)$, teremos $\Big|\frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}\Big|=\frac{|z-c|^j}{|w-c|^{j+1}}\leq\frac{b^j}{|w-c|^{j+1}}=\frac{a^j}{|w-c|}$ e, por **6.1**, $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{|w-c|}=\frac{1}{|w-c|\cdot(1-a)}<\infty$. Como $\Big|\frac{z-c}{w-c}\Big|<\frac{b}{|w-c|}=a<1$, então $\frac{z-c}{w-c}\neq 1$ e podemos aplicar as fórmulas de **6.1** para $x=\frac{z-c}{w-c}$. Obteremos

* Note que $j+k>n$ implica $j>n/2$ ou $k>n/2$.

[38] Você chegou a cochilar? Não se incomode! O nosso cotidiano é uma luta constante: antes do almoço, contra a fome e depois do almoço, contra o sono.

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} = \frac{1}{w-c} \cdot \frac{1-\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-c}{w-c}} = \frac{1-\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^{n+1}}{w-z} = \frac{1}{w-z} - \frac{\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^{n+1}}{w-z} \longrightarrow \frac{1}{w-z},$$

quando $n \to \infty$. Pelas Proposições **6.5**(1), **6.4**(3) e pelo Corolário **6.6**, a função $f(z) = \dfrac{1}{z-w}$ é holomorfa no disco $\Delta(c,b)$. Pelo Corolário **5.8**, a função $\dfrac{1}{z-w}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{w\}$. A demonstração está completa.

6.8. Definição. Sejam $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, e seja $c \in \mathbb{C}$. Então a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ é dita *série de potências* (*centrada em* c).

6.9. Vamos buscar agora condições para que uma série de potências seja convergente.

Fixemos $z \in \mathbb{C}$, $z \neq c$. O fato da série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ convergir significa que existe o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n$, onde $\sigma_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} c_j(z-c)^j$. Neste caso, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 0$, ou seja, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n(z-c)^n = 0$. Isto implica que $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-c\,| < 1$ para n suficientemente grande, ou seja, $\sqrt[n]{|c_n|} < \dfrac{1}{|z-c\,|}$. Assim, se existir $r > 0$ tal que $\sqrt[n]{|c_n|} \geq \dfrac{1}{r}$ para infinitos valores de n e tal que $r \leq |z-c\,|$, então a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ não converge.

Agora suponhamos que exista $r > 0$ tal que $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \dfrac{1}{r}$ para n suficientemente grande (digamos para $n \geq n_0$) e tal que $|z-c\,| < r$. Então $|c_j| \leq \dfrac{1}{r^j}$ para $j \geq n_0$. Sabemos que a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge simultaneamente com a série $\displaystyle\sum_{j=n_0}^{\infty} c_j(z-c)^j$. Para a última, temos $\displaystyle\sum_{j=n_0}^{\infty} \left|c_j(z-c)^j\right| \leq \sum_{j=n_0}^{\infty} \left(\frac{|z-c\,|}{r}\right)^j < \infty$ que enfim garante a convergencia da série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$.

Imaginemos que exista R, valor crítico de r, tal que, quando $r < R$, temos $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \dfrac{1}{r}$ para n suficientemente grande; e, quando $r > R$, temos $\sqrt[n]{|c_n|} \geq \dfrac{1}{r}$ para infinitos valores de n. Nestas circunstâncias, se $|z-c\,| < R$, podemos encontrar r tal que $|z-c\,| < r < R$ e então $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \dfrac{1}{r}$ para n suficientemente grande. Pela argumentação anterior, isto implica que a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge. Ao revés, se $|z-c\,| > R$, podemos encontrar r tal que $|z-c\,| > r > R$ e então $\sqrt[n]{|c_n|} \geq \dfrac{1}{r}$ para infinitos valores de n. Pela argumentação acima, isto implica que a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ diverge.

Este R (se existir) se chama *raio de convergência da série* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$. Para provarmos a existência de tal R, utilizaremos o conceito de *limite supereor.*

6.10. Seja $k_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência arbitrária de números reais. Para todo $m \in \mathbb{N}$, seja $s_m = \sup\{k_n \mid n \geq m\}$. Note que é possível termos $s_m = +\infty$. A sequência s_m, $m \in \mathbb{N}$, é não-crescente. Portanto, existe o limite $\lim_{m\to\infty} s_m$ que é ou $+\infty$ (quando todos os s_m são iguais a $+\infty$), ou $-\infty$, ou finito. Denotemos esse limite como $\limsup_{n\to\infty} k_n$. Se a sequência k_n, $n \in \mathbb{N}$, for limitada inferiormente (isto é, se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $k_n \geq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então este limite ou é finito ou é $+\infty$ (e $\limsup_{n\to\infty} k_n \geq L$). Por exemplo, quando os k_n são não-negativos, o limite é ou finito não-negativo, ou $+\infty$. Caso a sequência k_n, $n \in \mathbb{N}$, seja limitada superiormente (isto é, caso exista $L \in \mathbb{R}$ tal que $k_n \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$), teremos $s_m \leq L$ para todo $m \in \mathbb{N}$, portanto, $s = \lim_{m\to\infty} s_m \leq L$ e, daí, s é ou finito, ou $-\infty$.

Seja $\limsup_{n\to\infty} k_n = K$. Tomemos qualquer $k < K$. Sendo K o limite da sequência não-crescente s_m, $m \in \mathbb{N}$, teremos $k < K \leq s_m$. Como $s_m = \sup\{k_n \mid n \geq m\}$, podemos encontrar k_n, $n \geq m$, tão próximo quanto se queira de s_m. Em particular, para todo m, existe $n \geq m$ tal que $k \leq k_n$. Daí, $k \leq k_n$ para infinitos valores de n.

Tomemos agora qualquer $k > K$. Sendo $K = \lim_{m\to\infty} s_m$, teremos $s_m \leq k$ para m suficientemente grande, digamos para $m \geq m_0$. Como $s_{m_0} = \sup\{k_n \mid n \geq m_0\}$, obtemos $k_n \leq k$ para $n \geq m_0$. Isto que acabamos de demonstrar são propriedades básicas do limite supereor. Cabe notar aqui que sempre que $\lim_{n\to\infty} k_n$ existe, teremos $\limsup_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} k_n$.

6.11. Tratemos da sequência $k_n = \sqrt[n]{|c_n|}$, $n \in \mathbb{N}$. Obtemos $K = \limsup_{n\to\infty} k_n$. Resta apenas fazer $R = 1/K$ e aplicar as propriedades básicas do limite superior.

6.12. Definição. Seja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ uma série de potências. Sejam $K = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j|}$ e $R = 1/K$ (por convenção, $1/(+\infty) = 0$ e $1/0 = +\infty$). R é dito *raio de convergência* da série.

6.13. Proposição. *Seja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ uma série de potências e seja R seu raio de convergência. Se, para algum $z \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ convergir, então $R \geq |z-c|$. Além disso, a série de funções $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge absolutamente sobre o disco aberto $\Delta(c,r)$ para $0 < r < R$, e o limite desta série é uma função holomorfa no disco aberto $\Delta(c,R)$.*[39]

Demonstração. A primeira afirmação já foi demonstrada.

Seja $R > 0$. Então $K = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j|} < \infty$. Seja $0 < r < R$. Então $Kr < 1$ e, para algum $a \in \mathbb{R}$, teremos $Kr < a < 1$. Os números $s_m = \sup\left\{\sqrt[n]{|c_n|} \mid n \geq m\right\}$ formam uma sequência não-crescente cujo limite é $K = \lim_{m\to\infty} s_m$. Portanto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_m r \leq a$ para todo $m \geq m_0$. Consequentemente, $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot r \leq s_m r \leq a$ para todo $n \geq m_0$, ou seja, $|c_n| \cdot r^n \leq a^n$ para todo $n \geq m_0$. Como $\sum_{n=m_0}^{\infty} \left|\left|c_n(z-c)^n\right|\right|_{\Delta(c,r)} \leq \sum_{n=m_0}^{\infty} |c_n| r^n \leq \sum_{n=m_0}^{\infty} a^n = \dfrac{a^{m_0}}{1-a}$, então $\sum_{j=0}^{\infty} \left|\left|c_j(z-c)^j\right|\right|_{\Delta(c,r)} < \infty$. Em outras palavras, a série converge absolutamente sobre $\Delta(c,r)$.

[39] Recorde que, caso $R = +\infty$, consideramos $\Delta(c,+\infty) = \mathbb{C}$.

Pela Proposição **6.5**(1) e pelo Corolário **6.6**, o limite da série será uma função holomorfa em $\Delta(c, r)$, caso $0 < r < R$. Pelo Corolário **5.8**, esta função é holomorfa em $\Delta(c, R)$, pois, para todo $p \in \Delta(c, R)$, temos $p \in \Delta(c, r) \subset \Delta(c, R)$ para algum r tal que $0 < r < R$.

A demonstração está completa.

6.14. Corolário. *Sejam* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-c)^j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ *séries de potências com raios de convergência* $R_1 > 0$ *e* $R_2 > 0$ *respectivamente. Então as séries* $\sum_{j=0}^{\infty}(b_j + c_j)(z-c)^j$ *e* $\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot c_{m-j}\Big)(z-c)^m$ *têm raio de convergência* $\geq \min\{R_1, R_2\}$ *e*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-c)^j\Big) + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}(b_j + c_j)(z-c)^j,$$

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-c)^j\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k\Big) = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot c_{m-j}\Big)(z-c)^m.$$

Demonstração. Esses resultados seguem imediatamente das Proposições **6.5**(2,3) e **6.13**.

6.15. Exemplo. A série $\exp z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$ tem raio de convergência ∞, pois $m! \geq (m/2)^{m/2}$ para $m > 0$ e, portanto, $\sqrt[m]{\frac{1}{m!}} \leq \sqrt{2/m} \longrightarrow 0$ quando $m \to \infty$. Pela Proposição **6.5**(3), $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m$, onde $h_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{m-j}}{(m-j)!}$. Pelo binômio de Newton, obteremos $h_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{m-j}}{(m-j)!} = \frac{(z_1+z_2)^m}{m!}$. Isto é, $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$. Das conhecidas fórmulas

$$\cos\alpha = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

válidas para $\alpha \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\cdot\alpha)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\cdot\alpha)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\cdot\alpha)^n}{n!} = \exp(i\cdot\alpha).$$

Consequentemente, para $r, \alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\exp(r + i\cdot\alpha) = \exp(r)\cdot\exp(i\cdot\alpha) = e^r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha),$$

que é a função exponencial introduzida no Capítulo **1**.

6.16. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência R. Se $\lim_{n\to\infty} |c_n| \cdot r^n = 0$ para algum $r > 0$, então $R \geq r$. Reciprocamente, se $0 < r < R$, então $\lim_{n\to\infty} |c_n| \cdot r^n = 0$.

Realmente, se $\lim_{n\to\infty} |c_n| \cdot r^n = 0$ para algum $r > 0$, então a sequência $|c_n| \cdot r^n$, $n \in \mathbb{N}$, sendo convergente, é limitada, isto é, $|c_n| \cdot r^n \leq L$ para $0 < L \in \mathbb{R}$ apropriado. Para qualquer $0 < a < r$, a série converge absolutamente sobre o disco aberto $\Delta(c, a)$, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot r^n \cdot (a/r)^n \leq L \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a/r)^n = \frac{L}{1 - \frac{a}{r}}.$$

Portanto, pela Proposição **6.13**, $R \geq a$. Como isto é válido para qualquer $0 < a < r$, concluímos que $R \geq r$. A recíproca também segue da Proposição **6.13**.

6.17. Lema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e seja $w \in \mathbb{C}$. Então a função $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-w}$ é holomorfa em $D \setminus \{w\}$.*

Demonstração. Pelo Corolário **5.8**, é suficiente provar que, para todo $c \in D \setminus \{w\}$, existe uma vizinhança aberta $c \in U_c$ contida em $D \setminus \{w\}$ tal que a restrição $g|_{U_c} : U_c \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa em U_c.

Seja $c \in D \setminus \{w\}$. Então, para algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < 2b < |w - c|$, temos $\Delta(c, 2b) \subset D$ e, também, $\Delta(c, 2b) \subset D \setminus \{w\}$. Obviamente, $\Delta(c, b) \subset \overline{\Delta}(c, b) \subset \Delta(c, 2b) \subset D \setminus \{w\}$. Façamos $U_c = \Delta(c, b)$.

Pelo Teorema **2.33** aplicado à função $|f|$ e ao compacto $\overline{\Delta}(c, b)$, vemos que a norma $||f||_{U_c}$ existe.

Consideremos a série de funções $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(z) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$, da variável z. Esta série converge absolutamente sobre U_c. Realmente, pelo Corolário **6.7**, a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ converge absolutamente sobre o disco $\Delta(c, b) = U_c$ e, consequentemente, pela Proposição **6.4**(1), temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big|\Big| \frac{f(z) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} \Big|\Big|_{U_c} \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||f||_{U_c} \cdot \Big|\Big| \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} \Big|\Big|_{U_c} = ||f||_{U_c} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \Big|\Big| \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} \Big|\Big|_{U_c} < \infty.$$

Pelo Corolário **5.9**, a função $\dfrac{f(z) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ é holomorfa em U_c. Pela Proposição **6.5**(1) e pelo Corolário **6.6**, a função $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(z) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ é holomorfa em U_c. Por outro lado, pelo Corolário **6.7**, temos

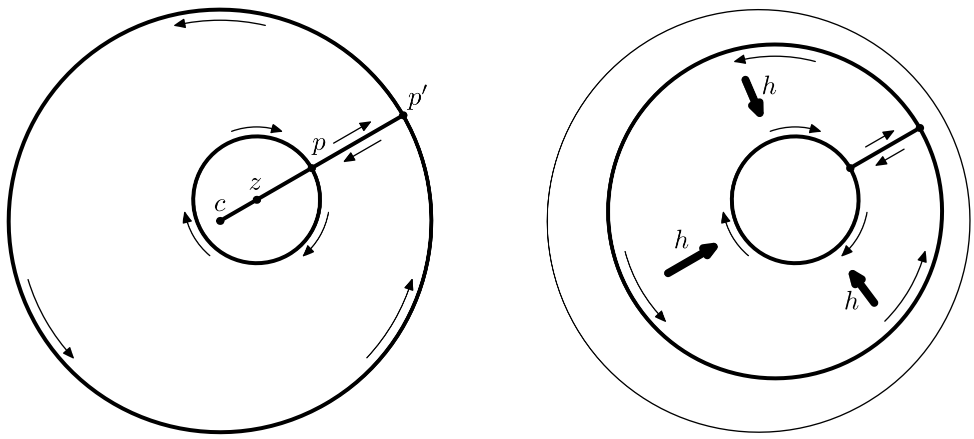
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(z) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} = f(z) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} = \frac{f(z)}{z-w} = g(z).$$

A demonstração está completa.

