SMA0300. GEOMETRIA ANALÍTICA

1º semestre de 2017

Lista de exercícios para a segunda prova

I. Os exercícios numerados das notas de aula: 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.5.2, 3.6.1, 4.4.1, 4.5.1, 4.5.2, 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3.

II. Os exercícios não-numerados das notas de aula:

a. Prove a desigualdade triangular: $|v_1 + v_2| \leqslant |v_1| + |v_2|$ para quaisquer vetores v_1 e v_2.

b. Convença-se que as três definições de produto vetorial dadas no início do item 3.2 são equivalentes.

c. Efetue um cálculo mencionado no segundo parágrafo do item 4.1.4.

d. Por que, para quaisquer números reais s_{11}, s_{12}, s_{22}, sempre existe um número real α satisfazendo a equação $\frac{s_{22}-s_{11}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + s_{12} \cos 2\alpha = 0$?

e. Usando as ferramentas desenvolvidas no item 4.3, verifique a lista intitulada `Classificação de cônicas`.

III. Outros exercícios (nos exercícios 2–15, está fixo um sistema cartesiano de coordenadas com orientação direita) :

1. Sejam p_1, p_2, p_3 os vértices de um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento 7. Calcule o produto escalar $\overrightarrow{p_1p_2} \cdot \overrightarrow{p_2p_3}$.

2. Sejam $p := (1, 0, -1)$ e $q := (-1, 2, 3)$. Escreva a equação geral do *plano mediador* do segmento $[pq]$, isto é, do plano formado por todos os pontos do espaço cujas distâncias a p e a q são iguais.

3. Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{pq}$ e v, onde $p := (1, 0, 1)$, $q := (3, 1, -2)$ e $v := (2, 1, -1)$.

4. Sejam α_1, α_2 e α_3 os ângulos diretores de um vetor v. Qual das seguintes variantes é possível (indique um vetor v caso exista) ?

a. $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\alpha_3 = \pi/4$; **b.** $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/3$, $\alpha_3 = \pi/4$.

5. Sejam $p := (1, 0, 1)$, $q := (3, 1, -2)$, $p' := (0, 1, 0)$ e $d := (2, 1, -1)$. Seja R a reta passando por p e q e seja R' a reta passando por p' com o vetor diretor d. Calcule o ângulo entre R e R'. Verifique se R e R' são reversas.

6. Seja P o plano dado pela equação $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2017$ e seja P' o plano passando pelos pontos $(2017, 2017, 0)$, $B(2018, 2018, 0)$ e $C(2017, 2017, -1)$. Calcule o ângulo entre P e P'.

7. Seja P o plano dado pela equação $x_2 - x_3 = 7$ e seja R a reta passando por $(2016, 2017, 2018)$ cujo vetor diretor é $(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$. Calcule o ângulo entre R e P.

8. Seja P o plano dado pela equação $3x - 4z + 5 = 0$ e seja $p := (-1, -3, -2)$. Calcule a distância entre p e P.

9. Seja $(2, -1, 2)$ o vetor normal para dois planos P_1 e P_2 que passam respectivamente pelos pontos $(0, 1, 2)$ e $(1, 3, 5)$. Calcule a distância entre P_1 e P_2.

10. Encontre s e t tais que $v \wedge w = \vec{0}$, onde $v := (s, s + 1, t + 2)$ e $w := (1, 0, t - 2s)$.

11. Sejam v e w vetores tais que $|v| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ e $|v \wedge w| = 3$. Qual pode ser o ângulo entre v e w ?

12. Seja R_1 a reta passando por $p := (1, -2, 2)$ e $(-1, 2, -2)$, seja R_2 a reta passando por $(4, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$ e $(-4, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$. Calcule a distância entre R_1 e R_2. Determine a reta R perpendicular às retas R_1 e R_2 que intercepta ambas as R_1 e R_2. Calcule a distância entre R e R_1. Calcule a distância entre p e R_2.

13. Calcule o volume do tetraedro com vértices $o := (-1, 0, -1)$, $p_1 := (0, 6, 0)$, $p_2 := (0, 2, -1)$, $p_3 := (0, 0, 0)$. Determine a orientação (direita ou esquerda?) do sistema de coordenadas o, $\overrightarrow{op_1}$, $\overrightarrow{op_2}$, $\overrightarrow{op_3}$. Calcule o comprimento da altura do tetraedro traçada do vértice p_1.

14. Seja o, v_1, v_2 um sistema de coordenadas no plano (não necessariamente cartesiano). Os vetores v_1' e v_2' têm as coordenadas $(1, 2)$ e $(3, 4)$, respectivamente. Os pontos o' e p têm as coordenadas $(5, 6)$ e $(7, 8)$, respectivamente. Calcule as coordenadas do ponto p no sistema o', v_1', v_2'.

15. Seja C uma cônica dada pela equação $f(x, y) = 0$. Determine todos os centros de simetria de C, todas as retas de simetria de C, todos os focos de C, todas as assíntotas de C e todas as diretrizes de C. Considere os casos seguintes:

- $f(x, y) := 91x^2 + 84y^2 - 24xy - 24x + 168y - 216$,
- $f(x, y) := -37x^2 + 12y^2 + 107xy - 74x + 107y - 37$,
- $f(x, y) := 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 15x + 20y$,
- $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 12xy$,
- $f(x, y) := 4x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3$,
- $f(x, y) := 5x^2 + 5y^2 + 26xy + 26x + 10y - 67$,
- $f(x, y) := x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y - 3$,
- $f(x, y) := x^2 + 11y^2 - 10\sqrt{3}xy + 16$.

IV. Exercícios legais das notas de aula:

a. Sete exercícios sem número no item 3.1.9.

b. Uma questão sem número no item 3.2.6.

c. Três exercícios sem número no item 4.7.

d. Dois exercícios sem número no item 4.8.

e. Um exercício sem número no item 5.3.