SMA0300. GEOMETRIA ANALÍTICA

$1^{\underline{o}}$ SEMESTRE DE 2017

Lista de exercícios para a primeira prova

I. Os exercícios numerados das notas de aula: 1.1.2, 1.2.2, 1.2.3, 1.5.1, 1.5.2, 1.5.5, 1.5.6, 1.6.2, 1.9.3, 1.10.1, 2.2.1.

II. Os exercícios não-numerados das notas de aula:

a. Mostre que a definição de multiplicação por escalar é correta (página 3 das notas de aula).

b. Mostre as propriedades **DE**, **AM** e **DD** da multiplicação por escalar (página 3 das notas de aula).

c. Deduza formalmente as propriedades $(-1)\cdot v = -v$ e $r\cdot(v_1 - v_2) = r\cdot v_1 - r\cdot v_2$ das propriedades **N**, **O**, **C**, **A**, **U**, **DE**, **AM** e **DD** (página 3 das notas de aula).

d. Traduza uma descrição de reta para qualquer outra na lista de descrições de reta (página 9 das notas de aula).

e. Traduza uma descrição de plano para qualquer outra na lista de descrições de plano (página 9 das notas de aula). Sugira uma nova descrição de plano que não fica nesta lista.

III. Outros exercícios (nos exercícios 2–11, um sistema de coordenadas está fixo):

1. Usando vetores, mostre que o ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada diagonal.

2. Seja R a reta passando pelos pontos $p_1 := (1,-1,1)$ e $p_2 := (4,-7,10)$. Encontre uma descrição paramétrica e equações simétricas de R. Indique as coordenadas do ponto que divide o segmento $[p_1,p_2]$ na razão $1:2$.

3. Sejam $p_1 := (-1,0,1)$, $q_1 := (0,2,4)$, $p_2 := (0,1,0)$, $q_2 := (2,4,1)$, $p_3 := (5,4,3)$ e $q_3 := (2,-1,-1)$ pontos no espaço. O plano P é paralelo aos vetores $\overrightarrow{p_1q_1}$, $\overrightarrow{p_2q_2}$ e $\overrightarrow{p_3q_3}$ (verifique que estes são coplanares) e passa pelo ponto $(0,1,0)$. O vetor $(1,-1,-5)$ é um vetor diretor da reta R que passa pelo ponto $(0,1,5)$. O plano P' contém a reta R e o ponto $(2,2,10)$. Mostre que a interseção dos planos P e P' é uma reta e procure uma descrição paramétrica desta reta.

4. Encontre a interseção do plano P passando pelos pontos p_1,p_2,p_3 e da reta R passando pelos pontos q_1,q_2. Considere os casos seguintes:

- $p_1 = (-1,1,0)$, $p_2 = (0,-1,3)$, $p_3 = (-4,3,-1)$, $q_1 = (-2,1,1)$, $q_2 = (-2,-1,5)$;
- $p_1 = (0,1,-2)$, $p_2 = (3,0,0)$, $p_3 = (5,0,3)$, $q_1 = (1,5,-1)$, $q_2 = (0,3,-4)$;
- $p_1 = (3,0,0)$, $p_2 = (3,1,0)$, $p_3 = (3,0,1)$, $q_1 = (1,2,3)$, $q_2 = (1,3,1)$;
- $p_1 = (-1,-2,-4)$, $p_2 = (-2,-4,-1)$, $p_3 = (-4,-1,-2)$, $q_1 = (-4,-2,-1)$, $q_2 = (-2,-1,-4)$;
- $p_1 = (4,1,2)$, $p_2 = (2,4,1)$, $p_3 = (1,2,4)$, $q_1 = (2,1,4)$, $q_2 = (4,2,1)$.

5. Seja R a reta passando pelos pontos p_1 e p_2 e seja R' a reta passando pelos pontos p'_1 e p'_2. Determine as posições relativas das retas R e R'. (São iguais, paralelas, coplanares, reversas?) Procure as coordenadas do ponto de interseção (se este existir), a equação geral do plano que contém as retas R e R' (se este existir) ou as equações gerais dos planos paralelos P, P' contendo respectivamente as retas R, R'. Considere os casos seguintes:

- $p_1 = (1,2,3)$, $p_2 = (2,3,4)$, $p_1' = (2,2,3)$, $p_2' = (-1,0,2)$;
- $p_1 = (3,2,1)$, $p_2 = (0,1,0)$, $p_1' = (1,0,1)$, $p_2' = (-5,-2,-1)$;
- $p_1 = (0,2,-1)$, $p_2 = (-1,5,-4)$, $p_1' = (\frac{1}{2},0,1)$, $p_2' = (0,1,0)$;
- $p_1 = (-1,1,1)$, $p_2 = (1,0,4)$, $p_1' = (-3,2,-2)$, $p_2' = (5,-2,10)$;
- $p_1 = (-3,-1,2)$, $p_2 = (3,1,-2)$, $p_1' = (-3,-2,2)$, $p_2' = (3,2,-2)$;
- $p_1 = (0,-1,1)$, $p_2 = (4,5,3)$, $p_1' = (3,4,5)$, $p_2' = (4,6,8)$.

6. Quantos planos interceptam os eixos coodenados ox_1, ox_2 e ox_3 respectivamente nas distâncias 2016, 2017 e 2018 da origem? Escreva a equação geral de um destes planos.

7. Com o uso de escalonamento e pivotização, descreva parametricamente todas as soluções do sistema
$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 2x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \\ 3x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$.

8. Seja $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & b & 1 \\ a & a & 1 & b \end{array}\right]$ a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Para quais valores de a e b o sistema admite solução com duas variáveis livres?

9. Usando a fórmula de matriz inversa, resolva o sistema $\begin{cases} x_1+x_3 = 20 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+2x_3 = 7 \end{cases}$.

10. Para $M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $\det(M^{2016})$. Usando escalonamento, encontre a matriz inversa M^{-1}.

11. Para o sistema de equações lineares $M \cdot X = C$, onde $M := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ e $C := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, procure todas as soluções na forma $S_0 + p_1 \cdot S_1 + p_2 \cdot S_2$, onde p_1 e p_2 são parâmetros reais e S_1, S_2 são soluções apropriadas do sistema homogêneo associado.

IV. Exercícios legais das notas de aula:

a. Três exercícios sem número no item 1.5.7.

b. Um exercício sem número no item 1.14.