6.18. Em seguida, vamos necessitar das integrais do tipo $\int_{C(c,r)} f(z)\, dz$, onde a circunferência $C(c, r)$ é um caminho orientado no sentido anti-horário que realiza uma volta completa em torno do seu centro c. Por exemplo, podemos tomar a parametrização $\gamma : [0, 1] \to C(c, r)$, $\gamma(t) = c + (p - c) \cdot \exp(2\pi i t)$, onde o ponto $p \in C(c, r)$ é qualquer. Por **5.4** (troca do início), o valor da integral $\int_{C(c,r)} f(z)\, dz$ não depende da escolha do início p do caminho γ.

6.19. Consideremos dois discos fechados $\overline{\Delta}(z, \delta)$ e $\overline{\Delta}(c, r)$ tais que $\overline{\Delta}(z, \delta) \subset \Delta(c, r)$. Seja $[\,\overline{c, p'}\,]$ o raio de $\overline{\Delta}(c, r)$ que contém o centro z do disco $\overline{\Delta}(z, \delta)$. Designemos por p o ponto de interseção de $[\,\overline{c, p'}\,]$ com $C(z, \delta)$ (caso existam dois de tais pontos, escolhemos o mais próximo de p'). Temos $p \in C(z, \delta)$ e $p' \in C(z, r)$. Definamos uma homotopia $h : [0, 4] \times [0, 1] \to \overline{\Delta}(c, r) \setminus \Delta(z, \delta)$ pelas regras seguintes:

- $h(s, t) = (1 - s)p + sp'$ para $s \in [0, 1 - t]$,
- $h(s, t) = (1-t)c + tz + \big(t(p - z) + (1 - t)(p' - c)\big) \cdot \exp\Big(2\pi i \cdot \dfrac{t + s - 1}{t + 1}\Big)$ para $s \in [1 - t, 2]$,
- $h(s, t) = (t + s - 2)p + (3 - t - s)p'$ para $s \in [2, 3 - t]$,
- $h(s, t) = z + (p - z) \cdot \exp\Big(- 2\pi i \cdot \dfrac{t + s - 3}{t + 1}\Big)$ para $s \in [3 - t, 4]$.



É fácil verificar que as regras são compatíveis. Usando a Proposição **2.24**, podemos ver que h é contínua. Uma verificação direta mostra que $h\big([0,4]\times[0,1]\big)\subset\overline{\Delta}(c,r)\setminus\Delta(z,\delta)$. Observemos que, para $t\neq 1$, o caminho h_t tem início e fim no ponto p e consiste das quatro partes seguintes:

- $[\,\overline{p, tp+(1-t)p'}\,]$,
- $C\big((1-t)c+tz,\ t\delta+(1-t)r\big)$ com início e fim em $tp+(1-t)p'$,
- $[\,\overline{tp+(1-t)p', p}\,]$,
- $C'(z,\delta)$ que é o caminho $C(z,\delta)$ com orientação oposta, tendo início e fim no ponto p.

O caminho h_1 consiste das duas partes $C(z,\delta)$ e $C'(z,\delta)$.[40]

6.20. Lema (Fórmula de Cauchy (caso particular))**.** *Seja $D\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f: D\to\mathbb{C}$ uma função holomorfa em D e seja $\overline{\Delta}(c,r)\subset D$ um disco fechado contido em D. Então, para qualquer $z\in\Delta(c,r)$, temos*

$$\int\limits_{C(c,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z).$$

Demonstração. Seja $\overline{\Delta}(z,\delta)\subset\Delta(c,r)$ com $\delta>0$. Pelo Lema **6.17**, a função $\dfrac{f(w)}{w-z}$ é holomorfa em $D\setminus\{z\}$. A homotopia h de **6.19** é uma homotopia em $D\setminus\{z\}$. Obviamente, $\int_{h_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=0$. Utilizando a homotopia h, é fácil ver que $\int_{C(c,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\int_{C(z,\delta)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$. Em particular, vemos que a última integral não se altera com δ. Temos

$$\int_{C(z,\delta)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\int\limits_0^{2\pi}\frac{f\big(z+\delta\cdot(\cos t+i\cdot\operatorname{sen}t)\big)}{\delta\cdot(\cos t+i\cdot\operatorname{sen}t)}\cdot\delta\cdot(-\operatorname{sen}t+i\cdot\cos t)\,dt=$$

$$=i\cdot\int\limits_0^{2\pi}f\big(z+\delta\cdot(\cos t+i\cdot\operatorname{sen}t)\big)\,dt,$$

[40]Para uma visualização da homotopia, imagine que o desenho à esquerda represente uma câmara de ar um pouco excêntrica. O da direita é feito em um momento em que o câmara está se esvaziando, mantendo o “círculo” interior do mesmo tamanho.

Insistimos novamente na importância de que o leitor faça as verificações sugeridas, pois assumimos a recomendação de um criador de um novo modelo de para-quedas para os para-quedistas que iam experimentá-lo: “Caprichem, porque o sucesso da experiência de vocês é muito importante para mim!”

portanto, para $\varepsilon \geq 0$, definido pela primeira igualdade abaixo (ε não depende da escolha de δ), obteremos

$$3\pi\varepsilon = \Big| \int_{C(z,\delta)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i f(z) \Big| = \Big| i \cdot \int_0^{2\pi} \Big(f\big(z + \delta \cdot (\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)\big) - f(z) \Big)\, dt \Big| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \Big| f\big(z + \delta \cdot (\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)\big) - f(z) \Big|\, dt.$$

Precisamos provar que $\varepsilon = 0$. Suponhamos $\varepsilon > 0$. Como a função f é contínua em z, então podemos escolher $\delta > 0$ tal que $\overline{\Delta}(z,\delta) \subset \Delta(c,r)$ e tal que a desigualdade $|w - z| \leq \delta$ implica a desigualdade $\big|f(w) - f(z)\big| \leq \varepsilon$. Para esse δ, teremos $\int_0^{2\pi} \Big| f\big(z + \delta \cdot (\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)\big) - f(z) \Big|\, dt \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon\, dt = 2\pi\varepsilon$, ou seja, $3\pi\varepsilon \leq 2\pi\varepsilon$. Uma contradição. A demonstração está completa.

6.21. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que a função f satizfaz a Fórmula de Cauchy (caso particular) em D (abreviando "f satisfaz FC(cp) em D") se $\int_{C(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 2\pi i f(z)$ para $z \in \Delta(c,r) \subset \overline{\Delta}(c,r) \subset D$. Assim, o Lema **6.20** diz que toda função holomorfa em D satisfaz a FC(cp) em D.

6.22. Teorema (Desenvolvimento em Série de Potências)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função que satisfaz* FC(cp) *em D e seja $\Delta(c,R) \subset D$, onde $0 < R \leq +\infty$. Tomemos r qualquer com $0 < r < R$ e façamos $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,r)} \frac{f(w)}{(w-c)^{j+1}}\, dw$ para $j \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-c)^j$ tem raio de convergência $\geq R$ e $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-c)^j$ para todo $z \in \Delta(c,R)$.*

Demonstração. Fixemos $z \in \Delta(c,R)$. Existem $b, r \in \mathbb{R}$ para os quais $0 < b < r < R$ e $z \in \Delta(c,b)$. Temos $\overline{\Delta}(c,r) \subset \Delta(c,R) \subset D$ e $z \in \Delta(c,r)$. Portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Pelo Corolário **6.7**, $\frac{1}{w-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ para todo $w \in C(c,r)$ (isto é, $|w - c| = r$). Consequentemente, $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(w) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ para todo $w \in C(c,r)$. Pelo Teorema **2.33** aplicado à função $|f|$ e ao compacto $C(c,r)$, vemos que a norma $||f||_{C(c,r)}$ existe. Considerando a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(w) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$ como uma série de funções de w definidas em $C(c,r)$, obtemos, pela Proposição **6.4**(1),

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big|\Big| \frac{f(w) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}} \Big|\Big|_{C(c,r)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||f||_{C(c,r)} \cdot (b^j / r^{j+1}) < \infty.$$

Assim, a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(w) \cdot (z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}$, de funções de w, converge absolutamente sobre $C(c,r)$. Pelas Proposições **6.5**(1) e **6.4**(4), temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)} \frac{f(w)\cdot(z-c)^j}{(w-c)^{j+1}}\,dw =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(z-c)^j \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)} \frac{f(w)}{(w-c)^{j+1}}\,dw = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j.$$

Em particular, a série de potências $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge para z fixo, $z \in \Delta(c,R)$. Pela Proposição **6.13**, o raio de convergência R', da série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$, satisfaz a desigualdade $R' \geq |z-c|$. Como o ponto $z \in \Delta(c,R)$ foi escolhido arbitrariamente, $R' \geq R$. A demonstração está completa.

6.23. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função. Então f é holomorfa em D se, e somente se, para todo $c \in D$, a função f pode ser desenvolvida numa série de potências (absolutamente) convergente num disco $\Delta(c,r) \subset D$, $r > 0$.*

Demonstração. O fato segue imediatamente do Corolário **5.8**, do Corolário **6.6**, do Lema **6.20** e do Teorema **6.22**.

6.24. Para enfatizar que toda função holomorfa pode ser localmente desenvolvida numa série de potências, ela é chamada de *analítica.*

6.25. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ funções analíticas em D. Então a função $f \cdot g$ é analítica em D.*

Demonstração. A afirmação segue do Corolário **6.23** e do Corolário **6.14**.

6.26. Definição. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{c\}$ um caminho fechado regular por partes. Então o número

$$n_c(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-c}$$

é dito *número de voltas orientadas de γ em torno do ponto $c \in \mathbb{C}$.*

Pelo Corolário **6.7**, a função $f(z) = \dfrac{1}{z-c}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$. Portanto, pelo Corolário **4.20**, na fórmula que fornece $n_c(\gamma)$, podemos substituir γ por um caminho padrão $\vartheta(s) = c + r \cdot e^{i\cdot(\alpha\cdot s+\beta)}$, $s \in [a,b]$. Sabendo que $\dfrac{de^{i\cdot t}}{dt} = \dfrac{d(\cos t + i\cdot \operatorname{sen} t)}{dt} = -\operatorname{sen} t + i \cdot \cos t = i \cdot e^{i\cdot t}$ e usando a Proposição **3.3**(1,2,4), obtemos

$$n_c(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-c} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\vartheta} \frac{dz}{z-c} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{1}{r\cdot e^{i\cdot(\alpha\cdot s+\beta)}} \cdot \frac{d(c + r\cdot e^{i\cdot(\alpha\cdot s+\beta)})}{ds}\,ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{1}{r\cdot e^{i\cdot(\alpha\cdot s+\beta)}} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\cdot(\alpha\cdot s+\beta)} \cdot \alpha\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \alpha i\,ds = \frac{\alpha i\cdot(b-a)}{2\pi i} = \frac{\alpha\cdot(b-a)}{2\pi}$$

que nada mais é do que o número inteiro definido em **4.21**. Assim, $n_c(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

6.27. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Dizemos que um caminho $\gamma : [a,b] \to D$ é *contrátil* em D se γ for homotópico em D ao caminho constante $\vartheta : [a,b] \to D$, ou seja, ao caminho definido por $\vartheta(s) = \vartheta(a) = \vartheta(b) = \gamma(a) = \gamma(b)$ para todo $s \in [a,b]$ (note que todo caminho contrátil é automaticamente fechado). Para qualquer caminho γ, contrátil em D, e para qualquer função $f : D \to \mathbb{C}$, holomorfa em D, obviamente teremos $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Pelo Lema **4.6** (e por sua demonstração), todo caminho fechado num disco (aberto ou fechado) é contrátil no disco.

6.28. Teorema (Fórmula de Cauchy)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, seja $c \in D$ e seja $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{c\}$ um caminho fechado regular por partes e contrátil em D. Então*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-c}\,dz = n_c(\gamma)\cdot f(c).$$

Demonstração. Como $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(c)}{z-c}\,dz = \frac{f(c)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = n_c(\gamma)\cdot f(c)$, então é suficente provar que

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(c)}{z-c}\,dz = 0,$$

Para tal, é suficiente provar que existe uma função $g : D \to \mathbb{C}$, analítica em D, tal que $g(z) = \dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}$ para todo $z \in D\setminus\{c\}$. Essa fórmula define g nos pontos de $D\setminus\{c\}$. Pelo Lema **6.20**, pelo Teorema **6.22** e pela Proposição **6.13**, num disco aberto $\Delta(c, r) \subset D$, a função $f(z)$ pode ser desenvolvida numa série de potências absolutamente convergente sobre $\Delta(c, r)$, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$, $z \in \Delta(c, r)$. Para todo $z \in \Delta(c, r)$, $z \neq c$, temos $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j = c_0 + (z-c)\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1}(z-c)^j$. Portanto, a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1}(z-c)^j$ converge para tais z's. Pela Proposição **6.13**, $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+1}(z-c)^j$ é uma função analítica em $\Delta(c, r)$. Como $c_0 = f(c)$, obtemos $f(z) = f(c) + (z-c)\cdot g(z)$ para todo $z \in \Delta(c, r)$ (para $z = c$ a fórmula também é válida). Assim, a função $g(z)$ é bem definida em D e é analítica em $D\setminus\{c\}$ (pelo Lema **6.17**) e em $\Delta(c, r)$. Pelo Corolário **5.8**, g é analítica em D. A demonstração está completa.[41]

6.29. Definição. Sejam $S, P \subset \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{C}$. Sejam dadas ainda $f_p : S \to \mathbb{C}$, $p \in P$, uma família de funções, e uma função $f : S \to \mathbb{C}$. Dizemos que as *funções f_p convergem uniformemente sobre S à função f para $p \in P$ tendendo a c,* quando $\lim\limits_{P\ni p\to c} ||f_p - f||_S = 0$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{P\ni p\to c}{}^S f_p = f$. Pelo Critério **2.18**, podemos definir equivalentemente: para qualquer sequência $p_j \in P$, $j \in \mathbb{N}$, convergente a c, a sequência de funções f_{p_j}, $j \in \mathbb{N}$, converge uniformemente sobre S à função f. Em outras palavras, a igualdade $\lim\limits_{j\to\infty} p_j = c$ com $p_j \in P$ para todo $j \in \mathbb{N}$ implica a igualdade $\lim\limits_{j\to\infty} ||f_{p_j} - f||_S = 0$. (Daí, pela Proposição **6.4**(3), podemos concluir que o limite em questão, se existir, é único.) Vamos usar este conceito somente caso c seja um ponto *de acumulação* do conjunto P, isto é, caso exista uma sequência $p_j \in P$, $j \in \mathbb{N}$, que convirja a c.

[41] Note que, para demonstrarmos a Fórmula de Cauchy, inicialmente provamos a Fórmula de Cauchy num caso particular. Desse particular, deduzimos desenvolvimento em série de potências, do que, por sua vez, deduzimos a Fórmula de Cauchy geral. Este plano é ilustrado pela seguinte anedota:
Perguntou-se a um físico e a um matemático se eles sabiam preparar uma feijoada. A resposta de ambos foi coincidente:
— "Vou ao mercado e compro as carnes necessárias e feijão preto. Cozinho separadamente as carnes e o feijão. Quando o feijão estiver quase cozido, chamo uma pessoa que saiba cozinhar para que ela conclua a preparação."
Perguntou-se em seguida como preparariam a feijoada se encontrassem o feijão e as carnes no fogo.
— "Chamaria uma pessoa que saiba cozinhar para que ela conclua a preparação" — respondeu o físico sem pensar.
Já o matemático pontificou:
— "Jogo o feijão e as carnes fora e procedo como no caso anterior ..."

6.30. Proposição. *Sejam $S, P \subset \mathbb{C}$ e seja $c \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação de P. Sejam dadas $f_p : S \to \mathbb{C}$, $p \in P$, contínuas e $f : S \to \mathbb{C}$ tais que $f = \lim^S_{P \ni p \to c} f_p$. Então f é contínua em S. Além disso, para qualquer caminho $\gamma : [a,b] \to S$, suave por partes, o limite $\lim_{P \ni p \to c} \int_\gamma f_p(z)\,dz$ existe e*

$$\lim_{P \ni p \to c} \int_\gamma f_p(z)\,dz = \int_\gamma \big(\lim^S_{P \ni p \to c} f_p\big)(z)\,dz.$$

Demonstração. Existe uma sequência $p_j \in P$, $j \in \mathbb{N}$, convergente a c. Aplicando a Proposição **6.4**(4) à sequência f_{p_j}, $j \in \mathbb{N}$, de funções contínuas, com limite uniforme $f = \lim^S_{j \to \infty} f_{p_j}$, concluímos que f é contínua. Agora

$$\Big|\int_\gamma f_p(z)\,dz - \int_\gamma \big(\lim^S_{P \ni p \to c} f_p\big)(z)\,dz\Big| = \Big|\int_\gamma f_p(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_\gamma (f_p - f)(z)\,dz\Big| \le$$
$$\le \|f_p - f\|_\gamma \cdot \mu(\gamma) \le \|f_p - f\|_S \cdot \mu(\gamma) \longrightarrow 0 \text{ para } p \to c.$$

A demonstração está completa.

Exercícios. 1. Determine os raios de convergência das seguintes séries de potências:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^m}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m^m \cdot z^m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} m! \cdot z^m, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m! \cdot z^m}{m^m}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} z^{m!}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m^{\ln m} \cdot z^m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1) \cdot z^{4m}}{m^2}, \qquad \cos z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

2. Determine o raio de convergência da série $\sum_{m=1}^{\infty} c^{(m^2)} \cdot z^m$, onde $c \in \mathbb{C}$ e $|c| < 1$.

3. Para $m \in \mathbb{N}$, definamos $c_m = m^2$ se m for primo e $c_m = 0$ caso contrário. Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$.

4. Sejam $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ e $\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m$ duas séries de potências com raios de convergência r e s respetivamente. Prove que o raio de convergência de $\sum_{m=0}^{\infty} c_m d_m z^m$ é $\ge rs$.

5. Seja $c_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente. Prove que o raio de convergência da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ é ≥ 1.

6. Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$. Calcule os raios de convergência das séries de potências $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{2m}$ e $\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 z^m$.

7. O que você deve verificar para provar que a série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^3}$ converge uniformemente no disco unitário.

8. Determine todos os z que garantam a convergência das séries seguintes:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{z}{1+z}\Big)^m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{1+z^m}.$$

9.* Verifique se a série $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{m(1+mx^2)}$ de funções da variável real $x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente.

10. Prove as identidades $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)z^m$, $\displaystyle\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m+1) z^m$ para $|z| < 1$.

11.* Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ um caminho regular com $\gamma(a) = 0$ e $\gamma(b) = 1$. Procure todos os valores possíveis da integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$.

12. Quais das seguintes séries de funções definidas no disco aberto unitário $\Delta(0, 1)$ convergem uniformemente: $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^2}$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \big(mz^m - (m+1)z^{m+1}\big)$.

13. Prove as fórmulas de Euler para a variável complexa z :

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

14. Verifique as identidades $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ para a variável complexa z.

15. Prove que $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2$ e $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2$ para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

16. Calcule os valores $\operatorname{sen} i$ e $\cos i$.

17. Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule a integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\exp z}{z^n}\, dz$.

18. Calcule as seguintes integrais:

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{C(0,3)} \frac{z^2+1}{z+2}\, dz, \qquad \int_{C(0,1)} \frac{\exp z}{2z+i}\, dz, \qquad \int_{C(0,1)} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3}\, dz.$$

19.* Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e sejam $a, b \in \mathbb{C}$ com $|a| < 1 < |b|$. Calcule a integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)^m \cdot (z-b)^n}$.

Por entre pedras alvas se deriva
a sonorosa linfa fugitiva
Luis de Camões

7. A Derivada Complexa e as Equações de Cauchy-Riemann

7.1. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função e seja $q \in D$. Se existir o limite

$$\lim_{\substack{p \to q \\ D \ni p \neq q}} \frac{f(p) - f(q)}{p - q},$$

então dizemos que a função f possui *derivada complexa* em $q \in D$. Neste caso, usamos as notações

$$\frac{\partial f}{\partial z}(q) = f'(q) = \lim_{\substack{p \to q \\ D \ni p \neq q}} \frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(q + \varepsilon) - f(q)}{\varepsilon},$$

onde, nesta última, ε obedece às condições: $\varepsilon \neq 0$ e $q + \varepsilon \in D$ (por exemplo, $\varepsilon \in \Delta(0, r) \setminus \{0\}$, onde $\Delta(q, r) \subset D$ para $r > 0$ apropriado).

7.2. Suponhamos que exista a derivada complexa $f'(q)$. Como usualmente, podemos calcular o limite indicado usando quaisquer sequências $q_j \in D$, $j \in \mathbb{N}$, convergentes a $q \in D$. Escrevendo $f(z) = f_0(x + i \cdot y) + i \cdot f_1(x + i \cdot y)$ e $q = a + i \cdot b$, onde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ e f_0 e f_1 são as partes real e imaginária de f, respetivamente, vemos que, para quaisquer sequências de números reais x_j, y_j, $j \in \mathbb{N}$,[42]

$$f'(q) = \lim_{j \to \infty} \frac{f(x_j + i \cdot b) - f(a + i \cdot b)}{x_j - a} = \lim_{j \to \infty} \frac{f(a + i \cdot y_j) - f(a + i \cdot b)}{i \cdot (y_j - b)},$$

ou seja,

$$\operatorname{Re} f'(q) = \lim_{j \to \infty} \frac{f_0(x_j + i \cdot b) - f_0(a + i \cdot b)}{x_j - a} = \lim_{j \to \infty} \frac{f_1(a + i \cdot y_j) - f_1(a + i \cdot b)}{y_j - b},$$

$$\operatorname{Im} f'(q) = \lim_{j \to \infty} \frac{f_1(x_j + i \cdot b) - f_1(a + i \cdot b)}{x_j - a} = -\lim_{j \to \infty} \frac{f_0(a + i \cdot y_j) - f_0(a + i \cdot b)}{y_j - b}.$$

Em particular, considerando as funções $f_0(x + i \cdot y)$ e $f_1(x + i \cdot y)$ como funções reais de duas variáveis reais, $f_0(x + i \cdot y) = f_0(x, y)$ e $f_1(x + i \cdot y) = f_1(x, y)$, obtemos as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(q) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(q), \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(q) = -\frac{\partial f_0}{\partial y}(q).$$

Para a derivada complexa, teremos

$$f'(q) = \frac{\partial f}{\partial z}(q) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(q) + i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(q) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(q) - i \cdot \frac{\partial f_0}{\partial y}(q) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(q) - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(q)\Big),$$

pois, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(q) = \frac{\partial (f_0 + i \cdot f_1)}{\partial x}(q) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(q) + i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(q), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(q) = \frac{\partial (f_0 + i \cdot f_1)}{\partial y}(q) = \frac{\partial f_0}{\partial y}(q) + i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(q).$$

7.3. Lema. *Seja $g(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais definida em D, que possua derivadas parciais contínuas em D, e seja $(a, b) \in D$ um ponto fixo. Então, existe uma função $h : U \to \mathbb{R}$, definida numa vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}$, tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = 0$, e, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequenos, teremos*

[42] tais que $x_j + i \cdot b \in D$, $a + i \cdot y_j \in D$, $x_j \neq a$ e $y_j \neq b$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

$$g(a+\alpha,b+\beta)-g(a,b)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\cdot\beta+h(\alpha+i\cdot\beta)\cdot|\alpha+i\cdot\beta|.$$

Demonstração. Façamos

$$u_1(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{g(a+\alpha,b)-g(a,b)}{\alpha}-\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \text{para } \alpha\neq 0\\ 0 & \text{para } \alpha=0\end{cases}$$

$$u_2(\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{g(a+\alpha,b+\beta)-g(a+\alpha,b)}{\beta}-\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) & \text{para } \beta\neq 0\\ 0 & \text{para } \beta=0\end{cases}$$

Pela definição de derivada parcial, temos $\lim\limits_{\alpha\to 0}u_1(\alpha)=0$. Observemos que $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to 0}u_2(\alpha,\beta)=0$. Realmente: pelo Teorema de Lagrange aplicado à função real $g(a+\alpha,b+y)$ da variável real $y\in\mathbb{R}$ no intervalo $[0,\beta]$, existe $\beta'\in[0,\beta]$ tal que $g(a+\alpha,b+\beta)-g(a+\alpha,b)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(a+\alpha,b+\beta')\cdot\beta$. Portanto, $u_2(\alpha,\beta)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(a+\alpha,b+\beta')-\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)$. Como $\sqrt{\alpha^2+\beta'^2}\leq\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ e a função $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ de duas variáveis reais é contínua no ponto (a,b), então $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to 0}u_2(\alpha,\beta)=0$.

Façamos

$$h(\alpha+i\cdot\beta)=\begin{cases}\dfrac{u_1(\alpha)\cdot\alpha+u_2(\alpha,\beta)\cdot\beta}{|\alpha+i\cdot\beta|} & \text{para } \alpha+i\cdot\beta\neq 0\\ 0 & \text{para } \alpha+i\cdot\beta=0\end{cases}$$

Obtemos

$$g(a+\alpha,b+\beta)-g(a,b)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\cdot\beta+h(\alpha+i\cdot\beta)\cdot|\alpha+i\cdot\beta|.$$

Vamos verificar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon)=0$. Com efeito, para $\varepsilon=0$, temos $h(\varepsilon)=0$ e, para $\varepsilon=\alpha+i\cdot\beta\neq 0$, temos

$$|h(\varepsilon)|\leq\frac{|u_1(\alpha)|\cdot|\alpha|}{|\alpha+i\cdot\beta|}+\frac{|u_2(\alpha,\beta)|\cdot|\beta|}{|\alpha+i\cdot\beta|}\leq|u_1(\alpha)|+|u_2(\alpha,\beta)|\longrightarrow 0$$

quando $\varepsilon\to 0$. A demonstração está completa.

7.4. Teorema. *Seja $D\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f:D\to\mathbb{C}$ uma função com* $\operatorname{Re} f(x+i\cdot y)=f_0(x,y)$ e $\operatorname{Im} f(x+i\cdot y)=f_1(x,y)$. *Então a função f possui derivada complexa f', contínua em D, se, e somente se, as funções reais $f_0(x,y)$ e $f_1(x,y)$ de duas variáveis reais possuirem derivadas parciais $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_0}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$, contínuas em D, que satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial y},\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}=-\frac{\partial f_0}{\partial y}$$

em todos os pontos de D.

Demonstração. As considerações anteriores mostram que a existência da derivada complexa $f'(q)$ implica a existência das derivadas parciais $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}(q)$, $\dfrac{\partial f_0}{\partial y}(q)$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(q)$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(q)$ e implica também a validade das igualdades

$$f'(q)=\frac{\partial f_0}{\partial x}(q)+i\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}(q)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(q)-i\cdot\frac{\partial f_0}{\partial y}(q).$$

Consequentemente, as derivadas parciais existirão e serão contínuas em D quando a derivada complexa f' existir e for contínua em D.

Reciprocamente: suponhamos que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}, \dfrac{\partial f_0}{\partial y}, \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ existam, sejam contínuas em D e satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann. É suficiente provar que $f'(q)$ existe para todo $q \in D$, pois, neste caso, as igualdades $f'(q) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(q) + i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(q) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(q) - i \cdot \frac{\partial f_0}{\partial y}(q)$, sendo válidas por **7.2**, implicam que f' é contínua em D.

Fixemos $q = a+i{\cdot}b \in D$. Pelo Lema **7.3**, aplicado às funções f_0 e f_1 em qualquer ponto $(a+\alpha, b+\beta) \in D$, temos

$$f_0(a+\alpha, b+\beta) - f_0(a,b) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha + \frac{\partial f_0}{\partial y}(a,b)\cdot\beta + h_0(\alpha + i\cdot\beta)\cdot|\alpha + i\cdot\beta|,$$
$$f_1(a+\alpha, b+\beta) - f_1(a,b) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)\cdot\beta + h_1(\alpha + i\cdot\beta)\cdot|\alpha + i\cdot\beta|,$$

onde $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h_0(\varepsilon) = 0$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h_1(\varepsilon) = 0$ para as funções $h_0(\varepsilon)$ e $h_1(\varepsilon)$ definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{C}$. Agora, para $\varepsilon = \alpha + i\cdot\beta \neq 0$, obteremos pelas equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{f(q+\varepsilon) - f(q)}{\varepsilon} &= \frac{f_0(a+\alpha,b+\beta) - f_0(a,b) + i\cdot\big(f_1(a+\alpha,b+\beta) - f_1(a,b)\big)}{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha + \frac{\partial f_0}{\partial y}(a,b)\cdot\beta + \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)\cdot i\cdot\alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)\cdot i\cdot\beta + \\ &\qquad + \big(h_0(\alpha+i\cdot\beta) + i\cdot h_1(\alpha+i\cdot\beta)\big)\cdot|\alpha+i\cdot\beta|\Big) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\Big(\frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b)\cdot\varepsilon + \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)\cdot i\cdot\varepsilon + \big(h_0(\varepsilon) + i\cdot h_1(\varepsilon)\big)\cdot|\varepsilon|\Big) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b) + i\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) + \\ &\qquad + \big(h_0(\varepsilon) + i\cdot h_1(\varepsilon)\big)\cdot\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \longrightarrow \frac{\partial f_0}{\partial x}(a,b) + i\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. A demonstração está completa.

7.5. Proposição.[43] *Sejam $U, D \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos; sejam $k : \Delta(c,r) \to \mathbb{C}$, $r > 0$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ e $h : U \to D$, funções que possuem derivadas complexas contínuas; seja $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho suave e seja $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$.*

(1) *Se $k'(z) = 0$ em todos os pontos $z \in \Delta(c,r)$, então k é constante.*

(2) *As funções $f+g$ e $f\cdot g$ possuem derivada complexa contínua e*
$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'.$$

(3) *A função $f\circ h$ possui derivada complexa contínua e*

---

[43] Devido à semelhança com o caso real pode-se demonstrar esta proposição pelo "método do camelô":
Um pai "crédulo" tendo comprado um trenzinho para seu filho hiper-energético, se viu forçado a tentar devolvê-lo, pois a avó rabugenta do menino não podia suportar o barulho do trem. (Evidentemente, o barulho era o ruido característico dos trens: tchuk-tchuk, tchuk-tchuk, tchuk-tchuk, ...)
— Não praticamos a devolução do dinheiro ... Mas, sei lá, trocar o trenzinho, que dá tanta alegria, por causa de barulho? O Sr. imagina de onde vem este barulho? ... Veja o trem ... Ele é uma locomotiva e uma porção de vagões. A locomotiva é uma só e todo este ruido não seria produzido só por ela ... E os vagões? Muito bem! Cada vagão tem sua parte no barulho total. (Leitor: você notou alguma falha na argumentação?) E o que é um vagão? Basicamente é uma caixa em cima de eixos com rodas ... A caixa não produz barulho: tenho muita caixa em casa e não ouço barulho nenhum ... E o eixo, meu senhor? Bem, o eixo é uma barra presa na caixa e não tem como produzir barulho ... Suspeito que o problema está nas rodas! O que sei sobre as rodas? (Eu devo usar todos os meus conhecimentos!) Ao fim e ao cabo tem a forma de círculo ... O que sabemos sobre círculos? A área é πr^2! O π é uma constante e assim não muda e não produz nada! O r também não muda durante o movimento ... Está aí! São os quadrados que rolando sobre os trilhos produzem todo esse barulho!!! ...
Então, meu senhor, o Sr. vê: não tem como soulucionar o seu problema; não dá para brigar com a Matemática!

$$\frac{\partial(f\circ h)}{\partial z}(q) = f'\big(h(q)\big)\cdot h'(q)$$

para todo $q \in U$.

(4) *Se* $g(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D$, *então a função* f/g *possui derivada complexa contínua em* D *e*

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial z}(q) = \frac{f'(q)\cdot g(q) - f(q)\cdot g'(q)}{\big(g(q)\big)^2}$$

para todo $q \in D$.

(5) *O caminho* $f\circ\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *é suave e*

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)$$

para todo $t \in [a,b]$.

(6) *A série de potências* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-c)^{n-1}$ *tem raio de convergência* R, *a função* $u(z)$ *possui derivada complexa contínua em* $\Delta(c,R)$ *e*

$$u'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-c)^{n-1}$$

para todo $z \in \Delta(c,R)$.

Demonstração. (1) Pelo Teorema **7.4**, $\dfrac{\partial k_0}{\partial x} = \dfrac{\partial k_0}{\partial y} = \dfrac{\partial k_1}{\partial x} = \dfrac{\partial k_1}{\partial y} = 0$ em todos os pontos de $\Delta(c,r)$. Portanto k_0 e k_1 são constantes e k é constante.

(2) A fórmula $(f+g)' = f' + g'$ segue imediatamente da definição de derivada complexa. Como, para $z, z+\varepsilon \in D$, $\varepsilon \neq 0$, temos

$$\frac{f(z+\varepsilon)\cdot g(z+\varepsilon) - f(z)\cdot g(z)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\cdot g(z) + \big(f(z+\varepsilon)-f(z)\big)\cdot\frac{g(z+\varepsilon)-g(z)}{\varepsilon} + f(z)\cdot\frac{g(z+\varepsilon)-g(z)}{\varepsilon}$$

e a função f é contínua em $z \in D$ (isto é, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(f(z+\varepsilon)-f(z)\big) = 0$), então, pelas propriedades do limite, obtemos

$$(f\cdot g)'(z) = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z).$$

(3) Apliquemos o Critério **2.18**. Seja $q \in U$ e sejam $0 \neq \varepsilon_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $q + \varepsilon_n \in U$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Basta provar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\big(h(q+\varepsilon_n)\big) - f\big(h(q)\big)}{\varepsilon_n} = f'\big(h(q)\big)\cdot h'(q) = \lim_{n\to\infty} f'\big(h(q)\big)\cdot\frac{h(q+\varepsilon_n)-h(q)}{\varepsilon_n}.$$

Se $h(q+\varepsilon_n) = h(q)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então temos

$$\frac{f\big(h(q+\varepsilon_n)\big) - f\big(h(q)\big)}{\varepsilon_n} = 0 = f'\big(h(q)\big)\cdot\frac{h(q+\varepsilon_n)-h(q)}{\varepsilon_n}.$$

Seja ε_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, a subsequência dos ε_n para os quais $h(q+\varepsilon_n) \neq h(q)$.[44] Então, como h é contínua em q, temos $\lim\limits_{m\to\infty} h(q+\varepsilon_{n_m}) = h(q)$ e, portanto,

[44]Quando existir somente um número finito de tais $n \in \mathbb{N}$ para os quais $h(q+\varepsilon_n) \neq h(q)$, a igualdade

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\big(h(q+\varepsilon_n)\big) - f\big(h(q)\big)}{\varepsilon_n} = \lim_{n\to\infty} f'\big(h(q)\big)\cdot\frac{h(q+\varepsilon_n)-h(q)}{\varepsilon_n}$$

é óbvia.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f\big(h(q+\varepsilon_{n_m})\big) - f\big(h(q)\big)}{h(q+\varepsilon_{n_m}) - h(q)} = f'\big(h(q)\big).$$

Consequentemente,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f\big(h(q+\varepsilon_{n_m})\big) - f\big(h(q)\big)}{\varepsilon_{n_m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{f\big(h(q+\varepsilon_{n_m})\big) - f\big(h(q)\big)}{h(q+\varepsilon_{n_m}) - h(q)} \cdot \frac{h(q+\varepsilon_{n_m}) - h(q)}{\varepsilon_{n_m}} = f'\big(h(q)\big) \cdot h'(q),$$

que implica a igualdade desejada.

(4) Pelos itens (2) e (3), é suficiente verificar que

$$\frac{\partial(1/z)}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}$$

para $z \neq 0$. Seja $\varepsilon \neq 0$. Então

$$\frac{\dfrac{1}{z+\varepsilon} - \dfrac{1}{z}}{\varepsilon} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\varepsilon}\Big) \longrightarrow 0$$

quando $\varepsilon \to 0$, pois a função $1/z$ é contínua.

(5) Pelo Critério **2.18**, só resta provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\big(\gamma(t_n)\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{t_n - t} = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t}$$

para qualquer sequência $t_n \in [a,b]$, $t_n \neq t$, $n \in \mathbb{N}$, convergente a $t \in [a,b]$, ou seja, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Se, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(t_n) = \gamma(t)$, então

$$\frac{f\big(\gamma(t_n)\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{t_n - t} = 0 = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t}.$$

Seja t_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$, a subsequência dos t_n para os quais $\gamma(t_n) \neq \gamma(t)$. Como γ é uma função contínua, temos $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma(t_{n_m}) = \gamma(t)$. Daí,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f\big(\gamma(t_{n_m})\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{\gamma(t_{n_m}) - \gamma(t)} = f'\big(\gamma(t)\big).$$

Consequentemente,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f\big(\gamma(t_{n_m})\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{t_{n_m} - t} = \lim_{m\to\infty} \frac{f\big(\gamma(t_{n_m})\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{\gamma(t_{n_m}) - \gamma(t)} \cdot \frac{\gamma(t_{n_m}) - \gamma(t)}{t_{n_m} - t} = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t).$$

Em suma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\big(\gamma(t_n)\big) - f\big(\gamma(t)\big)}{t_n - t} = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t).$$

(6) Obviamente, a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-c)^{n-1}$ tem raio de convergência $\leq R$. Sejam a, r tais que $0 < a < r < R$. Por **6.16**, $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| \cdot r^n = 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot (a/r)^{n-1} = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |nc_n| \cdot a^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} (1/r) \cdot n \cdot (a/r)^{n-1} \cdot |c_n| \cdot r^n = 0$. Por **6.16**, a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-c)^{n-1}$ tem raio de convergência $\geq a$. Como $a \in (0,R)$ é arbitrário, então a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-c)^{n-1}$ tem raio de convergência não inferior a R. Pelos mesmos argumentos, para qualquer $0 < r < R$, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot |c_n| \cdot r^n$ é convergente.

É fácil ver que, para $n \geq 1$, a identidade

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} \cdot b^k$$

é válida. Consequentemente, para $a \neq b$ e $n \geq 2$, temos

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} - n \cdot b^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k-1} - b^{n-k-1}) \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n-2} (a^{n-k-1} - b^{n-k-1}) \cdot b^k =$$
$$= (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-k-2} a^{n-j-k-2} \cdot b^j \cdot b^k = (a-b) \cdot \sum_{m=0}^{n-2} (m+1) \cdot a^{n-m-2} \cdot b^m.$$

Sejam $z, z+\varepsilon \in \Delta(c,R)$ para $\varepsilon \neq 0$. Então, para algum r tal que $0 < r < R$, temos $z, z+\varepsilon \in \Delta(c,r)$. Pela Proposição **6.5**(2),

$$\frac{u(z+\varepsilon) - u(z)}{\varepsilon} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot \Big(\frac{(z+\varepsilon-c)^n - (z-c)^n}{\varepsilon} - n(z-c)^{n-1} \Big).$$

Pelas fórmulas acima, para $n \geq 2$, obtemos

$$\Big| \frac{(z+\varepsilon-c)^n - (z-c)^n}{\varepsilon} - n(z-c)^{n-1} \Big| = |\varepsilon| \cdot \Big| \sum_{m=0}^{n-2} (m+1) \cdot (z+\varepsilon-c)^{n-m-2} \cdot (z-c)^m \Big| \leq$$
$$\leq |\varepsilon| \cdot (n-1)^2 \cdot r^{n-2} \leq |\varepsilon| \cdot n^2 \cdot r^{n-2}.$$

Pela Proposição **6.5**(1),

$$\Big| \frac{u(z+\varepsilon) - u(z)}{\varepsilon} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-c)^{n-1} \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot \Big| \frac{(z+\varepsilon-c)^n - (z-c)^n}{\varepsilon} - n(z-c)^{n-1} \Big|$$
$$\leq \frac{|\varepsilon|}{r^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot |c_n| \cdot r^n \longrightarrow 0$$

quando $\varepsilon \to 0$, pois $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot |c_n| \cdot r^n < \infty$.

A demonstração está completa.

Exercícios. 1. Seja $z = x + i \cdot y$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Quais, dentre as funções abaixo, são analíticas?

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + 2iy(x-1), \qquad f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + 2iy(x+1),$$
$$f(z) = \big(\exp y + \exp(-y)\big) \cdot \operatorname{sen} x + i \cdot \big(\exp y + \exp(-y)\big) \cdot \cos x,$$
$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f(z) = x^2y^2 + 2ix^2y^2, \qquad f(z) = \exp(xy) - \exp(-xy) + ixy.$$

2. Calcule as derivadas complexas das seguintes funções:

$$\exp z, \qquad \frac{1}{z^3}, \qquad \operatorname{sen} z, \qquad \cos z, \qquad \frac{\exp z}{z^2}, \qquad \exp(z^2).$$

3. Desenvolva as seguintes funções analíticas em séries de potências centradas na origem:

$$\exp(z + \pi i), \qquad (\operatorname{sen} z)^2, \qquad \cos(z^2 - 1).$$

4. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Prove que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ possui derivada complexa em $\overline{D}$.

5.* Seja $f : \Delta(c,R) \to \mathbb{C}$ uma função analítica, seja $j \in \mathbb{N}$ e seja $0 < r < R$. Prove que

$$r^j \cdot |f^{(j)}(c)| \leq j! \cdot ||f||_{\overline{\Delta}(c,r)},$$

onde $f^{(j)}$ é a j-ésima derivada complexa de f.

6. Seja $f : \Delta(0,1) \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Prove que f é constante.

8. Os Principais Teoremas da Análise de Uma Variável Complexa

8.1. Teorema Fundamental da Análise de Uma Variável Complexa. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então as seguintes condições são equivalentes*:

(1) *A função $f : D \to \mathbb{C}$ é analítica em D.*

(2) *Para a função $f : D \to \mathbb{C}$ é válida a fórmula de Cauchy*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-c}\, dz = n_c(\gamma) \cdot f(c)$$

para qualquer $c \in D$ e para qualquer caminho fechado $\gamma : [a,b] \to D \setminus \{c\}$, regular por partes, que é contrátil em D.

(3) *Para todo $c \in D$, a função f pode ser desenvolvida numa série de potências convergente (absolutamente) num disco aberto $\Delta(c,\varrho) \subset D$, $\varrho > 0$.*

(4) *A função $f : D \to \mathbb{C}$ possui derivada complexa contínua em D.*

(5) *As funções reais $f_0 = \operatorname{Re} f : D \to \mathbb{R}$ e $f_1 = \operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ de duas variáveis reais possuem derivadas parciais $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}, \dfrac{\partial f_0}{\partial y}, \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ contínuas em D que satisfazem às equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_0}{\partial y}$$

em todos os pontos de D.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2) pelo Teorema **6.28**.

(2) $\Longrightarrow$ (3) pelo Teorema **6.22**.

(3) $\Longrightarrow$ (4) pela Proposição **7.5**(6).

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) pelo Teorema **7.4**.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Seja $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho suave. Pela Proposição **7.5**(5), temos $\dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Pela Proposição **3.3**(4),

$$\int_{\gamma} f'(z)\, dz = \int_a^b f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t)\, dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Em outras palavras: a integral de f' por qualquer caminho suave depende somente dos extremos do caminho. Portanto, o mesmo é válido para qualquer caminho $\gamma : [a,b] \to D$ suave por partes. Consequentemente, a função f' é analítica em D.

Seja $c \in D$. Pelo Corolário **5.8**, é suficiente provar que a função f é analítica num disco aberto $\Delta(c,\varrho) \subset D$. Sendo analítica, a função f' pode ser desenvolvida numa série de potências $f'(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j (z-c)^j$ convergente absolutamente sobre um disco aberto $\Delta(c,\varrho) \subset D$, $\varrho > 0$. Não é difícil ver que a série de potências $g(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{c_j}{j+1} \cdot (z-c)^{j+1}$ converge absolutamente sobre o disco aberto $\Delta(c,\varrho)$.

Pela Proposição **7.5**(6), $g'(z) = f'(z)$ para todo $z \in \Delta(c, \varrho)$. Pela Proposição **7.5**(2,1), a função $f - g$ é constante em $\Delta(c, \varrho)$. Como a função g é analítica em $\Delta(c, \varrho)$, então a função f é analítica em $\Delta(c, \varrho)$. A demonstração está completa.

8.2. Corolário. *Sejam $U, D \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos e sejam $h : U \to D$ e $f : D \to \mathbb{C}$ funções analíticas. Então a função $f \circ h : U \to \mathbb{C}$ é analítica.*

Demonstração. O fato segue do Teorema **8.1** e da Proposição **7.5**(3).

8.3. Para os coeficientes c_j da série de potências $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ de uma função analítica $f : D \to \mathbb{C}$, temos as fórmulas

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r)} \frac{f(z)}{(z-c)^{j+1}}\, dz = \frac{f^{(j)}(c)}{j!},$$

onde $f^{(j)}$ designa a j-ésima derivada complexa de f. Isto segue do Teorema **6.22** e da Proposição **7.5**(6).

8.4. Seja $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ uma série de potências que possui pelo menos um coeficiente não-nulo. Então, para $n \in \mathbb{N}$ apropriado, temos $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0 \neq c_n$. Portanto, $f(z) = (z-c)^n \cdot \Big(c_n + (z-c) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+n+1}(z-c)^j\Big)$. Seja $z \in \mathbb{C}$. É fácil ver que a série $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+n+1}(z-c)^j$ converge se e somente se a série $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge. Em outras palavras, o raio de convergência R de $f(z)$ é igual ao de $g(z)$. Vamos supor que $R > 0$. Então $f(z) = (z-c)^n \cdot \big(c_n + (z-c) \cdot g(z)\big)$, onde $g(z)$ é uma função analítica em $\Delta(c, R)$. Em particular, $g(z)$ é contínua. Seja $0 < r < R$. Pelo Teorema **2.33**, a função g é limitada no disco $\overline{\Delta}(c, r)$, ou seja, existe M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{\Delta}(c, r)$. Façamos $\varepsilon = \min\big\{r, \frac{|c_n|}{M+1}\big\} > 0$. Provemos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{\Delta}(c, \varepsilon) \setminus \{c\}$. Realmente, se $f(z) = 0$ e $c \neq z \in \overline{\Delta}(c, \varepsilon)$, então $c_n + (z-c) \cdot g(z) = 0$ e $|c_n| = |z-c| \cdot |g(z)| \leq |z-c| \cdot M \leq \frac{|c_n|}{M+1} \cdot M < |c_n|$, pois $c_n \neq 0$. Uma contradição. Com isto, como qualquer função analítica pode ser desenvolvida numa série de potências com raio de convergência positivo, demonstramos o

8.5. Lema. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $c \in D$ e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Então, para algum $\varepsilon > 0$ tal que $\Delta(c, \varepsilon) \subset D$, temos as alternativas:*

ou $f(z) = 0$ para todo $z \in \Delta(c, \varepsilon)$;

ou existem um número $n \in \mathbb{N}$ e uma função analítica $g : \Delta(c, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ tais que $f(z) = (z-c)^n \cdot g(z)$ e $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Delta(c, \varepsilon)$.

8.6. Definição. Seja $\varnothing \neq D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto não-vazio. Então D é dito *conexo* se para quaisquer $p, q \in D$ existe um caminho $\gamma : [a, b] \to D$ que liga os pontos p e q, isto é, $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

8.7. Lema. *Sejam $U_1, U_2 \subset [a, b]$ conjuntos abertos tais que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ e $U_1 \cup U_2 = [a, b]$. Então, ou $U_1 = [a, b]$, ou $U_1 = \varnothing$.*

Demonstração. Suponhamos que $U_1 \neq [a, b]$ e $U_1 \neq \varnothing$. Podemos supor que $a \in U_1$; caso não seja assim, trocamos U_1 por U_2. Sendo U_1 aberto, existe $t > a$ tal que $[a, t) \subset U_1$. Façamos $s = \sup\big\{t \in \mathbb{R} \mid [a, t) \subset U_1\big\} > a$. Evidentemente existe uma sequência $t_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $[a, t_k) \subset U_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = s$. Provemos que $[a, s) \subset U_1$. Seja $t \in [a, s)$, isto é, $a \leq t < s$. Então $t < t_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $t \in [a, t_k) \subset U$.

Sendo U_1 complemento do conjunto aberto U_2, o conjunto U_1 é fechado. Daí concluímos que $s \in U_1$, pois s é limite de uma sequência de pontos de $[a,s)$. Portanto, $[a,s] \subset U_1$. Como $U_1 \neq [a,b]$, então $s < b$. Mas U_1 é aberto. Assim, de $a < s < b$, deduzimos que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset U_1$ para algum $\varepsilon > 0$. Agora, $[a, s+\varepsilon) \subset U_1$, contradizendo a escolha de s. A demonstração está completa.

8.8. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e seja $D = D_1 \cup D_2$, onde $\varnothing \neq D_1, D_2 \subset D$ são abertos e não-vazios. Então $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$.*

Demonstração. Suponhamos que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ e sejam $p \in D_1$ e $q \in D_2$. Pela Definição **8.6**, existe um caminho $\gamma : [a,b] \to D$ tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Como a função γ é contínua e D_1 e D_2 são abertos, então as imagens inversas $U_1 = \gamma^{-1}(D_1) \subset [a,b]$ e $U_2 = \gamma^{-1}(D_2) \subset [a,b]$ são abertos em $[a,b]$. Por outro lado, as igualdades $D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ implicam as igualdades $[a,b] = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Pelo Lema **8.7**, ou $U_1 = [a,b]$, ou $U_1 = \varnothing$. Mas $a \in U_1 \not\ni b \in U_2$, pois $\gamma(a) = p \in D_1$ e $\gamma(b) = q \in D_2$. Chegamos a uma contradição. A demonstração está completa.

8.9. Teorema (Rigidez de Funções Analíticas)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ funções analíticas, seja $c \in D$ e seja $p_k \in D$, $p_k \neq c$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a c, $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = c$. Se $f(p_k) = g(p_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $f = g$. Em particular, podemos restaurar uma função analítica definida num conjunto D aberto e conexo se soubermos como esta função é definida num subconjunto $U \subset D$ aberto e não-vazio*

Demonstração. Considerando as funções $f - g$ e 0 no lugar de f e g, podemos supor que $g = 0$. Agora $f(p_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema **8.5**, existe um disco aberto $\Delta(c,\varepsilon) \subset D$, $\varepsilon > 0$, tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Delta(c,\varepsilon)$, pois, para $z = p_k$, a igualdade $f(z) = (z-c)^n \cdot g(z)$ é impossível: $0 = f(p_k) = (p_k - c)^n \cdot g(p_k) \neq 0$ (note que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = c$ implica que $p_k \in \Delta(c,\varepsilon)$ para k suficientemente grande).

Designamos por D_1 o subconjunto de pontos $p \in D$ tais que $\Delta\big(p, \varepsilon(p)\big) \subset D$ e $f|_{\Delta(p,\varepsilon(p))} = 0$ para algum $\varepsilon(p) > 0$. Por definição, D_1 é aberto e $c \in D_1$. Designamos por D_2 o subconjunto de pontos $q \in D$ tais que, para algum $\delta(q) > 0$, temos $\Delta\big(q, \delta(q)\big) \subset D$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Delta\big(q, \delta(q)\big) \setminus \{q\}$. É fácil ver que D_2 é aberto e que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Pelo Lema **8.5**, $D = D_1 \cup D_2$. Pelo Corolário **8.8**, $D_1 \neq \varnothing$ implica $D_1 = D$. A demonstração está completa.

8.10. Teorema (Desigualdade de Cauchy)**.** *Seja $R > 0$ e seja $f : \Delta(c,R) \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $M = ||f||_{\Delta(c,R)} < \infty$. Então*

$$\big|f^{(j)}(c)\big| \leq \frac{j! \cdot M}{R^j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $0 < r < R$. Por **8.3**, $f^{(j)}(c) = \dfrac{j!}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C(c,r)} \frac{f(z)}{(z-c)^{j+1}}\, dz$. Portanto, pelo Lema **3.7**,

$$\big|f^{(j)}(c)\big| = \Big|\frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r)} \frac{f(z)}{(z-c)^{j+1}}\, dz\Big| \leq \frac{j!}{2\pi} \cdot \Big|\Big|\frac{f(z)}{(z-c)^{j+1}}\Big|\Big|_{C(c,r)} \cdot 2\pi r \leq \frac{j!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{j+1}} \cdot 2\pi r = \frac{j! \cdot M}{r^j}.$$

Sendo válida para qualquer $0 < r < R$, esta desigualdade implica a desigualdade de Cauchy. A demonstração está completa.

8.11. Corolário (Teorema de Liouville)**.** *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica limitada (isto é, $||f||_{\mathbb{C}} < \infty$). Então f é constante.*

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy aplicada no caso em que $R = \infty$, temos $\big|f'(c)\big| \leq 0$ para qualquer $c \in \mathbb{C}$, ou seja, $f' = 0$. A tese segue da Proposição **7.5**(1). A demonstração está completa.

8.12. Corolário (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Qualquer polinômio não-constante, numa variável, com coeficientes complexos, possui pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração. Suponhamos que o polinômio $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$, $c_n \neq 0$, $0 < n \in \mathbb{N}$, em questão, não tenha raizes. Então $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pela Proposição **7.5**(4) e pelo Teorema **8.1**, a função $f(z) = 1/p(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$. Agora, pelo Corolário **8.11**, é suficiente provar que f é limitada. Façamos $m = \max\big\{|c_0|, \ldots, |c_{n-1}|\big\} > 0$ (no caso em que $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0$, o polinômio $p(z)$ tem raizes); façamos também $R = \max\Big\{1, \dfrac{2nm}{|c_n|}\Big\}$. Seja $|z| > R$. Como $c_n z^n = p(z) - (c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0)$, então, tendo em mente que $|z| > R \geq 1$ e, portanto, $|z|^{n-1} \geq |z|^i$ para $n - 1 \geq i \geq 0$, obtemos

$$\begin{gathered} |c_n| \cdot |z|^n = |c_n z^n| \leq \big|p(z)\big| + |c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0| \leq \big|p(z)\big| + |c_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |c_0| \leq \\ \leq \big|p(z)\big| + |c_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |c_0| \cdot |z|^{n-1} \leq \big|p(z)\big| + |c_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |c_0| \cdot |z|^{n-1} \leq \\ \leq \big|p(z)\big| + nm \cdot |z|^{n-1}. \end{gathered}$$

Portanto, para $|z| > R$, temos

$$\big|p(z)\big| \geq |z|^{n-1} \cdot \big(|c_n| \cdot |z| - nm\big) > R^{n-1} \cdot \big(|c_n| \cdot R - nm\big) \geq R^{n-1} nm > 0.$$

Em outras palavras,

$$\big|f(z)\big| \leq \frac{1}{R^{n-1} nm}$$

para $|z| > R$. Por outro lado, a função f, sendo contínua no compacto $\overline{\Delta}(0, R)$, é limitada em $\overline{\Delta}(0, R)$ pelo Teorema **2.33**. A demonstração está completa.

8.13. Definição. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $P \subset D$. Então P é dito *discreto* se, para todo $p \in P$, existe uma vizinhança aberta U_p de p que contém somente um ponto de P, isto é, $P \cap U_p = \{p\}$ (podemos supor que a vizinhança U_p esteja contida em D, pois D é aberto). Um subconjunto discreto $P \subset D$ é dito *isolado* em D se P é relativamente fechado em D. Neste caso, $D \setminus P$ é aberto, pois $P = D \cap Y$ com Y fechado e $D \setminus P = D \cap (\mathbb{C} \setminus Y)$ com $\mathbb{C} \setminus Y$ aberto.

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $P \subset D$ um subconjunto isolado em D e seja $f : D \setminus P \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $D \setminus P$. Então a função f é dita *meromorfa em* D se, para todo $p \in P$, existe uma vizinhança aberta de p, $p \in V_p \subset D$, e funções holomorfas $g, h : V_p \to \mathbb{C}$ tais que $P \cap V_p = \{p\}$, $h(z) \neq 0$ e $f(z) = g(z)/h(z)$ para todo $z \in V_p \setminus \{p\}$.

Dizemos que a função meromorfa f é *holomorfa num ponto* $p \in D$ se existe uma função holomorfa $k : W_p \to \mathbb{C}$ definida numa vizinhança aberta de p, $p \in W_p \subset D$, tal que $P \cap W_p \subset \{p\}$ (consequentemente, f é holomorfa em $W_p \setminus \{p\}$) e $f(z) = k(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$. Neste caso, ponhamos $f(p) = k(p)$. Pela rigidez das funções holomorfas, este valor $f(p)$ é definido univocamente (pois podemos supor que $W_p = \Delta(p, r)$ é um conjunto aberto e conexo, sendo $\Delta(p, r) \setminus \{p\}$ aberto não-vazio). No caso em que f não é holomorfa em $p \in D$, dizemos que p é *polo de* f e escrevemos $f(p) = \infty$ (no último caso, temos necessariamente $p \in P$).

8.14. Proposição. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $P \subset D$. Então P é isolado em D se, e somente se, para qualquer sequência $p_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, convergente a um ponto $c \in D$, $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = c$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_k = c$ para todo $k \geq k_0$.*

Demonstração. Seja P um subconjunto isolado em D. Tomemos $p_k \in P$ com $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = c \in D$. Então $P = D \cap Y$ com Y fechado e $c \in Y$ pelo Critério de Fechamento **2.8**, isto é, $c \in P$. Como P é discreto, então $P \cap U_c = \{c\}$ para uma vizinhança aberta U_c de c. De $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = c$, segue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_k \in U_c$ para todo $k \geq k_0$. Assim, $p_k = c$ para todo $k \geq k_0$.

Reciprocamente, suponhamos que $P \subset D$ satisfaz a propriedade de que trata a Proposição **8.14** e seja $p \in P$. Se qualquer vizinhança aberta de p contém um ponto de P diferente de p, então podemos construir uma sequência $p \neq p_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, convergente a p, da seguinte maneira: para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $p_k \in \Delta\big(p, 1/(k+1)\big)$ com $p_k \neq p$. Teríamos obviamente então $\lim_{k\to\infty} p_k = p$, o que contradiz a propriedade de P. Para concluir, precisamos provar que P é relativamente fechado em D. Para isto, é suficiente provar que $U = D \setminus P$ é aberto, pois então $Y = \mathbb{C} \setminus U$ é fechado e $D \cap Y = D \setminus U = D \setminus (D \setminus P) = P$. Seja $c \in U$. Se qualquer vizinhança aberta de c contém um ponto de P, podemos construir, como acima, uma sequência $p_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, convergente a $c \notin P$. Consequentemente, pela propriedade de P, existe uma vizinhança aberta U_c de c (podemos supor que $U_c \subset D$, pois D é aberto) tal que $P \cap U_c = \varnothing$, ou seja, $U_c \subset D \setminus P = U$. Assim concluímos que U é aberto. A demonstração está completa.

8.15. Pela Proposição **8.14**, o subconjunto $P_1 \cup P_2$ é isolado em D se os subconjuntos $P_1, P_2 \subset D$ forem isolados em D. Seja $P \subset D$ isolado num aberto $D \subset \mathbb{C}$ e seja $K \subset D$ um compacto. Então $P \cap K$ é finito, pois, caso contrário, poderíamos extrair uma sequência $p_k \in P \cap K$, $k \in \mathbb{N}$, de pontos distintos e, por K ser compacto, encontraríamos dela uma subsequência $p_{k_n} \in P \cap K$, $n \in \mathbb{N}$, convergente a um ponto $c \in K \subset D$, o que contradiz o fato de P ser isolado. Além disso, da Proposição **8.14** segue que qualquer subconjunto de um subconjunto isolado em D é isolado em D.

8.16. Proposição. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo e seja $P \subset D$ um subconjunto isolado em D. Então $D \setminus P$ é conexo.*

Demonstração. Sejam $q_0, q \in D \setminus P$. Como D é conexo, então existe um caminho $\gamma : [a, b] \to D$, regular por partes e simples por partes, que liga q_0 e q. Pelo Teorema **4.8**, podemos supor que γ é poligonal. Seja $\gamma = [\overline{q_0, q_1, \ldots, q_n}] \subset D$ com $q_n = q$. Sendo $[\overline{q_j, q_{j+1}}]$ um compacto, o intervalo $[\overline{q_j, q_{j+1}}]$ contém somente um número finito de pontos de P. Subdividindo os intervalos $[\overline{q_j, q_{j+1}}]$ se necessário, podemos supor que $P \cap \gamma \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}\}$. Se $q_j \in P$, então podemos nos desviar deste ponto q_j, substituindo nosso caminho γ por um outro caminho poligonal, dentro de um disco aberto $\Delta(q_j, r) \subset D$, tal que $P \cap \Delta(q_j, r) = \{q_j\}$. Assim, desviando-nos de todos os pontos de $P \cap \gamma$, chegamos a um caminho poligonal em $D \setminus P$ que liga q_0 e $q_n = q$. A demonstração está completa.

8.17. Proposição (Rigidez de Funções Meromorfas)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo e sejam f e g duas funções meromorfas em D. Sejam $P_1, P_2 \subset D$ conjuntos isolados tais que $f : D \setminus P_1 \to \mathbb{C}$ e $g : D \setminus P_2 \to \mathbb{C}$ são holomorfas. Se, para algum conjunto aberto e não-vazio $U \subset D$, $U \neq \varnothing$, as funções f e g são idênticas em $V = U \setminus (P_1 \cup P_2)$, então f e g são idênticas em $D \setminus (P_1 \cup P_2)$.*

Demonstração. Pela Proposição **8.16** e pela rigidez das funções holomorfas (Teorema **8.9**), é suficiente observar que V é aberto e não-vazio. A demonstração está completa.

8.18. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja f uma função meromorfa em D e seja $c \in D$. Então existem uma vizinhança aberta de c, $c \in W_c \subset D$, um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ e uma função holomorfa $k : W_c \to \mathbb{C}$, tais que $f(z) = (z - c)^n k(z)$ para todo $z \in W_c \setminus \{c\}$. Com efeito, pelo Lema **8.5**, isto é válido quando f é holomorfa em c. Seja $V_c \subset D$ uma vizinhança aberta de c tal que $f(z) = g(z)/h(z)$ para todo $z \in V_c \setminus \{c\}$, onde $g, h : V_c \to \mathbb{C}$ são funções holomorfas e $h(z) \neq 0$ para todo $z \in V_c \setminus \{c\}$. Se $g = 0$ numa vizinhança aberta de c, $c \in W_c \subset V_c$, então façamos $n = 0$ e $k = 0$. Caso contrário, pelo Lema **8.5**, existem uma vizinhança aberta W_c de c e números $l, m \in \mathbb{N}$ tais que $g(z) = (z - c)^l g_0(z)$, $g_0(z) \neq 0$, $h(z) = (z - c)^m h_0(z)$ e $h_0(z) \neq 0$ para todo $z \in W_p$. Assim, obtemos $f(z) = (z - c)^{l-m} k(z)$ para todo $z \in W_c \setminus \{c\}$, onde $k = g_0/h_0$ é uma função holomorfa em W_c.

8.19. Quando, na expresão $f(z) = (z - c)^n k(z)$, a função k é identicamente nula numa vizinhança aberta de c, podemos escrever $f(z) = 0$ para todo $z \in W_c \setminus \{c\}$. Neste caso, dizemos que f tem, *em c, um zero de multiplicidade infinita* e escrevemos $\operatorname{ord}_p f = \infty$. Caso contrário, pelo Lema **8.5**, podemos supor que $k(c) \neq 0$ e, então, na expresão $f(z) = (z - c)^n k(z)$, o número $n \in \mathbb{Z}$ é definido univocamente.

Realmente, digamos que $n \geq m$ e $(z-c)^n k(z) = (z-c)^m p(z)$ para todo $z \in W_c \setminus \{c\}$, onde W_c é uma vizinhança aberta de c e $k, p : W_c \to \mathbb{C}$ são funções holomorfas tais que $k(z) \neq 0$ e $p(z) \neq 0$ para todo $z \in W_c$. Então podemos diminuir W_c até $W_c = \Delta(c,r)$ e, pela rigidez das funções holomorfas, a igualdade $(z-c)^{n-m}k(z) = p(z)$, sendo válida para todo $z \in \Delta(c,r) \setminus \{c\}$, é valida para $z = c$ (pois $\Delta(c,r) \setminus \{c\}$ é aberto não-vazio e $\Delta(c,r)$ é conexo). Agora, $p(c) \neq 0$ implica $n = m$. Escrevemos $\operatorname{ord}_c f = n$. Dizemos que n é a *multiplicidade do zero c de f* se $n \geq 0$. Dizendo que c é zero de f enfatizamos o fato que $n > 0$. Quando $n < 0$, obviamente c é um polo de f; o número $-n > 0$ é dito *multiplicidade do polo c de f*. Obviamente, a função f, meromorfa em D, é holomorfa em $c \in D$ se e só se $\operatorname{ord}_c f \geq 0$.

Seja f uma função meromorfa num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$ e seja $P \subset D$ um subconjunto isolado em D tal que $f : D \setminus P \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Façamos $P(f) = \{c \in D \mid \operatorname{ord}_c f < 0\}$ e $Z(f) = \{c \in D \mid \operatorname{ord}_c f > 0\}$, o conjunto de polos de f e o conjunto de zeros de f, respectivamente. Obviamente $P(f) \subset P$ e $Z(f) \cap P(f) = \varnothing$. Em particular, $P(f)$ é isolado em D. Agora, no lugar de P, podemos pôr $P(f)$ e considerar a funcão f meromorfa em D como sendo holomorfa em $D \setminus P(f)$, ou seja, $f : D \setminus P(f) \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Observemos, que $D \setminus P(f)$ é o maior subconjunto de D, onde f pode ser contínua. Realmente, se $p \in P(f)$, então $f(z) = (z-p)^{-n}k(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$, onde $0 < n \in \mathbb{N}$, $W_p \subset D$ é uma vizinhança aberta de p e $k : W_p \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $k(z) \neq 0$ para todo $z \in W_p$. Vemos que $\lim\limits_{p \neq z \to p} \big|f(z)\big| = \infty$, pois $\lim\limits_{p \neq z \to p} \big|k(z)\big| = \big|k(p)\big| < \infty$. Portanto f não pode ser contínua em p.

8.20. Sejam f e g funções meromorfas em qualquer conjunto aberto D. Podemos definir a soma $f+g$ e o produto $f \cdot g$ de f e g. Sejam $P_1, P_2 \subset D$ subconjuntos isolados em D tais que as funções $f : D \setminus P_1 \to \mathbb{C}$ e $g : D \setminus P_2 \to \mathbb{C}$ são holomorfas. Definamos $f + g$ e $f \cdot g$ como funções holomorfas em $D \setminus (P_1 \cup P_2)$. A consideração local numa vizinhança aberta W_p de um ponto $p \in P_1 \cup P_2$ mostra que os resultatos das operações também são funções meromorfas em D. Com efeito, existem as funções holomorfas $f_0, f_1, g_0, g_1 : W_p \to \mathbb{C}$ tais que $f_1(z) \neq 0$, $g_1(z) \neq 0$, $f(z) = f_0(z)/f_1(z)$ e $g(z) = g_0(z)/g_1(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$. Seja $z \in W_p \setminus \{p\}$. Escrevemos

$$(f+g)(z) = \frac{f_0(z) \cdot g_1(z) + f_1(z) \cdot g_0(z)}{f_1(z) \cdot g_1(z)}, \qquad (f \cdot g)(z) = \frac{f_0(z) \cdot g_0(z)}{f_1(z) \cdot g_1(z)}.$$

Dessa maneira temos a desejada representação em fração, pois a função $f_1 \cdot g_1$ é holomorfa em W_p e $(f_1 \cdot g_1)(z) \neq 0$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$.

8.21. Localmente qualquer função meromorfa f num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$ pode ser desenvolvida numa *série de Laurent*. Isto é, para todo $c \in D$, existem um disco aberto $\Delta(c,r) \subset D$, um número natural $n \in \mathbb{N}$ e números complexos $c_j \in \mathbb{C}$, $j = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, 2, \dots$, tais que f é holomorfa em $\Delta(c,r) \setminus \{c\}$, a série $\displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} c_j (z-c)^j$ converge para todo $z \in \Delta(c,r) \setminus \{c\}$ e

$$f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} c_j (z-c)^j$$

para todo $z \in \Delta(c,r) \setminus \{c\}$. O fato segue imediatamente da igualdade $f(z) = (z-c)^{-n}h(z)$ válida para todo $z \in \Delta(c,r) \setminus \{c\}$, onde $\Delta(c,r) \subset D$ é um disco aberto apropriado e $h : \Delta(c,r) \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa, quando deselvolvemos a função h numa serie de potências. Caso $\operatorname{ord}_c f \neq \infty$, podemos também escrever $f(z) = \displaystyle\sum_{j=\operatorname{ord}_c f}^{\infty} c_j (z-c)^j$, com $c_{\operatorname{ord}_c f} \neq 0$.

8.22. Dadas duas funções f e g, meromorfas num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$, desenvolvidas em séries de Laurent num disco aberto $\Delta(c,r) \subset D$, isto é, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} b_j (z-c)^j$ e $g(z) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} c_j (z-c)^j$ (podemos escrever cada série começando da mesma potência negativa de $(z-c)$), então, pela Proposição **6.5**(2,3), as funções $f+g$ e $f \cdot g$ no disco aberto $\Delta(c,r)$ têm as seguintes representações em séries de Laurent:

$$(f+g)(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} (b_j + c_j)(z-c)^j, \qquad (f \cdot g)(z) = \sum_{m=-2n}^{\infty} \Big(\sum_{j=-n}^{m+n} b_j \cdot c_{m-j} \Big)(z-c)^m.$$

8.23. Seja f uma função meromorfa num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$ e seja $P \subset D$ um subconjunto isolado em D tal que a função $f : D \setminus P \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Obviamente f possui derivada complexa holomorfa em $D \setminus P$. Seja $W_p \subset D$ uma vizinhança aberta de um ponto $p \in P$ tal que $P \cap W_p = \{p\}$ e seja $k : W_p \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $f(z) = (z-p)^n k(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$. Então, pela Proposição **7.5**(2,4), temos $f'(z) = n(z-p)^{n-1}k(z) + (z-p)^n k'(z)$ para qualquer $z \in W_p \setminus \{p\}$. Assim, podemos considerar f' como uma função meromorfa em D, ou seja, qualquer função meromorfa possui derivada complexa meromorfa.

8.24. Seja $f(z) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} c_j(z-c)^j$ a série de Laurent de f num disco aberto $\Delta(c,r)$ com $n > 0$. Então $f(z) = g(z) + \displaystyle\sum_{j=-n}^{-1} c_j(z-c)^j$, onde a série de potências $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-c)^j$ tem raio de convergência $\geq r$ $\Big($pois a série $\displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} c_j(z-c)^j$ converge para todo $z \in \Delta(c,r) \setminus \{c\}\Big)$. Pela Proposição **7.5**(2,4,6), temos $f'(z) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{\infty} jc_j(z-c)^{j-1}$. Em outras palavras, a regra de derivação complexa de uma série de Laurent é semelhante à de uma série de potências.

8.25. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e seja f uma função meromorfa em D que não é identicamente nula. Vamos provar que $Z(f)$ é isolado em D. A função $f : D \setminus P(f) \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Pela Proposição **8.16**, o conjunto aberto $D \setminus P(f)$ é conexo. Suponhamos que $Z(f)$ não é isolado em D. Pela Proposição **8.14**, existem $c \in D$ e uma sequência $z_k \in Z(f)$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = c$, mas a sequência contém um número infinito de membros diferentes de c. Em outras palavras, existe uma subsequência z_{k_n}, $n \in \mathbb{N}$, tal que $z_{k_n} \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $c \in P(f)$, então, como sabemos, $\lim\limits_{c\neq z\to c} |f(z)| = \infty$. Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_{k_n})| = \infty$. Mas $f(z_{k_n}) = 0$. Uma contradição. Consequentemente, $c \in D \setminus P(f)$. Agora, aplicando o Teorema **8.9** ao conjunto $D \setminus P(f)$ aberto e conexo e a $g = 0$, concluímos que f é identicamente nula em $D \setminus P(f)$. Uma outra contradição.

8.26. Seja f uma função meromorfa num conjunto $D \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo. Se f não for identicamente nula, então a função $1/f$ será meromorfa em D. Com efeito, a função $1/f$ é holomorfa em $D \setminus \big(Z(f) \cup P(f)\big)$. Sabemos que, para todo ponto $c \in D$, existem $n \in \mathbb{Z}$, uma vizinhança aberta de p, $p \in W_p \subset D$, e uma função holomorfa $k : W_p \to \mathbb{C}$ tais que $k(z) \neq 0$ para todo $z \in W_p$ e $f(z) = (z-c)^n k(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$. Assim, $(1/f)(z) = (z-c)^{-n} \cdot (1/k)(z)$ para todo $z \in W_p \setminus \{p\}$ com a função $1/k$ holomorfa em W_p.

O teorema seguinte generaliza a fórmula de Cauchy para funções meromorfas:

8.27. Teorema (Princípio do Argumento). *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo*; *seja f uma função meromorfa em D tal que $Z(f)$ e $P(f)$ são finitos*; *seja $g : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e seja γ um caminho fechado contrátil em D, regular por partes. Se γ não passa pelos zeros e polos de f, isto é, $\gamma \cap \big(Z(f) \cup P(f)\big) = \varnothing$, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{p \in Z(f) \cup P(f)} g(p) \cdot n_p(\gamma) \cdot \mathrm{ord}_p f.$$

Demonstração. Seja $Z(f) \cup P(f) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Façamos
$$h(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{g(p_j) \cdot \operatorname{ord}_{p_j} f}{z - p_j}.$$
Pela Definição **6.26**,
$$\sum_{j=1}^{n} g(p_j) \cdot n_{p_j}(\gamma) \cdot \operatorname*{ord}_{p_j} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(p_j) \cdot \operatorname{ord}_{p_j} f}{z - p_j}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} h(z)\, dz.$$
Assim, é suficiente provar que a função $q(z) = g(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)} - h(z)$ é holomorfa em D. Obviamente, a função q é holomorfa em $D \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Fixemos um ponto p_j. Seja $m = \operatorname{ord}_{p_j} f$. Temos $h(z) = \dfrac{g(p_j) \cdot m}{z - p_j} + u(z)$, onde $u(z)$ é holomorfa numa vizinhança aberta de p_j. Existem uma vizinhança aberta $W \subset D$ de p_j (podemos supor que $u(z)$ é holomorfa em W) e uma função holomorfa $k : W \to \mathbb{C}$ tais que $k(z) \neq 0$ para todo $z \in W$ e $f(z) = (z - p_j)^m k(z)$ para todo $z \in W \setminus \{p_j\}$. Para $z \in W \setminus \{p_j\}$, temos
$$q(z) = g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - h(z) = g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g(p_j) \cdot m}{(z - p_j)} - u(z) =$$
$$= g(z)\frac{m(z - p_j)^{m-1}k(z) + (z - p_j)^m k'(z)}{(z - p_j)^m k(z)} - \frac{g(p_j) \cdot m}{z - p_j} - u(z) = m\frac{g(z) - g(p_j)}{z - p_j} + g(z)\frac{k'(z)}{k(z)} - u(z).$$
Da mesma forma que na demonstração do Teorema **6.28**, podemos desenvolver a função $g(z)$ em série de potências $g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z - p_j)^l$ convergente num disco aberto $\Delta(p_j, r) \subset D$. Agora as funções $\dfrac{g(z) - g(p_j)}{z - p_j} = \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1}(z - p_j)^l$, $g(z)\dfrac{k'(z)}{k(z)}$ e $u(z)$ são holomorfas numa vizinhança aberta de p_j. Portanto a função $q(z)$ é holomorfa numa vizinhança aberta de p_j. A demonstração está completa.

8.28. Lema. *Seja $f : \Delta(c, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante e seja $f(c) = a$. Então existem discos $\overline{\Delta}(c, r)$, $0 < r < R$, e $\Delta(a, \delta)$, $\delta > 0$, tais que, para todo $p \in \Delta(a, \delta) \setminus \{a\}$, a equação $f(z) = p$ admite exatamente n soluções no disco fechado $\overline{\Delta}(c, r)$, sendo n, $0 < n \in \mathbb{N}$, independente de p. Essas soluções pertencem ao disco aberto $\Delta(c, r)$ e cada solução z_0, considerada como zero da função holomorfa $f(z) - p$, tem multiplicidade 1, $\operatorname{ord}_{z_0}\big(f(z) - p\big) = 1$.*

Demonstração. Pelo Lema **8.5** aplicado a $D = \Delta(c, R)$, ao ponto $c \in \Delta(c, R)$ e à função $f(z) - a$, holomorfa e não-constante, existem um número $n \in \mathbb{N}$, um número ε, tal que $0 < \varepsilon \leq R$, e uma função holomorfa $g : \Delta(c, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ tais que, para todo $z \in \Delta(c, \varepsilon)$, tenhamos $f(z) - a = (z - c)^n g(z)$ e $g(z) \neq 0$. De $f(c) = a$ segue que $n > 0$. Pela Proposição **7.5**(1), a função holomorfa $f'(z)$ não é identicamente nula em $\Delta(c, \varepsilon)$, pois f não é constante. Assim, resta apenas a alternativa do Lema **8.5**, aplicado a f', que garante que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Delta(c, r) \setminus \{c\}$, onde $0 < r < \varepsilon$. Por outro lado, a função $|g|$, sendo contínua no compacto $\overline{\Delta}(c, r) \subset \Delta(c, \varepsilon)$, não assume o valor 0. Pelo Teorema **2.33**, existe $0 < m \in \mathbb{R}$ tal que $\big|g(z)\big| \geq m$ para todo $z \in \overline{\Delta}(c, r)$. Façamos $\delta = mr^n$.

Provemos que, para todo $p \in \Delta(a, \delta)$, a equação igualdade $f(z) - p = 0$ não admite soluções na circunferência $C(c, r)$. Se tivéssimos $p = f(z)$ com $z \in C(c, r)$, então
$$\delta > |p - a| = \big|f(z) - a\big| = \big|(z - c)^n g(z)\big| = r^n \cdot \big|g(z)\big| \geq mr^n = \delta,$$
o que é uma contradição.

Seja $p \in \Delta(a, \delta)$. A função $f(z) - p$, sendo holomorfa (em particular, meromorfa) e não-nula identicamente no conjunto $\Delta(c, R)$, aberto e conexo, tem seu conjunto de zeros $Z\big(f(z) - p\big)$ isolado em

$\Delta(c,R)$, o que implica que ela tem apenas um número finito de zeros no compacto $\overline{\Delta}(c,\varepsilon) \subset \Delta(c,R)$. Designemos por $n(p)$ o número de zeros da função $f(z)-p$ no disco fechado $\overline{\Delta}(c,r) \subset \overline{\Delta}(c,\varepsilon)$. Seja $z_0 \in \overline{\Delta}(c,r)$ um zero de $f(z)-p$ $\big($ou seja, uma solução da equação $f(z)=p$ no disco fechado $\overline{\Delta}(c,r)\big)$. Já sabemos que $z_0 \in \Delta(c,r)$.

Suponhamos que $p \neq a$. Numa vizinhança aberta $W_{z_0} \subset \Delta(c,r)$ de z_0, podemos escrever $f(z)-p = (z-z_0)^l k(z)$, onde $0 < l \in \mathbb{N}$ e $k : W_{z_0} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $k(z) \neq 0$ para todo $z \in W_{z_0}$. É claro que $l = \mathrm{ord}_{z_0}\big(f(z)-p\big) \geq 1$. Se fosse $l > 1$, então, calculando a derivada complexa, obteriamos $f'(z) = l(z-z_0)^{l-1}k(z) + (z-z_0)^l k'(z)$ para todo $z \in W_{z_0}$. Entretanto, de $l > 1$ segue que $f'(z_0) = 0$. Mas $W_{z_0} \subset \Delta(c,r)$ e $f'(z_0) = 0$ pode ocorrer só para $z_0 = c$, pois, nos outros pontos de $\Delta(c,r)$, a derivada f' não é nula. Daí teríamos $p = f(z_0) = f(c) = a$. Uma contradição.

Para concluir a demonstração, é suficiente provar que $n(p) = n$ para todo $p \in \Delta(a,\delta)$.

Pelo Teorema **8.27**, aplicado ao conjunto $D = \Delta(c,\varepsilon)$, aberto e conexo, à função meromorfa $f(z)-p$ (que tem um número finito de zeros em D e não tem polos em D, pois é holomorfa em D), à função constante $g = 1$ e ao caminho $\gamma = C(c,r)$ (já provamos que γ não passa pelos zeros de f), obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-p}\,dz = \sum_{z_0 \in Z(f(z)-p)} n_{z_0}\big(C(c,r)\big)\cdot \underset{z_0}{\mathrm{ord}}\big(f(z)-p\big).$$

Sabemos que $n_{z_0}\big(C(c,r)\big) = 0$ quando $z_0 \notin \overline{\Delta}(c,r)$ e que $n_{z_0}\big(C(c,r)\big) = 1$ quando $z_0 \in \Delta(c,r)$. Em outras palavras, a integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-p}\,dz$ fornece o número do zeros (contados com as suas multiplicidades) da função $f(z)-p$ no interior do disco aberto $\Delta(c,r)$.

Para $p \in \Delta(a,\delta)\setminus\{a\}$, a multiplicidade de cada zero em questão é 1. Assim,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-p}\,dz = n(p)$$

para todo $p \in \Delta(a,\delta)\setminus\{a\}$. Para $p = a$, a função $f(z)-a$ tem um único zero c de multiplicidade n no disco $\Delta(c,r)$, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = n.$$

Provemos que a função

$$h(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-p}\,dz$$

é contínua em $\Delta(a,\delta)$. Para isto, aplicamos a Proposição **6.4**(4).

Seja $q \in \Delta(a,\delta)$ e seja $p_j \in \Delta(a,\delta)$, $j \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente a q. Sendo contínua no compacto $C(c,r)$, a função $f'(z)$ possui norma (finita) $||f'||_{C(c,r)} = L < \infty$. No compacto $C(c,r)$, a função contínua $\big|f(z)-q\,\big|$ não assume o valor 0 e, portanto, pelo Teorema **2.33**, existe uma constante $0 < d \in \mathbb{R}$ tal que $\big|f(z)-q\,\big| \geq d$ para todo $z \in C(c,r)$. Como $\big|f(z)-p_j\big| + |p_j - q\,| \geq \big|f(z)-q\,\big|$, então $\big|f(z)-p_j\big| \geq \big|f(z)-q\,\big| - |p_j - q\,|$. Agora, para $z \in C(c,r)$, temos

$$\Big|f'(z)f(z)-p_j - \frac{f'(z)}{f(z)-q}\Big| = \Big|\frac{f'(z)\cdot(p_j-q)}{\big(f(z)-p_j\big)\cdot\big(f(z)-q\big)}\Big| = \frac{\big|f'(z)\big|\cdot|p_j-q\,|}{|f(z)-p_j|\cdot|f(z)-q\,|} \leq \frac{L\cdot|p_j-q\,|}{\big(d-|p_j-q\,|\big)\cdot d},$$

ou seja,

$$\Big|\Big|\frac{f'(z)}{f(z)-p_j} - \frac{f'(z)}{f(z)-q}\Big|\Big|_{C(c,r)} \leq \frac{L\cdot|p_j-q\,|}{\big(d-|p_j-q\,|\big)\cdot d} \longrightarrow 0$$

quando $j \to \infty$. Conseguimos provar a convergência uniforme $\lim_{j\to\infty}{}^{C(c,r)} \dfrac{f'(z)}{f(z)-p_j} = \dfrac{f'(z)}{f(z)-q}$. Pela Proposição **6.4**(4),

$$h(q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-q}\,dz = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-p_j}\,dz = \lim_{j\to\infty} h(p_j).$$

Isto significa que a função $h(z)$ é contínua em $\Delta(a,\delta)$. É claro que uma função contínua num disco e que assume somente valores inteiros, deve ser constante. De fato, os conjuntos $D_1 = h^{-1}\big(\Delta(n,1/2)\big) = h^{-1}(n)$ e $D_2 = h^{-1}\big(\mathbb{C}\setminus\{n\}\big)$, sendo pré-imagens de conjuntos abertos, são abertos. Obviamente $\Delta(a,\delta) = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ e $a \in D_1$. Pelo Corolário **8.8**, $D_2 = \varnothing$, ou seja, $h(z) = n$ para todo $z \in \Delta(a,\delta)$. A demonstração está completa.

8.29. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Dizemos que f é *aberta* se a imagem $f(U)$ é aberta para todo conjunto aberto $U \subset D$.

8.30. Corolário. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Então f é aberta.*

Demonstração. Seja $U \subset D$ aberto e seja $a = f(c) \in f(U)$, $c \in U$. Então, para algum $R > 0$, temos $\Delta(c,R) \subset U$. Pela rigidez das funções holomorfas, f não é constante no disco $\Delta(c,R)$. Pelo Lema **8.28**, existem discos abertos $\Delta(a,\delta)$ e $\Delta(c,r) \subset \Delta(c,R)$ tais que, para todo $p \in \Delta(a,\delta)$, existe $z \in \Delta(c,r) \subset \Delta(c,R)$ com $f(z) = p$ (para $p = a$, tomemos $z = c$). Em outras palavras, $f(U) \supset \Delta(a,\delta) \ni a$. Assim, $f(U)$ é aberto. A demonstração está completa.

8.31. Corolário (Princípio do Máximo)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica e seja $c \in D$ tal que $\big|f(c)\big| \geq \big|f(z)\big|$ para todo $z \in D$. Então f é constante.*

Demonstração. Suponhamos que f seja não-constante. Pelo Corolário **8.30**, $f(D)$ é aberto e, portanto, $f(D) \supset \Delta\big(f(c),\delta\big)$ para algum $\delta > 0$. Mas no disco aberto $\Delta\big(f(c),\delta\big)$ existe uma quantidade suficiente de pontos $u \in \Delta\big(f(c),\delta\big)$ com $|u| > \big|f(c)\big|$, isto é, existe $z \in D$ tal que $\big|f(z)\big| > \big|f(c)\big|$. Uma contradição. A demonstração está completa.

8.32. Corolário (Lema de Schwartz)**.** *Seja $f : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $f(0) = 0$ e $\big|f(z)\big| \leq 1$ para todo $z \in \Delta(0,1)$. Então $\big|f'(0)\big| \leq 1$ e $\big|f(z)\big| \leq |z|$ para todo $z \in \Delta(0,1)$. Se $\big|f'(0)\big| = 1$ ou $\big|f(z)\big| = |z|$ para algum $0 \neq z \in \Delta(0,1)$, então $f(z) = cz$ com $|c| = 1$.*

Demonstração. Como $f(0) = 0$, então $f(z) = zg(z)$ com a função $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ holomorfa no disco unitário $\Delta(0,1)$. Temos $f'(0) = g(0)$. Pelas condições do Corolário, temos $\big|g(z)\big| = \dfrac{\big|f(z)\big|}{|z|} \leq \dfrac{1}{|z|}$ para todo $0 \neq z \in \Delta(0,1)$. Se g for uma constante c, então de $\big|f(z)\big| \leq 1$ para todo $z \in \Delta(0,1)$, conclui-se que $1 \geq \big|f(z)\big| = |c|\cdot|z|$ para todo $z \in \Delta(0,1)$ e, portanto, $|c| \leq 1$. Consequentemente, $\big|f(z)\big| = |c|\cdot|z| \leq |z|$ e $\big|f'(0)\big| = |c| \leq 1$. Tambem é fácil verificar a última tese do lema. Assim, podemos considerar que g não seja constante.

Seja $0 < r < 1$. Pelo Teorema **2.33**, a função contínua $g(z)$ atinge o valor máximo de seu módulo no compacto $\overline{\Delta}(0,r)$, isto é, para algum $z_0 \in \overline{\Delta}(0,r)$, teremos que $\big|g(z_0)\big| \geq \big|g(z)\big|$ para todo $z \in \overline{\Delta}(0,r)$. Pelo Princípio do Máximo, podemos supor que $z_0 \in C(0,r)$. Assim, a desigualdade $\Big|\dfrac{f(z_0)}{z_0}\Big| \geq \Big|\dfrac{f(z)}{z}\Big|$ implica que $\big|f(z_0)\big|\cdot|z| \geq r\cdot\big|f(z)\big|$ para todo $z \in \overline{\Delta}(0,r)$. Consequentemente, $|z| \geq \big|f(z_0)\big|\cdot|z| \geq r\cdot\big|f(z)\big|$ para todo $z \in \overline{\Delta}(0,r)$.

Seja $z \in \Delta(0,1)$. Então, para algum r_0, $0 < r_0 < 1$, teremos $z \in \overline{\Delta}(0, r_0)$. Por outro lado, $z \in \overline{\Delta}(0, r)$, se $r_0 < r < 1$. Portanto, $|z| \geq r \cdot \big|f(z)\big|$, se $r_0 < r < 1$. Daí concluímos que $|z| \geq \big|f(z)\big|$. Consequentemente, $\big|g(z)\big| \leq 1$ para todo $0 \neq z \in \Delta(0,1)$.

Suponhamos que $\big|f'(0)\big| = 1$ ou $\big|f(z)\big| = |z|$ para algum $0 \neq z \in \Delta(0,1)$. Então $\big|g(0)\big| = 1$ ou $\big|g(z)\big| = 1$ para algum $0 \neq z \in \Delta(0,1)$. Em resumo, $\big|g(z)\big| = 1$ para algum $z \in \Delta(0,1)$. Pelo Princípio do Máximo, g é uma constante $c \in \mathbb{C}$ com $|c| = 1$. Portanto $f(z) = cz$ para todo $0 \neq z \in \Delta(0,1)$. Pela rigidez das funções holomorfas, $f(z) = cz$ para todo $z \in \Delta(0,1)$. A demonstração está completa.

8.33. Lema (Desenvolvimento em Séries de Laurent). *Seja $c \in \mathbb{C}$, seja $0 \leq r < R \leq \infty$, seja*

$$\Delta(c, r, R) = \big\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - c| < R\big\}$$

a coroa circular aberta de raios r, R e seja $f : \Delta(c, r, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa.

Para $n \in \mathbb{Z}$ e qualquer ϱ, $r < \varrho < R$, façamos

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,\varrho)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw.$$

Então os números c_n não dependem da escolha de ϱ, as séries

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-c)^{-n}, \qquad f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n$$

convergem absolutamente sobre a coroa circular $\Delta(c, r_1, \infty)$ e sobre o disco $\Delta(c, r_2)$ respectivamente para quaisquer $r < r_1 < r_2 < R$ e definem funções holomorfas respectivamente na coroa circular $\Delta(c, r, \infty)$ e no disco $\Delta(c, R)$ tais que $f = f_- + f_+$ na coroa circular $\Delta(c, r, R)$.

Demonstração. O fato dos números $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C(c,\varrho)} \dfrac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw$ não dependerem da escolha de ϱ, $r < \varrho < R$, segue-se da consideração da homotopia h (na coroa circular $\Delta(c, r, R)$) apresentada anteriormente ao Lema **6.20**, observando que a função $\dfrac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}$ é holomorfa na coroa circular $\Delta(c, r, R)$.

Seja $q \in \Delta(c, r, R)$. Então, para r_1 e r_2 apropriados, $r < r_1 < r_2 < R$, teremos $q \in \Delta(c, r_1, r_2)$. Escolhamos $p \in C(c, r_1)$ e $p' \in C(c, r_2)$ pontos das correspondentes circunferências sobre um mesmo raio. Consideremos o caminho γ formado pelas partes sucessivas $[\overline{p, p'}]$, $C(c, r_2)$ (com início e fim em p'), $[\overline{p', p}]$, $C(c, r_2)$ (no sentido horário; com início e fim em p). É fácil ver que γ é contrátil na coroa circular $\Delta(c, r, R)$ (vide a homotopia acima referida) e dá uma volta em torno de q. Pela fórmula de Cauchy, $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma} \dfrac{f(w)}{w-q}\, dw = f(q)$. Portanto,

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_2)} \frac{f(w)}{w-q}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_1)} \frac{f(w)}{w-q}\, dw,$$

ou seja, $f(q) = f_-(q) + f_+(q)$, onde

$$f_+(q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_2)} \frac{f(w)}{w-q}\, dw, \qquad f_-(q) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_1)} \frac{f(w)}{w-q}\, dw.$$

Como na demonstração do Teorema **6.22**, temos $\dfrac{f(w)}{w-q} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(w) \cdot (q-c)^n}{(w-c)^{n+1}}$ com convergência absoluta da série de funções de w sobre $C(c, r_2)$. Pela Proposição **6.4**(4),

$$f_+(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_2)} \frac{f(w) \cdot (q-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} (q-c)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_2)} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q-c)^n$$

sendo convergente a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(q-c)^n$. Por ser convergente para todo $q \in \Delta(c, r, R)$, tal série tem raio de convergência $\geq R$ e define a função f_+ holomorfa no disco $\Delta(c, R)$.

Seja $w \in C(c, r_1)$. Então teremos

$$-\frac{1}{w-q} = \frac{1}{q-c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{w-c}{q-c}} = \frac{1}{q-c} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-c}{q-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-c)^n}{(q-c)^{n+1}}.$$

A desigualdade $\left|\dfrac{w-c}{q-c}\right| = \dfrac{r_1}{|q-c|} < 1$ mostra que essa série de funções de w é absolutamente convergente sobre $C(c, r_1)$. Agora, pela Proposição **6.4**(4),

$$f_-(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_1)} \frac{f(w) \cdot (w-c)^n}{(q-c)^{n+1}}\, dw =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (q-c)^{-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,r_1)} \frac{f(w)}{(w-c)^{-n+1}}\, dw = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(q-c)^{-n}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(q-c)^{-n}$, que pode ser vista como série de potências de $u = \dfrac{1}{q-c}$, converge para $q \in \Delta(c, r, R)$ arbitrário, ela tem raio de convergência $\geq 1/r$. Daí é fácil concluir que, para todo $r_1 > r$, a série de funções de q dada por $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(q-c)^{-n}$ converge absolutamente e, portanto, uniformemente sobre a coroa circular $\Delta(c, r_1, \infty)$. Pelo Corolário **6.6**, a função f_- é holomorfa na coroa circular $\Delta(c, r, \infty)$. A demonstração está completa.

8.34. Definição. Seja $f : \Delta(c, 0, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa numa coroa circular $\Delta(c, 0, R)$. Então o número

$$\operatorname{Res}_c f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(c,\varrho)} f(w)\, dw,$$

onde $0 < \varrho < R$, é dito *resíduo de f em c.*

8.35. Note-se que $\operatorname{Res}_c f = 0$ se f for holomorfa numa vizinhança de c. Observemos também que o resíduo é linear, isto é, para funções holomorfas $f, g : \Delta(c, 0, R) \to \mathbb{C}$, temos $\operatorname{Res}_c(f+g) = \operatorname{Res}_c f + \operatorname{Res}_c g$ e $\operatorname{Res}_c(kf) = k \cdot \operatorname{Res}_c f$ para todo $k \in \mathbb{C}$.

8.36. Teorema (do Resíduo)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, sejam $c_1, \ldots, c_k \in D$, seja*

$$f : D \setminus \{c_1, \ldots, c_k\} \to \mathbb{C}$$

uma função holomorfa e seja γ um caminho fechado em $D \setminus \{c_1, \ldots, c_k\}$, contrátil em D, regular por partes. Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{k} n_{c_j}(\gamma) \cdot \operatorname{Res}_{c_j} f.$$

Demonstração. Seja $c = c_j$. Para algum $R > 0$, temos $\Delta(c, R) \subset D$ tal que a função f é holomorfa na coroa circular $\Delta(c, 0, R)$. Pelo Lema **8.33**, existem uma função $g_j = f_-$, holomorfa na coroa circular

$\Delta(c,0,\infty)=\mathbb{C}\setminus\{c\}$, e uma função $h_j=f_+$, holomorfa no disco $\Delta(c,R)$, tais que $f=g_j+h_j$ na coroa circular $\Delta(c,0,R)$. Como a função f e qualquer função g_j são holomorfas em $D\setminus\{c_1,\ldots,c_k\}$, então a função $h=f-g_1-\cdots-g_k$ é holomorfa em $D\setminus\{c_1,\ldots,c_k\}$. Vamos provar que h é holomorfa em D verificando que, para todo j, a função h é holomorfa numa vizinhança de c_j. Sem perda de generalidade, podemos supor que $j=k$. Como $g_1,\ldots,g_{k-1}$ são holomorfas numa vizinhança de c_k, então a questão se reduz à análise da função $f-g_k$, que é a mesma análise que se faz para a função h_k, holomorfa numa vizinhança de c_k.

Podemos escrever $f=h+g_1+\cdots+g_k$. Como a fórmula $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{k}n_{c_j}(\gamma)\cdot\operatorname{Res}_{c_j}f$ é linear em f, podemos verificá-la para cada uma das funções $h,g_1,\ldots,g_k$ separadamente.

Sendo holomorfa em D, a função h tem resíduos nulos. Por outro lado, o caminho γ é contrátil em D. Portanto $\displaystyle\int_\gamma h(z)\,dz=0$.

Provemos a fórmula para a função $g=g_j$. Façamos $c=c_j$. Sendo holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}$ diferentes de c, a função g tem um único resíduo, $\operatorname{Res}_c g$, que pode ser não-nulo. Assim, precisamos provar que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz=n_c(\gamma)\cdot\operatorname{Res}_c g$, ou seja, que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\dfrac{\operatorname{Res}_c g}{z-c}\,dz$.

Pelo Lema **8.33**, a série $g(z)=f_-(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-c)^{-n}$ converge absolutamente sobre a coroa circular $\Delta(c,r,\infty)$ para qualquer $r>0$.

Observemos que $\operatorname{Res}_c g=c_{-1}$. Realmente, aplicando **8.3** à função constante 1, segue-se que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(c,r)}\dfrac{dz}{(z-c)^n}=1$ para $n=1$ e $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(c,r)}\dfrac{dz}{(z-c)^n}=0$ para $n\geq 2$. Como, para qualquer $r>0$, a série de $g(z)$ converge absolutamente sobre a circunferência $C(c,r)$, teremos

$$\operatorname{Res}_c g=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)}g(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-c)^{-n}\Big)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C(c,r)}\frac{dz}{(z-c)^n}=c_{-1}$$

pela Proposição **6.4**(4). Vemos então que precisamos provar que $\displaystyle\int_\gamma\big(g(z)-c_{-1}(z-c)^{-1}\big)\,dz=0$, ou seja, que

$$\int_\gamma\Big(\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}(z-c)^{-n}\Big)\,dz=0.$$

O conjunto γ não contém o ponto c, é compacto e, portanto, é fechado. Logo, o complemento de γ contém c e é aberto. Assim, o complemento de γ contém um disco aberto $\Delta(c,2r)$. Daí, $\gamma\subset\Delta(c,r,\infty)$. A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}(z-c)^{-n}$ converge absolutamente sobre a coroa circular $\Delta(c,r,\infty)$. Pela Proposição **6.4**(4), $\displaystyle\int_\gamma\Big(\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}(z-c)^{-n}\Big)\,dz=\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}\int_\gamma\frac{dz}{(z-c)^n}$. Precisamos agora verificar que $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{(z-c)^n}=0$ para $n\geq 2$.

Sabemos que qualquer caminho γ em $\mathbb{C}\setminus\{c\}$ é homotópico em $\mathbb{C}\setminus\{c\}$ a um múltiplo do caminho do tipo $C(c,r)$ (vide o Corolário **4.20**). Mas já sabemos que $\displaystyle\int\limits_{C(c,r)} \frac{dz}{(z-c)^n} = 0$ quando $n \geq 2$.

A demonstração está completa.

Exercícios. 1.* Prove a identidade $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mz^m}{1-z^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(1-z^m)^2}$ para $|z| < 1$.

2.* Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho fechado regular por partes e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $\big|f(z) - 1\big| < 1$ para todo $z \in D$. Prove que $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$.

3. Seja $f : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Quais das sequências abaixo pode representar a sequência $f(1/2), f(1/3), f(1/4), f(1/5), f(1/6), f(1/7), f(1/8), f(1/9), \ldots$

$$0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots; \qquad 0,1,0,1/2,0,1/3,0,1/4,0,1/5,\ldots;$$
$$1/2,1/2,1/3,1/3,1/4,1/4,1/5,1/5,\ldots; \qquad 2/3,3/4,4/5,5/6,6/7,7/8,8/9,9/10\ldots$$

4. Prove que a função $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z^2}$ possui um único polo no disco aberto $\Delta(0,\sqrt{2\pi})$ e este polo tem multiplicidade 2.

5. Sejam f e g duas funções meromorfas numa vizinhança aberta de $c \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{ord}_c f = m < \infty$ e $\operatorname{ord}_c g = n < \infty$. O que você pode dizer sobre os números $\operatorname{ord}_c(f+g)$, $\operatorname{ord}_c(fg)$, $\operatorname{ord}_c(f/g)$?

6. Desenvolva a função $\exp\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ em série de Laurent centrada na origem.

7. Mostre que

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos(nx - \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{2\pi}{n!}, \qquad \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen}(nx - \operatorname{sen} x)\, dx = 0.$$

8. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica cuja parte real é sempre positiva. O que você pode dizer sobre f ?

9. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica não-constante e seja $c \in D$. A afirmação

- $\operatorname{Re} f(c) \geq \operatorname{Re} f(z)$ para todo $z \in D$

pode ser válida?

10. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo, seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica não-constante e seja $c \in D$. Prove que $f(c) = 0$ se $\big|f(c)\big| \leq \big|f(z)\big|$ para todo $z \in D$.

11. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $\gamma \subset D$ um caminho fechado, regular e simples que contorna um conjunto aberto e conexo $U \subset D$ e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica não-constante tal que a função $|f|$ é constante em γ. Prove que f tem zeros em U.

12. Calcule $\operatorname{Res}_c f$ nos casos seguintes:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, \quad c = 1; \qquad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, \quad c = 2;$$
$$f(z) = \frac{z}{(z-c)^m(z-b)}, \quad b \neq c; \qquad f(z) = \frac{z}{(z-b)^m(z-c)}, \quad b \neq c;$$
$$f(z) = \exp\frac{1}{1-z}, \quad c = 1; \qquad f(z) = \frac{1}{1-e^z}, \quad c = 2\pi i.$$

13. Sejam f e g duas funções holomorfas numa vizinhança aberta de $c \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{ord}_c f = 0$ e $\operatorname{ord}_c g = 1$. Prove que $\operatorname{Res}_c(f/g) = f(c)/g'(c)$.

14. Sejam f e g duas funções holomorfas numa vizinhança aberta de $c \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{ord}_c f = 0$ e $\operatorname{ord}_c g = 2$. Prove que $\operatorname{Res}_c(f/g) = \dfrac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g^{(3)}(c)}{3\big(g''(c)\big)^2}$.

15. Seja c um polo de multiplicidade 1 de uma função f meromorfa numa vizinhança aberta de $c \in \mathbb{C}$. Prove que $f(z) - \dfrac{\operatorname{Res}_c f}{z-c}$ é holomorfa em c.

16. Usando as fórmulas $\cos\vartheta = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ e $\operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{1}{2i}\Big(z - \dfrac{1}{z}\Big)$ para $z = e^{i\vartheta}$ na circunferência unitária e utilizando resíduos no disco unitário de uma função racional, calcule as suguintes integrais reais:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x}; \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad a > 1; \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{b + \operatorname{sen}^2 x}, \quad b > 0.$$

17. Calcule as seguintes integrais reais usando resíduos:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + 6x^2 + 13}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2)\,dx}{x^4 + 10x^2 + 9}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2 + a^2} \quad a \in \mathbb{R}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{x^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 kx\,dx}{x^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$